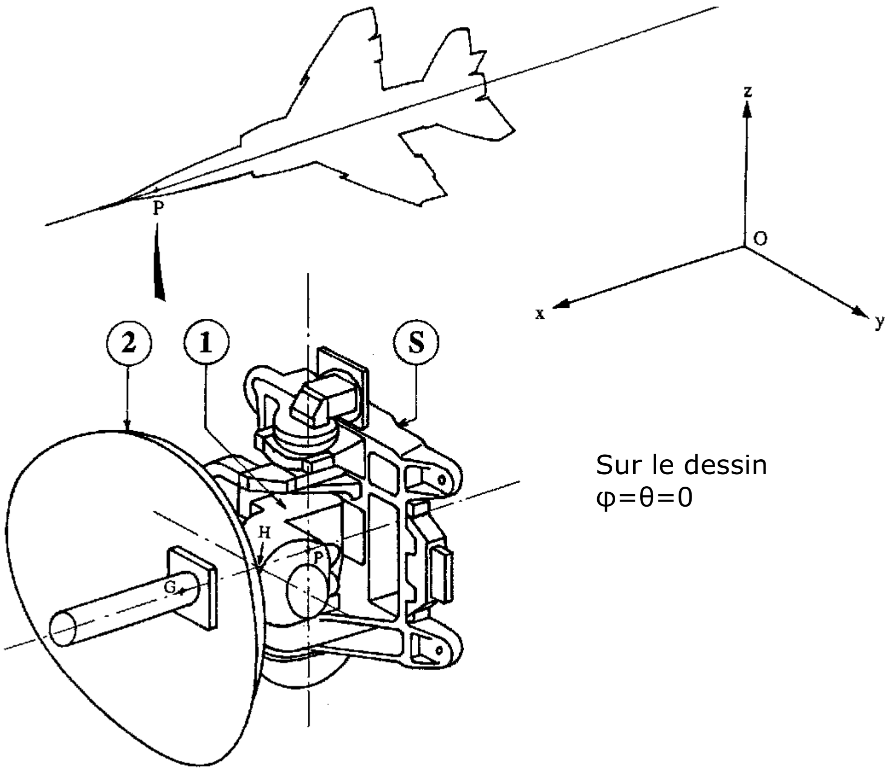
Exercice 10 : application à la notion de torseur sur système de radar embarqué

Le système Σ(1,2,S) est un radar mixte monté dans un nez d'avion.
Le repère R $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est lié à l'espace de référence. L'avion est en translation rectiligne dans cet espace. Le mouvement du repère $(\mathrm{P},\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ lié à la cellule de l'avion est connu.

$\vec{\mathrm{V}}_{(\mathrm{P,S/R})} = v(t).\vec{x}$, v étant une fonction connue, dérivable.



Sur le dessin
φ=θ=0

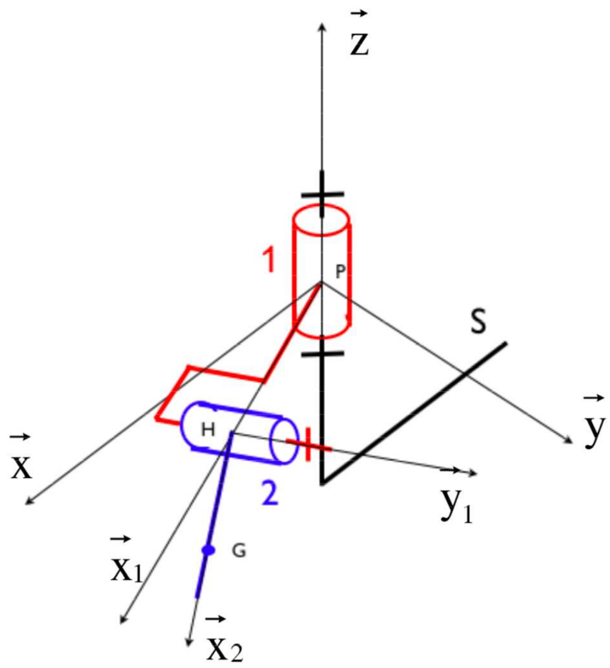
Paramétrage

La partie mobile du radar est schématisée par l'ensemble (1,2). Son orientation par rapport au support de fixation S, lié à la cellule de l'avion, est repérée par les deux paramètres α et β définis ci-dessous :

Solide1 : première sous unité de rotation.
Repère lié $(\mathrm{P},\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$. Mouvement (1/S) : rotation autour de $(\mathrm{P},\vec{z})$.
Position (1/S) repérée par $(\vec{x},\vec{x_1})$ = $(\vec{y},\vec{y_1})$ =φ (angle de gisement).

