

I. INTRODUCTION

1. Objectifs

Dans ce chapitre, utilisant les connaissances acquises en première année en cinématique et statique des solides, nous serons capables d'analyser les comportements cinématique et statique d'un mécanisme :

- déterminer les relations **entrées sorties** du mécanisme ;
- déterminer le **degré de mobilité** du mécanisme ;
- déterminer le **degré d'hyperstaticité** du mécanisme ;
- modifier les liaisons du mécanisme afin de le rendre **isostatique**.

2. Hypothèses d'études :

Dans ce chapitre, nous n'oublierons pas ces hypothèses d'étude :

- les solides seront tous considérés **indéformables** ;
- les liaisons entre les solides seront **parfaites** du point de vue cinématique (**sans jeu**) et du point de vue statique (**sans frottements**) ;
- les effets dynamiques sont considérés comme négligeables (**masse faible**), ainsi le **PFS peut être écrit à tout ensemble matériel issu du mécanisme** ;

3. Nombre cyclomatique d'un mécanisme :

Le graphe des liaisons permet d'identifier les liaisons entre tous les solides du mécanisme.

On définit le **nombre cyclomatique** γ comme le nombre de cycles (chaînes fermées) indépendants existants dans le mécanisme :

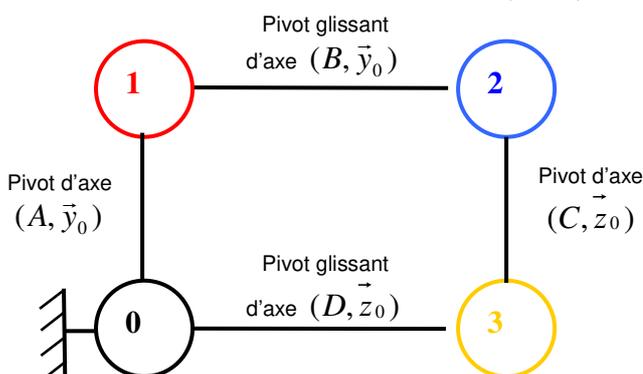
$$\gamma = L - n + 1$$

L : **nombre de liaisons** présentes dans le mécanisme

n : **nombre de solides** constituant le mécanisme bâti compris

Exemple 1 : Malaxeur – Mélangeur

La figure 1 représente un malaxeur – mélangeur. L'arbre d'entrée **1** est entraîné en rotation par un moteur électrique. Par l'intermédiaire de la bielle **2**, la pale de sortie **3** est animée d'un mouvement de rotation autour de (D, \vec{z}_0) et d'un mouvement de translation alternatif d'axe (D, \vec{z}_0) .



Le nombre cyclomatique de ce mécanisme est :

$$\gamma = L - n + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$$

Le mécanisme possède une chaîne fermée que l'on pourra étudier plus tard dans le chapitre afin de déterminer la vitesse de la pale **3** en fonction du moteur.

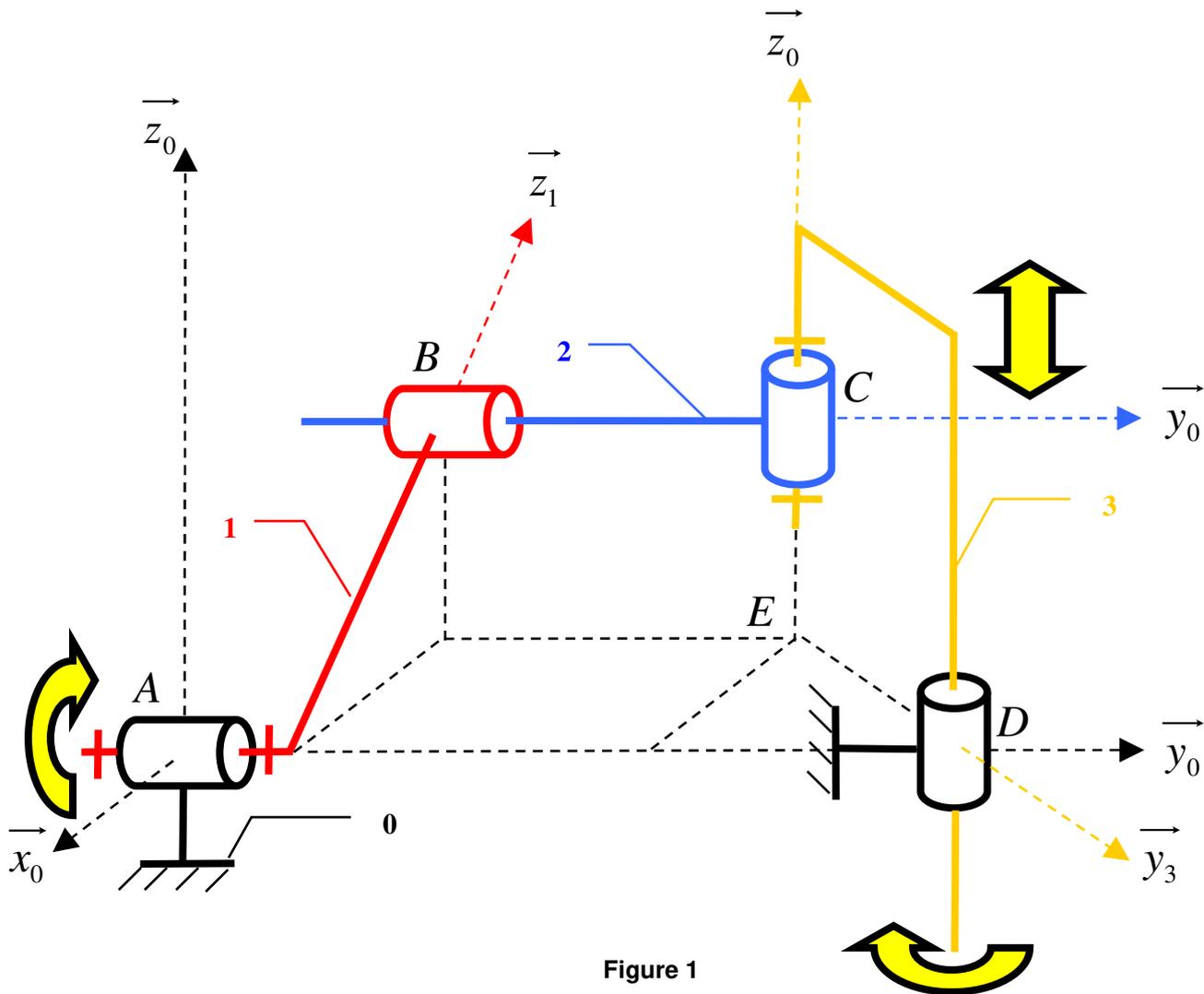
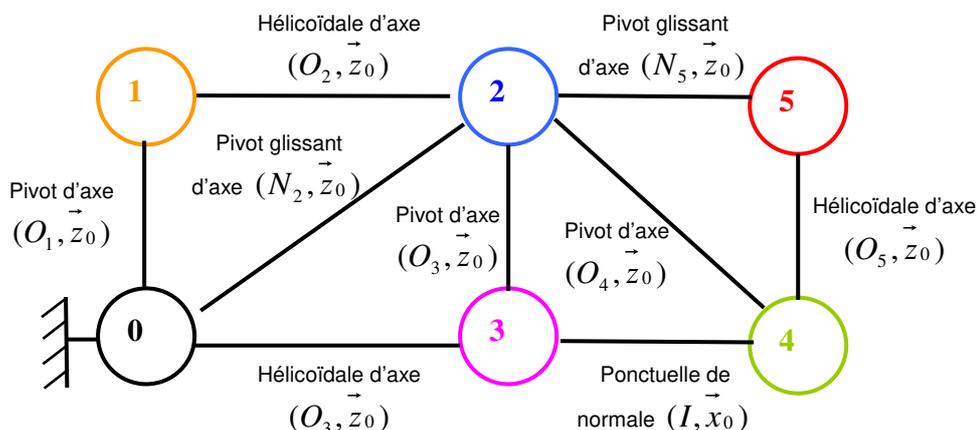