Solide 2 : seconde sous unité de rotation (qui porte l'antenne, ou réflecteur).
Repère lié $(\mathrm{H},\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z_2})$. $\overrightarrow{PH} = h\vec{x_1}$, h étant une constante positive.
Mouvement (2/1) : rotation autour de $(\mathrm{H},\vec{y_1})$. Position (2/1) repérée par $(\vec{z},\vec{z_2})$ = $(\vec{x_1},\vec{x_2})$ =θ (angle de site). $\overrightarrow{HG} = a\vec{x_2}$, a étant une constante.

Modélisation cinématique

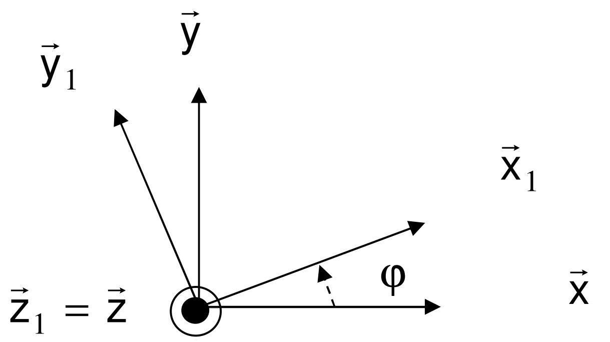


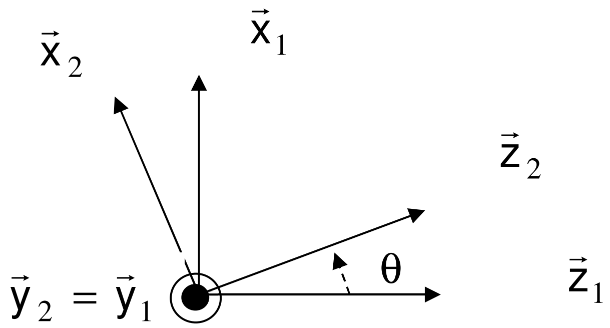
La figure ci contre représente le schéma cinématique de l'ensemble. D'après les données, on peut modéliser les liaisons suivantes entre les solides :

Liaison entre 1 et S : une seule rotation possible autour de l'axe $(P,\vec{z})$. On modélise cette liaison par une liaison pivot de centre P et d'axe $\vec{z}$.
Liaison entre 2 et 1 : une seule rotation possible autour de l'axe $(H,\overrightarrow{y_1})$. On modélise cette liaison par une liaison pivot de centre H et d'axe $\overrightarrow{y_1}$.

Travail demandé

1. *Tracer les figures planes de changement de bases.*





2. *Donner l'expression des vecteurs vitesses de rotation* $\vec{\Omega}_{2/1}, \vec{\Omega}_{1/S}, \vec{\Omega}_{S/R}, \vec{\Omega}_{2/S}$.

$$\vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta}\vec{y}_1$$
$$\vec{\Omega}_{1/S} = \dot{\varphi}\vec{z}$$
$$\vec{\Omega}_{S/R} = \vec{0}$$
$$\vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}\vec{y}_1 + \dot{\varphi}\vec{z}$$

3. *Donner l'expression de* $\overrightarrow{V_{H,2/1}}$ *et* $\overrightarrow{V_{P,1/S}}$.

H est le centre de rotation du mouvement 2/1 → $\vec{V}(H \in 2/1) = \vec{0}$

P est le centre de rotation du mouvement 1/S → $\vec{V}(P \in 1/S) = \vec{0}$

4. *Exprimer au point P, le torseur cinématique $\{V_{1/S}\}$ du mouvement de 1 par rapport à S.*

$$\{V_{1/S}\}=\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}_{1/S}=\dot{\varphi}\vec{z}\\ \vec{V}(P\in 1/S)=\vec{0}\end{Bmatrix}_P$$

5. *Déplacer ce torseur cinématique au point H.*

6. *Comparer $\overrightarrow{V_{H,2/S}}$ et $\overrightarrow{V_{H,1/S}}$. Expliquer votre raisonnement.*

$$\vec{V}(H\in 2/1)=\vec{0}=\vec{V}(H\in 2/S)-\vec{V}(H\in 1/S)$$
$$\rightarrow \vec{V}(H\in 2/S)=\vec{V}(H\in 1/S)$$

7. *Exprimer, au point H, le torseur cinématique $\{V_{2/S}\}$ du mouvement de 2 par rapport à S.*

$$\{V_{2/S}\}=\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}_{2/S}=\dot{\theta}\vec{y}_1+\dot{\varphi}\vec{z}\\ \vec{V}(H\in 2/S)=\vec{V}(H\in 1/S)\end{Bmatrix}_H$$
$$=\begin{Bmatrix}\dot{\theta}\vec{y}_1+\dot{\varphi}\vec{z}\\ h\dot{\varphi}\vec{y}_1\end{Bmatrix}_H$$

8. *Déplacer ce torseur cinématique au point G.*

$$\{V_{2/S}\}=\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}_{2/S}=\dot{\theta}\vec{y}_1+\dot{\varphi}\vec{z}_1\\ \vec{V}(G\in 2/S)\end{Bmatrix}_G$$
$$=\begin{Bmatrix}\dot{\theta}\vec{y}_1+\dot{\varphi}\vec{z}_1\\ \vec{V}(G\in 2/S)=\vec{V}(H\in 2/S)+\overrightarrow{GH}\wedge\vec{\Omega}_{2/S}\end{Bmatrix}_G$$
$$=\begin{Bmatrix}\dot{\theta}\vec{y}_1+\dot{\varphi}\vec{z}_1\\ \vec{V}(G\in 2/S)=h\dot{\varphi}\vec{y}_1+\left(-a\vec{x}_2\right)\wedge\left(\dot{\theta}\vec{y}_1+\dot{\varphi}\vec{z}_1\right)\end{Bmatrix}_G$$

$$=\begin{Bmatrix}\dot{\theta}\vec{y}_1+\dot{\varphi}\vec{z}_1\\ \vec{V}(G\in 2/S)=h\dot{\varphi}\vec{y}_1-a\vec{x}_2\wedge\dot{\theta}\vec{y}_1-a\vec{x}_2\wedge\dot{\varphi}\vec{z}_1\end{Bmatrix}_G$$
$$=\begin{Bmatrix}\dot{\theta}\vec{y}_1+\dot{\varphi}\vec{z}_1\\ \vec{V}(G\in 2/S)=h\dot{\varphi}\vec{y}_1-a\vec{x}_2\wedge\dot{\theta}\vec{y}_2+a\dot{\varphi}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\vec{y}_1\end{Bmatrix}_G$$
$$=\begin{Bmatrix}\dot{\theta}\vec{y}_1+\dot{\varphi}\vec{z}_1\\ \vec{V}(G\in 2/S)=h\dot{\varphi}\vec{y}_1-a\dot{\theta}\vec{z}_2+a\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{y}_1\end{Bmatrix}_G$$

$$\vec{V}(G\in 2/S)=-a\dot{\theta}\vec{z}_2+\dot{\varphi}\left(h+a\cos\theta\right)\vec{y}_1$$

NB :
$$\vec{V}(G\in 2/R)=-a\dot{\theta}\vec{z}_2+\dot{\varphi}\left(h+a\cos\theta\right)\vec{y}_1=\vec{V}(G\in 2/S)+\vec{V}(G\in S/R)=-a\dot{\theta}\vec{z}_2+\dot{\varphi}\left(h+a\cos\theta\right)\vec{y}_1+v(t).\vec{x}$$