Figure 1

Exemple 2 : Elévateur télescopique

La figure 2 représente un élévateur télescopique. La vis d'entrée 1 est entraînée en rotation par un moteur électrique. Ce mouvement est transformé en translation d'axe (O_1, \vec{z}_0) du coulisseau 2 par l'intermédiaire de la liaison glissière hélicoïdale d'axe (O_2, \vec{z}_0) . La vis 3 est levée par le coulisseau 2, elle entre donc aussi en rotation d'axe (O_3, \vec{z}_0) par l'intermédiaire de la liaison glissière hélicoïdale avec le bâti 0. Le train d'engrenage 3-4 en I entraîne la vis 4 en rotation qui provoque la translation d'axe (O_5, \vec{z}_0) du plateau 5.



Le nombre cyclomatique de ce mécanisme est :

$$\gamma = L - n + 1 = 9 - 6 + 1 = 4$$

Le mécanisme possède **4 chaînes fermées indépendantes**.

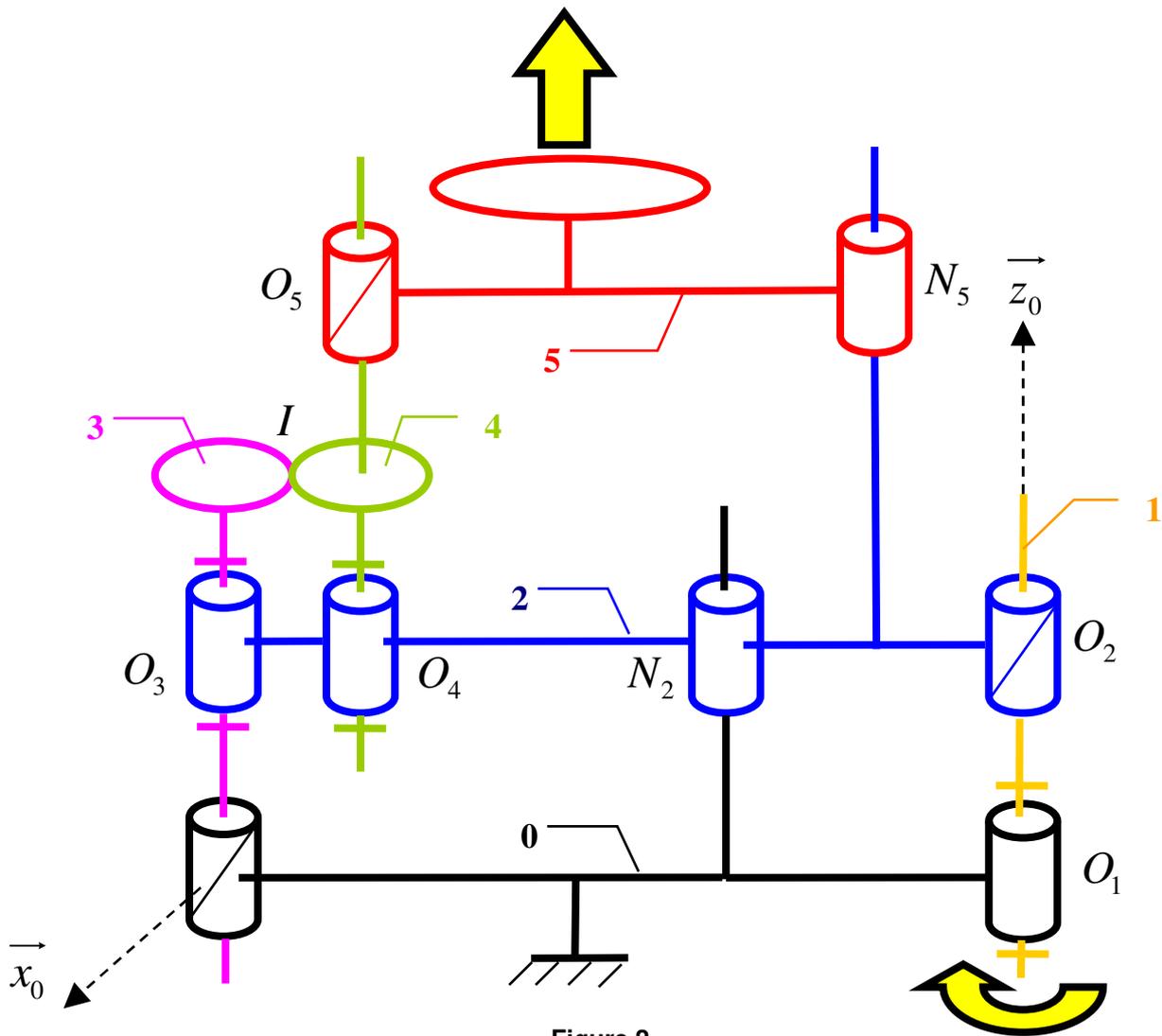


Figure 2

Chaque cycle indépendant γ peut être étudié de façon **géométrique, cinématique ou statique**. Ces trois méthodes font l'objet des paragraphes suivant.