Méthode formule de Boor (plus rapide):

$$\vec{V}(G\in 2/S)=\left(\frac{d\left(h\vec{x}_1+a\vec{x}_2\right)}{dt}\right)_S=h\left(\frac{d\left(\vec{x}_1\right)}{dt}\right)_S+a\left(\frac{d\left(\vec{x}_2\right)}{dt}\right)_S$$
$$=h\left(\left(\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_1+\vec{\Omega}_{1/S}\wedge\vec{x}_1\right)+a\left(\left(\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right)_2+\vec{\Omega}_{2/S}\wedge\vec{x}_2\right)$$
$$=h\dot{\varphi}\vec{z}\wedge\vec{x}_1+a\left(\dot{\theta}\vec{y}_1+\dot{\varphi}\vec{z}_1\right)\wedge\vec{x}_2$$
$$=h\dot{\varphi}\vec{y}_1-a\dot{\theta}\vec{z}_2+a\dot{\varphi}\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)\vec{y}_1$$
$$=\left(h\dot{\varphi}+a\dot{\varphi}\cos\theta\right)\vec{y}_1-a\dot{\theta}\vec{z}_2$$

9. Calculer $\overrightarrow{\Gamma_{G,2/R}}$ *. Identifier les différents termes que vous obtenez.*

Attention, tous les résultats doivent être exprimés le plus simplement possible. Pas de projections inutiles !

$$\vec{V}(G\in 2/R)=\vec{V}(G\in 2/S)+\vec{V}(G\in S/R)=\left(h\dot{\varphi}+a\dot{\varphi}\cos\theta\right)\vec{y}_1-a\dot{\theta}\vec{z}_2+v(t)\vec{x}$$
$$\vec{\Gamma}(G\in 2/R)=\frac{d\left(\left(h\dot{\varphi}+a\dot{\varphi}\cos\theta\right)\vec{y}_1-a\dot{\theta}\vec{z}_2\right)}{dt}+\dot{v}(t)\vec{x}$$
$$\vec{\Gamma}(G\in 2/S)=\left(\frac{d\left(\vec{V}(G\in 2/S)\right)}{dt}\right)_S=\left(\frac{d\left(-a\dot{\theta}\vec{z}_2+\dot{\varphi}\left(h+a\cos\theta\right)\vec{y}_1\right)}{dt}\right)_S$$

Calculs intermédiaires :

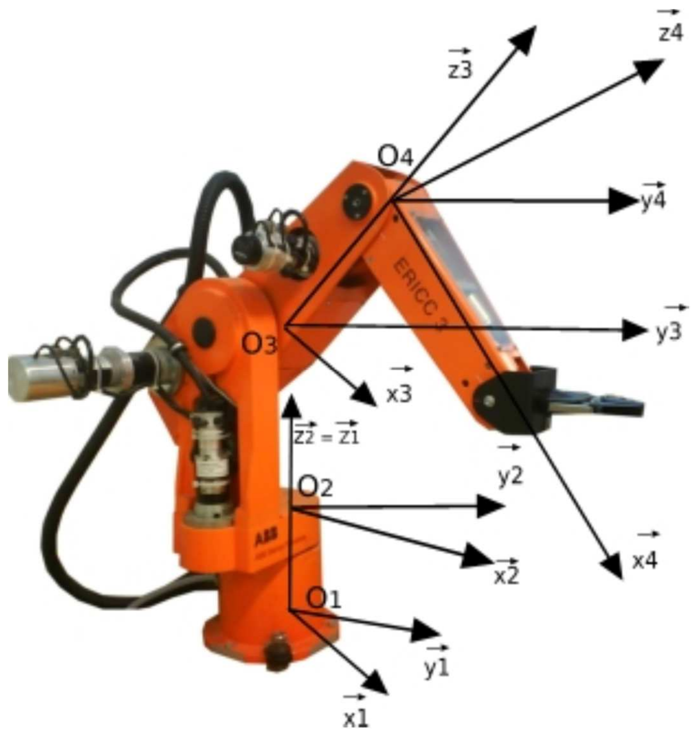
$$\left(\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right)_S=\left(\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right)_2+\vec{\Omega}_{2/S}\wedge\vec{z}_2=\vec{0}+\left(\dot{\theta}\vec{y}_1+\dot{\varphi}\vec{z}_1\right)\wedge\vec{z}_2$$
$$=\dot{\theta}\vec{y}_1\wedge\vec{z}_2+\dot{\varphi}\vec{z}_1\wedge\vec{z}_2=\dot{\theta}\vec{y}_2\wedge\vec{z}_2+\dot{\varphi}\vec{z}_1\wedge\vec{z}_2$$
$$=\dot{\theta}\vec{x}_2+\dot{\varphi}\sin\theta\vec{y}_1$$

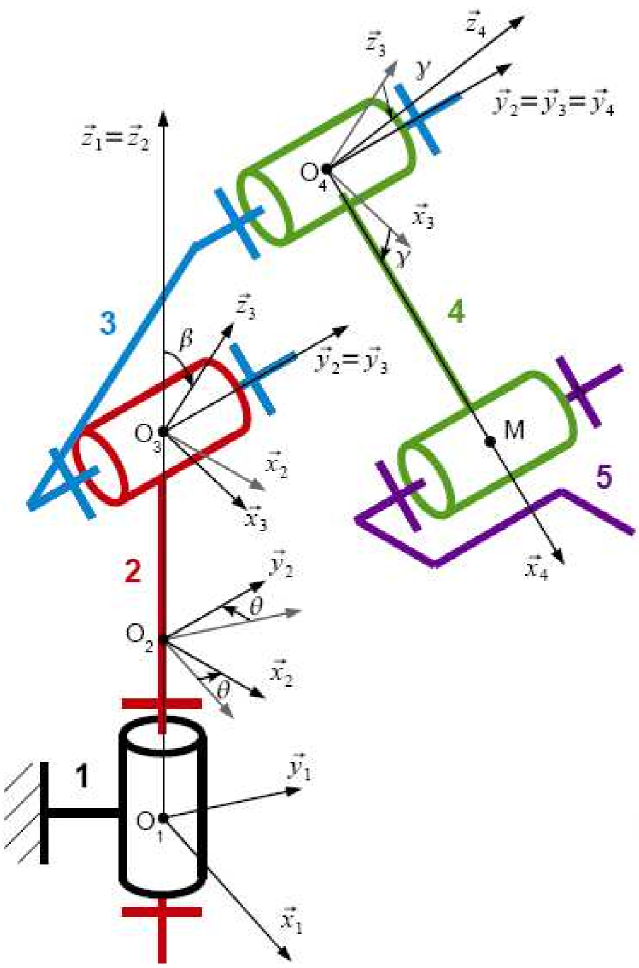
$$\left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_S=\left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_1+\vec{\Omega}_{1/S}\wedge\vec{y}_1=\vec{0}+\dot{\varphi}\vec{z}\wedge\vec{y}_1=-\dot{\varphi}\vec{x}_1$$

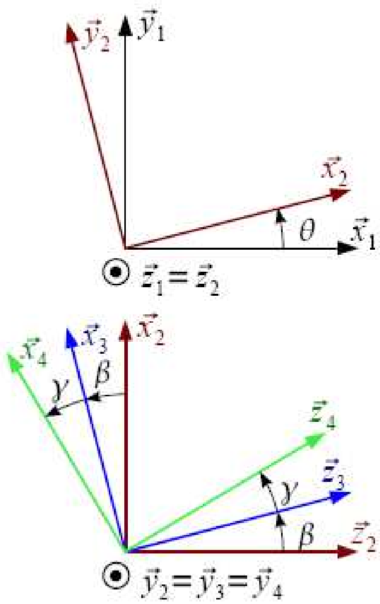
$$\vec{\Gamma}(G\in 2/S)=\left(\frac{d\left(\vec{V}(G\in 2/S)\right)}{dt}\right)_S=\left(\frac{d\left(-a\dot{\theta}\vec{z}_2+\dot{\varphi}\left(h+a\cos\theta\right)\vec{y}_1\right)}{dt}\right)_S$$
$$=\left(\frac{d\left(-a\dot{\theta}\vec{z}_2\right)}{dt}\right)_S+\left(\frac{d\left(\dot{\varphi}\left(h+a\cos\theta\right)\vec{y}_1\right)}{dt}\right)_S$$
$$=\left(\frac{d\left(-a\dot{\theta}\right)}{dt}\right)\vec{z}_2-a\dot{\theta}\left(\frac{d\left(\vec{z}_2\right)}{dt}\right)_S+\left(\frac{d\left(\dot{\varphi}\left(h+a\cos\theta\right)\right)}{dt}\right)\vec{y}_1+\left(\dot{\varphi}\left(h+a\cos\theta\right)\right)\left(\frac{d\left(\vec{y}_1\right)}{dt}\right)_S$$
$$=-a\ddot{\theta}\vec{z}_2-a\dot{\theta}\left(\dot{\theta}\vec{x}_2+\dot{\varphi}\sin\theta\vec{y}_1\right)+\ddot{\varphi}\left(h+a\cos\theta\right)\vec{y}_1-\dot{\varphi}\dot{\theta}a\sin\theta\vec{y}_1-\dot{\varphi}^2\left(h+a\cos\theta\right)\vec{x}_1$$