II. ETUDE GEOMETRIQUE D'UNE CHAÎNE FERMÉE SIMPLE

1. Fermeture géométrique

Objectifs :

- Déterminer les relations entre les **paramètres géométriques connus et inconnus** du mécanisme ;
- Etablir la **loi entrée-sortie**.

Soit $C = \{1, \dots, k\}$ une chaîne fermée simple de k solides. Le nombre de liaisons est $L = k$. Soit le point A_i le centre géométrique de la liaison $L_{i+1/i}$ entre les solides $i+1$ et i avec $i \in [1, k]$. On peut écrire la fermeture géométrique de la chaîne C de la manière suivante :

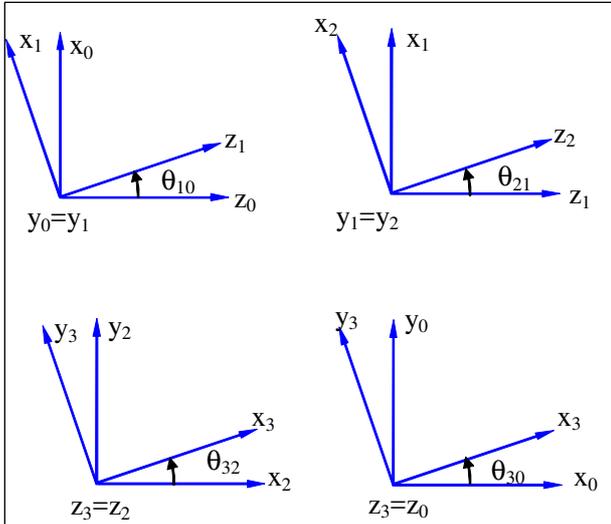
$$\sum_{i=1}^{k-1} \overrightarrow{A_i A_{i+1}} + \overrightarrow{A_k A_1} = \vec{0}$$

Cette relation vectorielle est projetée dans une base orthonormée. On obtient alors **un système de 3 équations à I_g paramètres géométriques**.

La loi entrée-sortie est la relation entre les paramètres géométriques inconnus et les paramètres géométriques connus du mécanisme.

2. Exemple traité : Malaxeur – Mélangeur

Figures angulaires planes :



Paramétrage :

$$\overrightarrow{AB} = R \cdot \vec{z}_1 ; \overrightarrow{CB} = -\lambda \cdot \vec{y}_1 \text{ avec } \lambda > 0 ;$$

$$\overrightarrow{DA} = -d \cdot \vec{y}_0 ; \overrightarrow{CD} = l \cdot \vec{y}_3 - h \cdot \vec{z}_0 .$$

Fermeture géométrique :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} &= \vec{0} \\ R \cdot \vec{z}_1 + \lambda \cdot \vec{y}_0 + l \cdot \vec{y}_3 - h \cdot \vec{z}_0 - d \cdot \vec{y}_0 &= \vec{0} \end{aligned} \quad (1)$$

Système d'équation en projetant dans B_0 :

$$\begin{cases} R \sin \theta_{10} & - l \sin \theta_{30} = 0 & / \vec{x}_0 \\ & \lambda - d + l \cos \theta_{30} = 0 & / \vec{y}_0 \\ R \cos \theta_{10} & - h = 0 & / \vec{z}_0 \end{cases}$$

Paramètres géométriques variables : $h, \lambda, \theta_{21}, \theta_{32}, \theta_{10}$ et $\theta_{30} \rightarrow \text{Ig}=6$

Paramètres géométriques fixes : R, d et l

Paramètres géométriques inconnus : $h, \lambda, \theta_{21}, \theta_{32}$ et θ_{30}

Paramètres géométriques connus : R, d, l , et θ_{10} car θ_{10} est imposé (mouvement d'entrée)

Déterminons les **lois entrée-sortie géométriques** du mécanisme :

Translation de la pale 3 : $h = R \cdot \cos \theta_{10}$

Rotation de la pale 3 : $\theta_{30} = \text{Arc sin} \left(\frac{R}{l} \cdot \sin \theta_{10} \right)$

Du point de vue cinématique maintenant :

$$\text{Vitesse de translation de la pale 3 : } \dot{h} = \frac{dh}{dt} = \frac{dh}{d\theta_{10}} \cdot \frac{d\theta_{10}}{dt} = -R \cdot \dot{\theta}_{10} \cdot \sin \theta_{10}$$

$$\text{Vitesse angulaire de la pale 3 : } \dot{\theta}_{30} = \frac{\frac{R}{l} \cdot \dot{\theta}_{10} \cdot \cos \theta_{10}}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \cdot \sin^2 \theta_{10}}}$$

III. ETUDE CINEMATIQUE D'UNE CHAÎNE FERMÉE SIMPLE.

Objectifs :

- Etablir la **loi entrée-sortie cinématique** du mécanisme ;
- Déterminer le **degré de mobilité**.

1. Fermeture cinématique

Reprenons la chaîne de solide C . Le torseur cinématique en A du solide i en mouvement par rapport au solide j est noté

$$\{V_{i/j}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(i/j) \\ \vec{V}(A \in i/j) \end{Bmatrix}.$$

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{k-1} \{V_{i/i+1}\}_A + \{V_{k/1}\}_A = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \vec{\Omega}(i/i+1) + \vec{\Omega}(k/1) = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \vec{V}(A \in i/i+1) + \vec{V}(A \in k/1) = \vec{0}$$

2. Degré de mobilité d'un mécanisme

Pour chaque cycle indépendant, on obtient par projection 6 équations scalaires.