Exercice 11 : application à la notion de torseur → bras de robot

Le robot « Ericc3 » ci-contre est un robot industriel servant à la manutention de pièces sur des postes d'assemblages. Il est composé d'un socle **(1)** fixe par rapport au sol et lié à un repère R_1 de centre 0_1. La chaise **(2)**, liée à un repère R_2 de centre 0_2 est en rotation d'axe $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$ par rapport à **(1)**. Un bras **(3)**, lié à un repère R_3 de centre O_3 est en rotation d'axe $\vec{y}_2 = \vec{y}_3$ par rapport à **(2)**. Un avant-bras **(4)**, lié à un repère R_4 de centre O_4 est en rotation d'axe $\vec{y}_4 = \vec{y}_3$ par rapport à **(3)**. À l'extrémité de l'avant-bras **(4)** se trouve le poignet **(5)** mobile par rapport à **(4)**. En rotation par rapport à **(5)** se trouve la pince qui constitue l'extrémité du bras robot. Nous ne nous intéresserons ici qu'aux pièces **(1)** à **(4)**.







On pose : $\overrightarrow{O_1O_2}=a\,\vec{z}_1$, $\overrightarrow{O_2O_3}=b\,\vec{z}_2$, $\overrightarrow{O_3O_4}=c\,\vec{z}_3$.

1. *Décrire les mouvements et les trajectoires des points O_2∈2, O_3 ∈2, O_4 ∈3 et O_4 ∈4 , dans leur mouvement par rapport à (**1**)*

La trajectoire de O2 appartenant à 2 dans son mouvement par rapport à 1 est lui-même.

O2 est fixe et appartient à l'axe de rotation du mouvement de 2 à 1. Même chose pour O3.

La trajectoire de O4 appartenant à 4 ou 3 dans son mouvement par rapport à 1 est située sur une sphère de centre de rayon c et de centre O3.

2. *Exprimer le torseur cinématique du mouvement de (**2**) par rapport à (**1**) en O_2*

O2 est fixe et appartient à l'axe de rotation du mouvement de 2 à 1.

$$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta}\vec{z}_1 \\ \vec{V}(O_2 \in 2/1) = \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_2}$$

3. *Déplacer le torseur cinématique du mouvement de (**2**) par rapport à (**1**) en O_3*

$$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta}\vec{z}_1 \\ \vec{V}(O_3 \in 2/1) = \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_3}$$

$$\vec{V}(O_3 \in 2/1) = \vec{V}(O_2 \in 2/1) + \overrightarrow{O_3O_2} \wedge \vec{\Omega}_{2/1}$$

4. *Exprimer le torseur cinématique du mouvement de (**3**) par rapport à (**1**) en O_3*

$\{V_{3/1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{3/1} = \dot{\theta}\vec{z}_1 + \dot{\beta}\vec{y}_2 \\ \vec{V}(O_3 \in 3/1) = \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_3}$ *car* $\vec{V}(O_3 \in 3/1) = \underbrace{\vec{V}(O_3 \in 3/2)}_{\vec{0}} + \vec{V}(O_3 \in 2/1)$ avec O3 centre de rotation du mouvement 3/2.