Pour le mécanisme entier, on obtient un système E de **$6.\gamma$ équations à I_C** paramètres cinématiques inconnues :

$$I_C = \sum_{i=1}^L I_{C_i} \text{ avec } I_{C_i} \text{ le nombre de degré de liberté dans la liaison } L_{ij} \text{ et } L \text{ le nombre total de liaison.}$$

Rang cinématique r_C : nombre d'équations indépendantes du système E. On a bien sur $r_C \leq 6.\gamma$

Il faut donc fixer $I_C - r_C$ paramètres cinématiques inconnues pour résoudre complètement le problème.

Définition :

On appelle **degré de mobilité cinématique d'un mécanisme**, notée m_C , le nombre de paramètres cinématiques à fixer pour déterminer toutes les inconnues cinématiques.

$$\text{On peut écrire : } m_C = I_C - r_C$$

Plusieurs cas peuvent se rencontrer :

- Si $m_C = 0$ alors tous les paramètres cinématiques sont déterminés, il n'y a pas de mouvement. **Le mécanisme est bloqué** ;
- Si $m_C = 1$ alors il suffit de fixer un seul paramètre cinématique pour déterminer tous les autres. Ce paramètre est le mouvement moteur. On appelle ce type de mécanisme des **mécanismes à transformation de mouvement** ;
- Si $m_C > 1$ alors il faut fixer plusieurs paramètres cinématiques pour connaître la position exacte de tous les solides. Ces mouvements peuvent être composés (**mécanisme à composition de mouvement**) et/ou inutiles (mécanismes à **mobilité(s) interne(s)**).

3. Mobilité utile et mobilité interne

Dans le troisième cas, le degré de mobilité du mécanisme s'écrit : $m_C = m_U + m_I$

On appelle **mobilité utile**, notée m_U , le nombre **d'inconnues cinématiques indépendantes** à fixer pour déterminer les relations entrées-sorties du mécanisme.
La mobilité utile est liée à la fonction du mécanisme.

On appelle **mobilité interne**, notée m_I , le nombre **d'inconnues cinématiques indépendantes** du mécanisme quand on immobilise les liaisons d'entrée et les liaisons de sortie du mécanisme.
La mobilité interne est un mouvement existant entre deux solides du mécanisme n'ayant pas d'incidence sur la fonction réalisée.

4. Exemple traité : Malaxeur – Mélangeur

Les torseurs cinématiques s'écrivent :

$$\{V_{1/0}\}_D = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\theta}_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(-, \bar{y}_0, -)} ; \{V_{2/1}\}_C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\theta}_{21} & v_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(-, \bar{y}_0, -)} ; \{V_{3/2}\}_C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\theta}_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{(-, -, \bar{z}_0)} ; \{V_{3/0}\}_D = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\theta}_{30} & w_{30} \end{Bmatrix}_{(-, -, \bar{z}_0)}$$

On écrit les torseurs en D , là où, en général, il y a le plus d'inconnues (éventuellement C ici):

$$\vec{V}(D \in 2/1) = \vec{V}(C \in 2/1) + \overline{DC} \wedge \vec{\Omega}(2/1) = v_{21} \cdot \vec{y}_0 + (h \cdot \vec{z}_0 - l \cdot \vec{y}_3) \wedge \dot{\theta}_{21} \cdot \vec{y}_0 = v_{21} \cdot \vec{y}_0 + l \cdot \dot{\theta}_{21} \cdot \sin \theta_{30} \cdot \vec{z}_0 - h \cdot \dot{\theta}_{21} \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{V}(D \in 3/2) = \vec{V}(C \in 3/2) + \overline{DC} \wedge \vec{\Omega}(3/2) = (h \cdot \vec{z}_0 - l \cdot \vec{y}_3) \wedge \dot{\theta}_{32} \cdot \vec{z}_0 = -l \cdot \dot{\theta}_{32} \cdot \vec{x}_3$$

$$\{V_{2/1}\}_D = \begin{Bmatrix} 0 & -h \cdot \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{21} & v_{21} \\ 0 & l \cdot \dot{\theta}_{21} \cdot \sin \theta_{30} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)} ; \{V_{3/2}\}_D = \begin{Bmatrix} 0 & -l \cdot \dot{\theta}_{32} \cdot \cos \theta_{30} \\ 0 & -l \cdot \dot{\theta}_{32} \cdot \sin \theta_{30} \\ \dot{\theta}_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)}$$

La fermeture cinématique s'écrit : $\{V_{3/2}\}_D + \{V_{2/1}\}_D + \{V_{1/0}\}_D = \{V_{3/0}\}_D$

Le système d'équations en projetant sur B_0 :

$$\begin{array}{rcccccl} & & & & 0 & = 0 & (1) \\ \dot{\theta}_{10} & + & \dot{\theta}_{21} & & & = 0 & (2) \\ & & & \dot{\theta}_{32} & - & \dot{\theta}_{30} & = 0 & (3) \\ & -h \dot{\theta}_{21} & - & l \dot{\theta}_{32} \cos \theta_{30} & & = 0 & (4) \\ & v_{21} & - & l \dot{\theta}_{32} \sin \theta_{30} & & = 0 & (5) \\ l \dot{\theta}_{21} \sin \theta_{30} & & & & - & w_{30} & = 0 & (6) \end{array}$$

Nombre total d'inconnues cinématiques : $I_C = 6$;

Rang cinématique : $r_C = 5$ car l'équation (1) n'est pas exploitable ;

Degré de mobilité du mécanisme : $m_C = I_C - r_C = 1$ donc le malaxeur - mélangeur est un mécanisme de transformation de mouvement. Il suffit de connaître une seule I_C pour déterminer toutes les autres ;

Paramètre cinématique connu : $\dot{\theta}_{10}$ (la mobilité à fixer) ;

Paramètres cinématiques inconnus : $\dot{\theta}_{30}$, w_{30} , $\dot{\theta}_{21}$, v_{21} , $\dot{\theta}_{32}$ (mobilité à déterminer).

Résolution :

D'après l'étude géométrique, on sait que $\sin \theta_{30} = \frac{R}{l} \sin \theta_{10}$.

Le système d'équation donne :

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{21} &= -\dot{\theta}_{10} \\ \dot{\theta}_{32} &= \dot{\theta}_{30} \\ \dot{\theta}_{30} &= \frac{h \cdot \dot{\theta}_{10}}{l \cdot \cos \theta_{30}} \\ v_{21} &= l \cdot \dot{\theta}_{10} \cdot \tan \theta_{30} \\ w_{30} &= -R \cdot \dot{\theta}_{10} \cdot \sin \theta_{10}\end{aligned}$$

Retrouvons la loi entrée-sortie du mécanisme de l'étude géométrique:

<p style="text-align: center;">Vitesse de translation de la pale 3 : $w_{30} = -R \cdot \dot{\theta}_{10} \cdot \sin \theta_{10}$</p> <p style="text-align: center;">Vitesse angulaire de la pale 3 : $\dot{\theta}_{30} = \frac{\frac{R}{l} \cdot \dot{\theta}_{10} \cdot \cos \theta_{10}}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \cdot \sin^2 \theta_{10}}}$</p>
--

IV. ETUDE STATIQUE D'UNE CHAINE FERMEE SIMPLE**Objectifs :**

- Déterminer le **degré d'hyperstaticité** du mécanisme ;
- Identifier les inconnues d'efforts hyperstatiques ;
- Modifier le mécanisme pour **le rendre isostatique** si nécessaire.

1. Principe fondamental de la statique

Le torseur d'inter-efforts associé à la liaison L_{ij} entre le solide S_j sur le solide S_i au point A s'écrit :

$$\left\{ T_{S_j \rightarrow S_i} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S_j \rightarrow S_i) = X_{ji} \cdot \vec{x}_k + Y_{ji} \cdot \vec{y}_k + Z_{ji} \cdot \vec{z}_k \\ \vec{M}(A, S_j \rightarrow S_i) = L_{ji} \cdot \vec{x}_k + M_{ji} \cdot \vec{y}_k + N_{ji} \cdot \vec{z}_k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} X_{ji} & L_{ji} \\ Y_{ji} & M_{ji} \\ Z_{ji} & N_{ji} \end{array} \right\}_A^{Bk}$$

Le mécanisme est constitué de n solides. On peut donc isolé $n-1$ systèmes de solides (on ne peut pas isoler le bâti). On peut, par exemple, isoler successivement chaque solide du mécanisme.

On applique le **Principe Fondamental de la Statique** à ces $n-1$ solides :

Si $\left\{ T_{S_i \rightarrow S_i}^- \right\}_A$ est le torseur de toutes les actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le solide S_i alors :

$$\left\{ T_{S_i \rightarrow S_i}^- \right\}_A = \{0\}_A \quad \forall i \in [1, n-1]$$

$$\sum_{j \neq i} \left\{ T_{S_j \rightarrow S_i} \right\}_A = \{0\}_A \quad \forall i \in [1, n-1]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \neq i} \vec{R}(S_j \rightarrow S_i) = \vec{0} \\ \sum_{j \neq i} \vec{M}(A, S_j \rightarrow S_i) = \vec{0} \end{array} \right\} \quad \forall i \in [1, n-1]$$

2. Nombre d'inconnues statique d'un mécanisme

En isolant ces $n-1$ solides, on obtient un système E de $6(n-1)$ équations scalaires en projetant sur la base B_0 . Le

nombre d'inconnues statiques I_S est la somme des inconnues statiques de toutes les liaisons : $I_S = \sum_{i=1}^L I_{Si}$.

or $L = \gamma + n - 1$ et pour chaque liaison $I_{Si} = 6 - I_{Ci}$.

Donc le nombre d'inconnues statiques est : $I_S = \sum_{i=1}^{\gamma+n-1} (6 - I_{Ci}) = 6 \cdot (\gamma + n - 1) - \sum_{i=1}^{\gamma+n-1} I_{Ci} = 6 \cdot (\gamma + n - 1) - I_C$.

Le **nombre d'inconnues statiques** I_S s'écrit finalement : $I_S = 6 \cdot (\gamma + n - 1) - I_C$

γ : nombre cyclomatique

n : nombre de solides avec le bâti

I_C : nombre total d'inconnues cinématiques

3. Rang statique

Le rang statique r_s du mécanisme est le nombre d'équations indépendantes du système E. Bien sur $r_s \leq 6 \cdot (n - 1)$.

Nous admettons que le **rang statique** d'un mécanisme est : $r_s = 6 \cdot (n - 1) - m_C$

n : nombre de solides avec le bâti

m_C : degré de mobilité

4. Degré d'hyperstaticité d'un mécanisme

Il faut fixer $I_S - r_s$ inconnues de liaison pour déterminer tous les efforts dans le mécanisme.

Définition :

On appelle **degré d'hyperstaticité d'un mécanisme**, noté h , le nombre de paramètres d'inter-efforts à fixer pour déterminer les r_s inconnues d'inter-efforts restantes : $h = I_S - r_s$

En remplaçant les expressions de r_s et I_S , on obtient : $h = 6 \cdot (\gamma + n - 1) - I_C - 6 \cdot (n - 1) + m_C$

Finalement, la formule générale de la détermination de degré d'hyperstaticité d'un mécanisme est :

$$h = m_C + 6 \cdot \gamma - I_C \quad \text{ou} \quad h = I_S - 6 \cdot (n - 1) + m_C$$

Formule de mobilité :

$$h = m_C + 6 \cdot \gamma - I_C \quad \text{ou} \quad h = m_C - 6 \cdot (n - 1) + I_S$$

γ : nombre cyclomatique

n : nombre de solides avec le bâti

I_C : nombre total d'inconnues cinématiques

I_S : nombre total d'inconnues statiques

m_C : degré de mobilité

5. Signification de h

$h = 0$	$I_s = r_s$	<p style="text-align: center;">Le mécanisme est isostatique</p> <p>Toutes les inconnues d'inter-efforts sont déterminables.</p> <p>Le fonctionnement correct de ce mécanisme ne nécessite aucune condition géométrique particulière.</p> <p>Avantage : le montage et la fabrication du mécanisme sont simplifiés.</p>
$h > 0$	$I_s = r_s + h$	<p style="text-align: center;">Le mécanisme est hyperstatique d'ordre h</p> <p>Il faut fixer h inconnues d'inter-efforts afin de déterminer les r_s inconnues restantes.</p> <p>Le fonctionnement correct de ce mécanisme nécessite h conditions géométriques à respecter.</p> <p>Inconvénients : le respect des conditions géométriques crée des difficultés d'assemblage et de fabrication du mécanisme. La conséquence est l'augmentation du coût du produit.</p> <p>Avantage : le mécanisme sera plus rigide.</p>

6. Comment rendre un mécanisme isostatique ?

Intervenir sur les liaisons en gardant des solides indéformables et des liaisons parfaites:

Il faut annuler h inter-efforts dans les liaisons. On va « **libérer** » des **mobilités**, on changera alors les modèles des liaisons. Le fonctionnement du mécanisme doit être conservé, on s'assurera de ce bon fonctionnement. **Les mobilités utiles ne peuvent pas être modifiées.** Généralement, on ne change pas les liaisons d'entrée et de sortie du mécanisme.