5. *Déplacer le torseur cinématique du mouvement de (**3**) par rapport à (**1**) en O_4*

$$\{V_{3/1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{3/1} = \dot{\theta}\vec{z}_1 + \dot{\beta}\vec{y}_2 \\ \vec{V}(O_4 \in 3/1) = c\dot{\theta}\sin\beta\vec{y}_2 + c\dot{\beta}\vec{x}_3 \end{Bmatrix}_{O_4}$$

$$\vec{V}(O_4 \in 3/1) = \vec{V}(O_3 \in 3/1) + \overrightarrow{O_4O_3} \wedge \vec{\Omega}_{3/1}$$

6. *Exprimer les torseurs cinématiques du mouvement de (**4**) par rapport à (**1**) en O_4 et en un point M de R_4 tel que $\overrightarrow{O_4M} = d.\vec{x}_4$.*

$\{V_{4/1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{4/1} = \dot{\theta}\vec{z}_1 + \left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right)\vec{y}_2 \\ \vec{V}(O_4 \in 4/1) = c\dot{\theta}\sin\beta\vec{y}_2 + c\dot{\beta}\vec{x}_3 \end{Bmatrix}_{O_4}$ *car* $\vec{V}(O_4 \in 4/1) = \underbrace{\vec{V}(O_4 \in 4/3)}_{\vec{0}} + \vec{V}(O_4 \in 3/1)$ avec O4 centre de rotation du mouvement 4/ 3.

$$\{V_{4/1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{4/1} = \dot{\theta}\vec{z}_1 + \left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right)\vec{y}_2 \\ \vec{V}(M \in 4/1) = \left(c\sin\beta + d\cos\left(\beta+\gamma\right)\right)\dot{\theta}\vec{y}_2 + c\dot{\beta}\vec{x}_3 - d\left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right)\vec{z}_4 \end{Bmatrix}_{M}$$

$$\vec{V}(M \in 4/1) = \vec{V}(O_4 \in 4/1) + \overrightarrow{MO_4} \wedge \vec{\Omega}_{4/1}$$

NB : méthode formule de Boor pour

$$\vec{V}(M \in 4/1) = \left(\frac{d(\overrightarrow{O_1M})}{dt}\right)_1 = \left(\frac{d\left(\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3O_4} + \overrightarrow{O_4M}\right)}{dt}\right)_1$$

$$= \left(\frac{d\left(a\vec{z}_1 + b\vec{z}_2 + c\vec{z}_3 + d\vec{x}_4\right)}{dt}\right)_1$$

$$= b\left(\frac{d\left(\vec{z}_2\right)}{dt}\right)_1 + c\left(\frac{d\left(\vec{z}_3\right)}{dt}\right)_1 + d\left(\frac{d\left(\vec{x}_4\right)}{dt}\right)_1$$

$$= b\left(\frac{d\left(\vec{z}_2\right)}{dt}\right)_2 + b\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{z}_2 + c\left(\frac{d\left(\vec{z}_3\right)}{dt}\right)_3 + c\vec{\Omega}_{3/1} \wedge \vec{z}_3 + d\left(\frac{d\left(\vec{x}_4\right)}{dt}\right)_4 + d\vec{\Omega}_{4/1} \wedge \vec{x}_4$$

$$= b\dot{\theta}\vec{z}_1 \wedge \vec{z}_2 + c\left(\dot{\theta}\vec{z}_1 + \dot{\beta}\vec{y}_2\right) \wedge \vec{z}_3 + d\left(\dot{\theta}\vec{z}_1 + \left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right)\vec{y}_2\right) \wedge \vec{x}_4$$

$$= \vec{0} + c\dot{\theta}\sin\beta\vec{y}_2 + c\dot{\beta}\vec{x}_3 + d\dot{\theta}\sin\left(\beta+\gamma+\frac{\pi}{2}\right)\vec{y}_2 - d\left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right)\vec{z}_4$$

$$= \left(c\sin\beta + d\cos\left(\beta+\gamma\right)\right)\dot{\theta}\vec{y}_2 + c\dot{\beta}\vec{x}_3 - d\left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right)\vec{z}_4$$