Intervenir sur les liaisons en ne gardant pas ces hypothèses :

Il faudra ajouter h **équations de comportement en considérant les solides déformables** et les liaisons parfaites.

On peut aussi ajouter h équations de compatibilité géométrique en considérant **les liaisons avec jeu** et les solides indéformables.

7. Exemple traité : Mélangeur – Malaxeur

Ecrivons les torseurs statiques des liaisons du malaxeur :

$\{T(S_0 \rightarrow S_1)\}_A = \begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_{B_0}$	$\{T(S_2 \rightarrow S_1)\}_B = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ 0 & 0 \\ Z_{21} & N_{21} \end{Bmatrix}_{B_0}$	$\{T(S_3 \rightarrow S_2)\}_C = \begin{Bmatrix} X_{32} & L_{32} \\ Y_{32} & M_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{B_0}$
$\{T(S_0 \rightarrow S_3)\}_D = \begin{Bmatrix} X_{03} & L_{03} \\ Y_{03} & M_{03} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_0}$	$\{T(ext \rightarrow S_1)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_m \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_0}$	$\{T(ext \rightarrow S_3)\}_D = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{ext} & N_{ext} \end{Bmatrix}_{B_0}$

Isolons l'arbre d'entrée 1 :

Ecrivons le PFS au point B : $\{T(S_0 \rightarrow S_1)\}_B + \{T(S_2 \rightarrow S_1)\}_B + \{T(ext \rightarrow S_1)\}_B = \{0\}$

Ecrivons les torseurs en B :

$$\vec{M}(B, S_0 \rightarrow S_1) = \vec{M}(A, S_0 \rightarrow S_1) + \vec{BA} \wedge (X_{01} \cdot \vec{x}_0 + Y_{01} \cdot \vec{y}_0 + Z_{01} \cdot \vec{z}_0)$$

$$\vec{M}(B, S_0 \rightarrow S_1) = L_{01} \cdot \vec{x}_0 + N_{01} \cdot \vec{z}_0 - R \cdot \vec{z}_1 \wedge (X_{01} \cdot \vec{x}_0 + Y_{01} \cdot \vec{y}_0 + Z_{01} \cdot \vec{z}_0) = \begin{cases} L_{01} + R \cdot Y_{01} \cdot \cos \theta_{10} \\ -R \cdot X_{01} \cdot \cos \theta_{10} + R \cdot Z_{01} \cdot \sin \theta_{10} \\ N_{01} - R \cdot Y_{01} \cdot \sin \theta_{10} \end{cases}_{B0}$$

Le système d'équations obtenu est le suivant :

$$\begin{cases} X_{01} + X_{21} = 0 & (1) \\ Y_{01} = 0 & (2) \\ Z_{01} + Z_{21} = 0 & (3) \\ L_{01} + L_{21} + R Y_{01} \cos \theta_{10} = 0 & (4) \\ R Z_{01} \sin \theta_{10} - R X_{01} \cos \theta_{10} + C_m = 0 & (5) \\ N_{01} + N_{21} - R \cdot Y_{01} \cdot \sin \theta_{10} = 0 & (6) \end{cases}$$

Isolons la bielle 2 :

Ecrivons le PFS au point C : $-\{T(S_2 \rightarrow S_1)\}_C + \{T(S_3 \rightarrow S_2)\}_C = \{0\}$

Ecrivons les torseurs en C :

$$\vec{M}(C, S_2 \rightarrow S_1) = \vec{M}(B, S_2 \rightarrow S_1) + \vec{CB} \wedge (X_{21} \cdot \vec{x}_0 + Z_{21} \cdot \vec{z}_0)$$

$$\vec{M}(C, S_2 \rightarrow S_1) = L_{21} \cdot \vec{x}_0 + N_{21} \cdot \vec{z}_0 - \lambda \cdot \vec{y}_1 \wedge (X_{21} \cdot \vec{x}_0 + Z_{21} \cdot \vec{z}_0) = \begin{cases} L_{21} - \lambda \cdot Z_{21} \\ 0 \\ N_{21} + \lambda \cdot X_{21} \end{cases}_{B0}$$

Le système d'équations obtenu est le suivant :

$$\begin{cases} -X_{21} + X_{32} = 0 & (7) \\ Y_{32} = 0 & (8) \\ -Z_{21} + Z_{32} = 0 & (9) \\ -L_{21} + L_{32} + \lambda Z_{21} = 0 & (10) \\ M_{32} = 0 & (11) \\ -N_{21} - \lambda X_{21} = 0 & (12) \end{cases}$$

Isolons la pale 3 :

Ecrivons le PFS au point C : $\{T(ext \rightarrow S_3)\}_C + \{T(S_0 \rightarrow S_3)\}_C - \{T(S_3 \rightarrow S_2)\}_C = \{0\}$

Ecrivons les torseurs en C :

$$\vec{M}(C, S_0 \rightarrow S_3) = \vec{M}(D, S_0 \rightarrow S_3) + \vec{CD} \wedge (X_{03} \cdot \vec{x}_0 + Y_{03} \cdot \vec{y}_0)$$

$$\vec{M}(C, S_0 \rightarrow S_3) = L_{03} \cdot \vec{x}_0 + M_{03} \cdot \vec{y}_0 + (l \cdot \vec{y}_3 - h \cdot \vec{z}_0) \wedge (X_{03} \cdot \vec{x}_0 + Y_{03} \cdot \vec{y}_0) = \begin{cases} L_{03} + h \cdot Y_{03} \\ M_{03} - h \cdot X_{03} \\ -l \cdot X_{03} \cdot \cos \theta_{30} - l \cdot Y_{03} \cdot \sin \theta_{30} \end{cases}_{B0}$$

$$\vec{M}(C, ext \rightarrow S_3) = \vec{M}(D, ext \rightarrow S_3) + \vec{CD} \wedge (Z_{ext} \cdot \vec{z}_0)$$

$$\vec{M}(C, ext \rightarrow S_3) = N_{ext} \cdot \vec{z}_0 + (l \cdot \vec{y}_3 - h \cdot \vec{z}_0) \wedge (Z_{ext} \cdot \vec{z}_0) = \begin{cases} l \cdot Z_{ext} \cdot \cos \theta_{30} \\ l \cdot Z_{ext} \cdot \sin \theta_{30} \\ N_{ext} \end{cases}$$

Le système d'équations obtenu est le suivant :

$$\begin{cases} -X_{32} + X_{03} = 0 & (13) \\ -Y_{32} + Y_{03} = 0 & (14) \\ -Z_{32} + Z_{ext} = 0 & (15) \\ -L_{32} + L_{03} + hY_{03} + lZ_{ext} \cos \theta_{30} = 0 & (16) \\ -M_{32} + M_{03} - hX_{03} + lZ_{ext} \sin \theta_{30} = 0 & (17) \\ -lY_{03} \sin \theta_{30} - lX_{03} \cos \theta_{30} + N_{ext} = 0 & (18) \end{cases}$$

Bilan :

Inconnues d'inter-efforts	$I_S = \sum_{i=1}^L n_{Si} = 18$
Mobilité du mécanisme	$m_C = I_C - r_C = 1$
Rang statique	$r_S = 6(n-1) - m_C = 17$
Degré d'hyperstaticité	$h = I_S - r_S = 1$

Il est donc nécessaire de fixer (d'annuler) une inconnue d'inter-efforts pour déterminer toutes les autres.

Résolution :

$$\begin{cases} X_{01} + X_{21} = 0 & (1) \\ Y_{01} = 0 & (2) \\ Z_{01} + Z_{21} = 0 & (3) \\ L_{01} + L_{21} + RY_{01} \cos \theta_{10} = 0 & (4) \\ RZ_{01} \sin \theta_{10} - RX_{01} \cos \theta_{10} + C_m = 0 & (5) \\ N_{01} + N_{21} = 0 & (6) \\ -X_{21} + X_{32} = 0 & (7) \\ Y_{32} = 0 & (8) \\ -Z_{21} + Z_{32} = 0 & (9) \\ -L_{21} + L_{32} + \lambda Z_{21} = 0 & (10) \\ M_{32} = 0 & (11) \\ -N_{21} - \lambda X_{21} = 0 & (12) \\ -X_{32} + X_{03} = 0 & (13) \\ -Y_{32} + Y_{03} = 0 & (14) \\ -Z_{32} + Z_{ext} = 0 & (15) \\ -L_{32} + L_{03} + hY_{03} + lZ_{ext} \cos \theta_{30} = 0 & (16) \\ -M_{32} + M_{03} - hX_{03} + lZ_{ext} \sin \theta_{30} = 0 & (17) \\ -lY_{03} \sin \theta_{30} - lX_{03} \cos \theta_{30} + N_{ext} = 0 & (18) \end{cases}$$

Avec (2) (8) et (14) : $Y_{01} = Y_{32} = Y_{03} = 0$

Avec (15) (9) et (3) : $Z_{32} = Z_{21} = -Z_{01} = Z_{ext}$

Avec (18) (13) (7) et (1) : $X_{03} = X_{32} = X_{21} = -X_{01} = \frac{N_{ext}}{l \cdot \cos \theta_{30}}$

Avec (11) et (17) : $M_{03} = h \cdot \frac{N_{ext}}{l \cdot \cos \theta_{30}} - l \cdot Z_{ext} \cdot \sin \theta_{30}$

Avec (12) et (6) : $N_{21} = -N_{01} = -\lambda \cdot \frac{N_{ext}}{l \cdot \cos \theta_{30}}$

Il reste 3 équations indépendantes à 4 inconnues :

$$\begin{cases} L_{01} + L_{21} = 0 & (4) \\ -L_{21} + L_{32} = -\lambda \cdot Z_{ext} & (10) \\ -L_{32} + L_{03} = -l \cdot Z_{ext} \cdot \cos \theta_{30} & (16) \end{cases}$$

Le mécanisme est donc **hyperstatique d'ordre 1**.

La dernière équation (5) non indépendante permet d'obtenir **le couple moteur en fonction des efforts extérieurs** :

$$C_m = R \cdot Z_{ext} \cdot \sin \theta_{10} - R \cdot \frac{N_{ext}}{l \cdot \cos \theta_{30}} \cdot \cos \theta_{10}$$

Comment rendre le malaxeur mélangeur isostatique ?

Il faut annuler un inter-efforts (L_{01} , L_{21} , L_{32} ou L_{03}). On ne change pas les liaisons d'entrée et de sortie, il reste 2 possibilités : $L_{21} = 0$ ou $L_{32} = 0$.

Première possibilité : $L_{21} = 0$

Le torseur de la liaison L12 devient $\{T(S_2 \rightarrow S_1)\}_B = \begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{21} & N_{21} \end{Bmatrix}_{B_0}$. Ce n'est pas une liaison connue.

Deuxième possibilité : $L_{32} = 0$

Le torseur de la liaison L32 devient $\{T(S_3 \rightarrow S_2)\}_C = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & M_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{B_0}$. Rotule de centre C.

En faisant ce changement, on fait apparaître **une mobilité interne** qui autorise la rotation de la bielle 2 autour de son propre axe (B, \vec{y}_0). Cette mobilité est inutile mais ne gêne pas le fonctionnement.