7. *Calculer les vecteurs accélérations* $\vec{\Gamma}_{O_3\in 3/1}, \vec{\Gamma}_{O_4\in 4/1}$ *et* $\vec{\Gamma}_{M\in 5/1}$.

$$\vec{\Gamma}_{O_3\in 3/1} = \left(\frac{d\overrightarrow{V_{O_3\in 3/1}}}{dt}\right)_1 = \vec{0}$$

$$\vec{\Gamma}_{O_4\in 4/1} = \left(\frac{d\overrightarrow{V_{O_4\in 4/1}}}{dt}\right)_1 = \left(\frac{d\left(c\dot{\theta}\sin\beta\vec{y}_2 + c\vec{x}_3\right)}{dt}\right)_1 = \ldots =$$

$$= c\left(\ddot{\theta}\sin\beta + 2\dot{\beta}\dot{\theta}\cos\beta\right)\vec{y}_2 - c\dot{\theta}^2\sin\beta\vec{x}_2 + c\ddot{\beta}\vec{x}_3 - c\dot{\beta}^2\vec{z}_3$$

$$\vec{V}(M\in 5/1) = \vec{V}(M\in 4/1)$$

$$\vec{\Gamma}_{M\in 4/1} = \left(\frac{d\overrightarrow{V_{M\in 4/1}}}{dt}\right)_1 = \left(\frac{d\left(\left(c\sin\beta + d\cos(\beta+\gamma)\right)\dot{\theta}\vec{y}_2 + c\dot{\beta}\vec{x}_3 - d\left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right)\vec{z}_4\right)}{dt}\right)_{=1} = \ldots =$$

$$= \left(c\sin\beta + d\cos(\beta+\gamma)\right)\ddot{\theta}\vec{y}_2 + \left(c\dot{\beta}\cos\beta - d\left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right)\sin(\beta+\gamma)\right)\dot{\theta}\vec{y}_2 + \left(c\sin\beta + d\cos(\beta+\gamma)\right)\dot{\theta}\left(\frac{d\vec{y}_2}{dt}\right)_1 + c\ddot{\beta}\vec{x}_3$$

$$+ c\dot{\beta}\left(\frac{d\vec{x}_3}{dt}\right)_1 - d\left(\ddot{\beta}+\ddot{\gamma}\right)\vec{z}_4 - d\left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right)\left(\frac{d\vec{z}_4}{dt}\right)_1$$

$$= \left(c\sin\beta + d\cos(\beta+\gamma)\right)\ddot{\theta}\vec{y}_2 + \left(c\dot{\beta}\cos\beta - d\left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right)\sin(\beta+\gamma)\right)\dot{\theta}\vec{y}_2 - \left(c\sin\beta + d\cos(\beta+\gamma)\right)\dot{\theta}\vec{x}_2 + c\ddot{\beta}\vec{x}_3$$

$$+ c\dot{\beta}\left(\frac{d\vec{x}_3}{dt}\right)_1 - d\left(\ddot{\beta}+\ddot{\gamma}\right)\vec{z}_4 - d\left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right)\left(\frac{d\vec{z}_4}{dt}\right)_1$$

$$= \ldots\ldots$$

avec

$$\left(\frac{d\vec{x}_3}{dt}\right)_1 = \left(\frac{d\left(\vec{x}_3\right)}{dt}\right)_3 + \vec{\Omega}_{3/1}\wedge\vec{x}_3 = c\left(\dot{\theta}\vec{z}_1 + \dot{\beta}\vec{y}_2\right)\wedge\vec{x}_3$$

$$\left(\frac{d\vec{z}_4}{dt}\right)_1 = \left(\frac{d\left(\vec{z}_4\right)}{dt}\right)_4 + \vec{\Omega}_{4/1}\wedge\vec{z}_4 = d\left(\dot{\theta}\vec{z}_1 + \left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right)\vec{y}_2\right)\wedge\vec{z}_4$$