Inconnues d'inter-efforts	$I_S = \sum_{i=1}^L n_{Si} = 16$
Mobilités du mécanisme	$m_U = 1$ $m_I = 1$ $m_C = m_U + m_I = 2$
Rang statique	$r_S = 6(n-1) - m_C = 16$
Degré d'hyperstaticité	$h = I_S - r_S = 0$

Le malaxeur – mélangeur est maintenant **isostatique**. Tous les inter-efforts sont déterminés :

Avec (4) et (10) : $L_{21} = -L_{01} = \lambda \cdot Z_{ext}$

Avec (16) : $L_{03} = -l \cdot Z_{ext} \cdot \cos \theta_{30}$

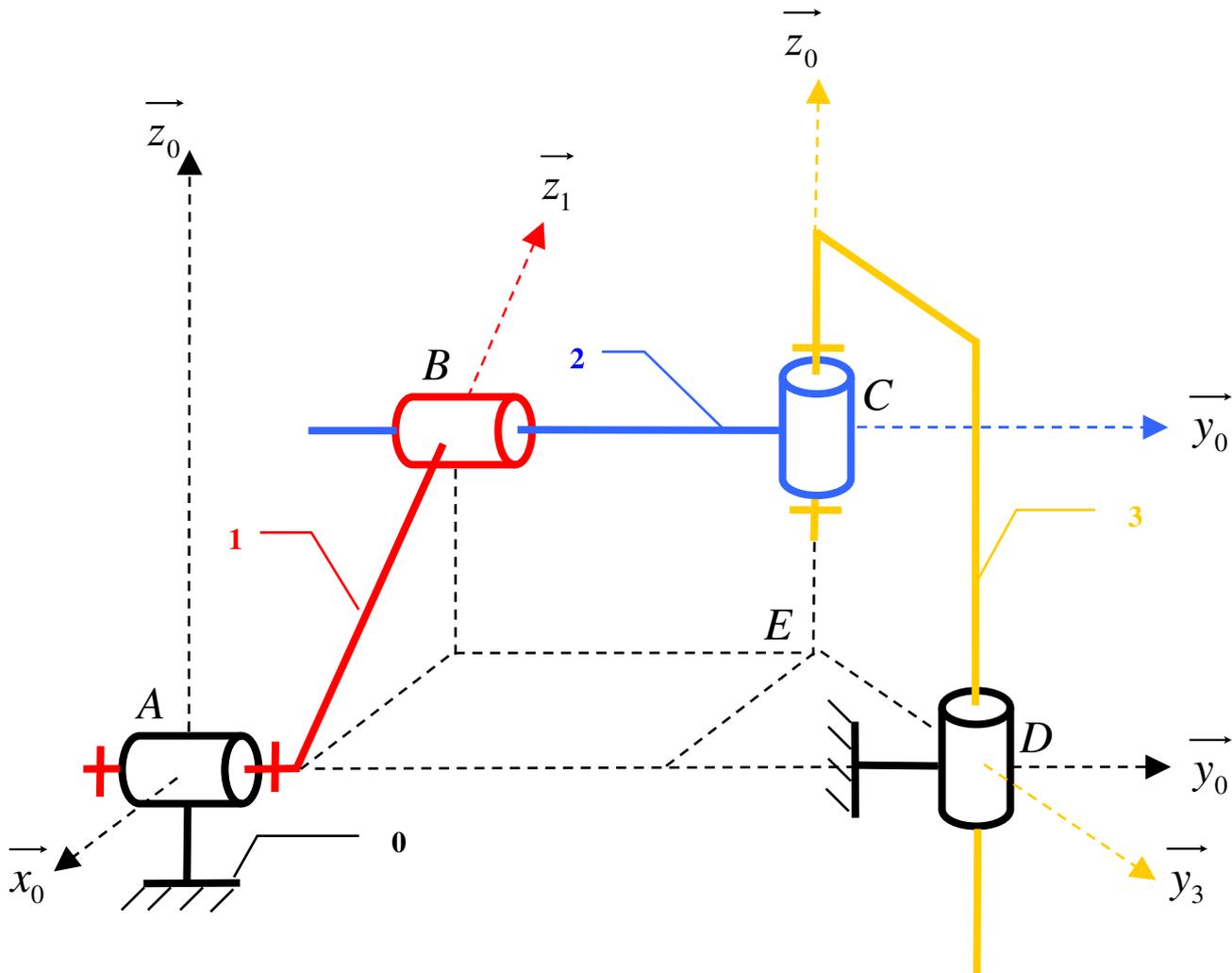
V. SYNTHÈSE

	STATIQUE	CINEMATIQUE
Nombre d'inconnues	$I_S = \sum_{i=1}^L i_{Si}$	$I_C = \sum_{i=1}^L i_{Ci}$
Nombre d'équations	$6.(n-1)$	$6.\gamma$
Rang	$r_S \leq 6.(n-1)$ $r_S = 6.(n-1) - m_C$	$r_C \leq 6.\gamma$
Degré d'Hyperstaticité / Mobilité	$h = I_S - r_S$	$m_C = I_C - r_C$
Formules de mobilité	$h = m_C - 6.(n-1) + I_S$	$h = m_C + 6.\gamma - I_C$

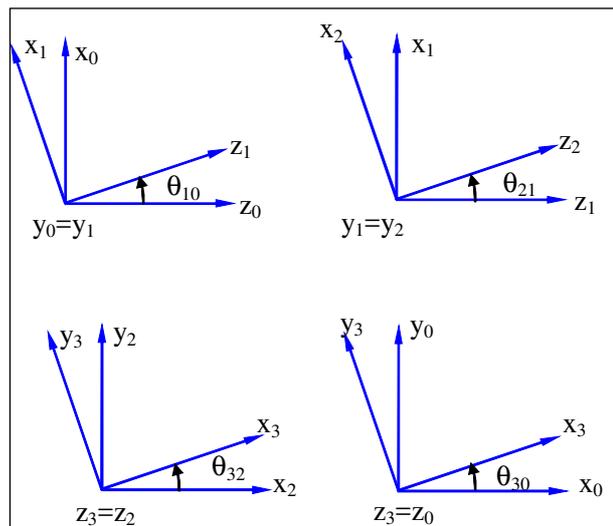
L : nombre de liaisons présentes dans le mécanisme

n : nombre de solides constituant le mécanisme bâti compris

MALAXEUR – MELANGEUR



Figures angulaires planes :



Paramétrage :

$$\overline{AB} = R \cdot \vec{z}_1 ; \overline{CB} = -\lambda \cdot \vec{y}_1 \text{ avec } \lambda > 0 ;$$

$$\overline{DA} = -d \cdot \vec{y}_0 ; \overline{CD} = l \cdot \vec{y}_3 - h \cdot \vec{z}_0 .$$