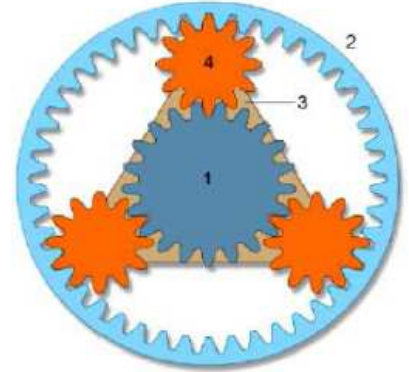


ROBUROC 6 : PLATE-FORME D'EXPLORATION TOUT TERRAIN

I - CULTURE TECHNOLOGIQUE ET CONNAISSANCE DES LOIS DE COMPORTEMENT DES COMPOSANTS DE BASE

Q1 : Train épicycloïdaux

On donne le train épicycloïdal plan de type I suivant :
 $Z_1 = 21$; $Z_2 = 45$; $Z_4 = 12$.
 On étudie le fonctionnement avec planétaire extérieur 2 bloqué par rapport au bâti 0 : $\omega_{2/0} = 0$. On impose au planétaire intérieur 1 une vitesse constante $\omega_{1/0}$ et la sortie du mécanisme est la vitesse du porte-satellite.



Question 1 : En considérant l'engrènement de 1 et 4 (en prenant le porte-satellite comme référence des vitesses), écrire le rapport $\frac{\omega_{4/3}}{\omega_{1/3}}$ en fonction de Z_1 et Z_4 .

Question 2 : En considérant l'engrènement de 2 et 4 (en prenant le porte-satellite comme référence des vitesses), écrire le rapport $\frac{\omega_{4/3}}{\omega_{2/3}}$ en fonction de Z_2 et Z_4 .

Question 3 : En utilisant le fait que $\omega_{2/0} = 0$, trouver le rapport de réduction du réducteur en fonction des nombres de dents : $R_1 = \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$

Question 4 : Reprendre le problème dans le cas où le planétaire intérieur est bloqué et la vitesse de sortie est celle du planétaire extérieur 2.

Réponse 1 : $\frac{\omega_{4/3}}{\omega_{1/3}} = -\frac{Z_1}{Z_4}$

Réponse 2 : $\frac{\omega_{4/3}}{\omega_{2/3}} = \frac{Z_2}{Z_4}$

Réponse 3 : $\omega_{2/0} = 0$

$$R_1 = \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = ?$$

$$\frac{\omega_{2/3}}{\omega_{1/3}} = -\frac{Z_1}{Z_2} \Leftrightarrow \frac{\omega_{2/0} + \omega_{0/3}}{\omega_{1/0} + \omega_{0/3}} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

$$\frac{\omega_{0/3}}{\omega_{1/0} + \omega_{0/3}} = -\frac{Z_1}{Z_2} \Leftrightarrow \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Réponse 4 : $\omega_{1/0} = 0$

$$R_2 = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{3/0}} = ?$$

$$\frac{\omega_{2/3}}{\omega_{1/3}} = -\frac{Z_1}{Z_2} \Leftrightarrow \frac{\omega_{2/0} + \omega_{0/3}}{\omega_{1/0} + \omega_{0/3}} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

$$\frac{\omega_{2/0} + \omega_{0/3}}{\omega_{0/3}} = -\frac{Z_1}{Z_2} \Leftrightarrow \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{3/0}} = \frac{Z_2 + Z_1}{Z_2}$$

I-1 Asservir les déplacements de la plate-forme**Q2 :** Calcul du gain du générateur de consigne, du rapport cinématique et du convertisseur

- Rapport cinématique :

Le roulement sans glissement des roues motrices sur le sol permet d'écrire : $V(t) = R \Omega_{\text{roue}}(t)$, soit en prenant en compte le rapport de transmission du réducteur : $V(t) = k R \Omega_{\text{roue}}(t)$. D'où :

$$\boxed{K_R = k R} \quad \text{A.N. : } K_R = 9.10^{-3} \text{ m/rad}$$

- Convertisseur :

Le convertisseur reçoit en entrée une vitesse de rotation moteur de consigne ; il en fournit une image (sous forme d'une tension électrique) qui est comparée à celle fournie par le capteur tachymétrique associé à l'arbre moteur ; son gain doit donc être le même que celui du capteur :

$$\boxed{K_{\text{conv}} = K_{\text{capt}}} \quad \text{A.N. : } K_{\text{conv}} = 5.10^{-3} \text{ V/(rad.s}^{-1}\text{)}$$

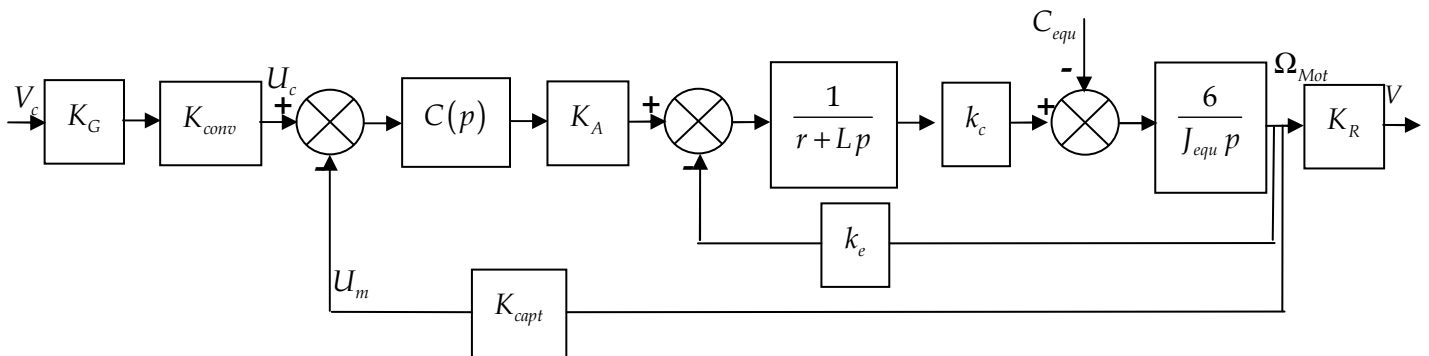
- Générateur de consigne

Dans cette chaîne fonctionnelle, le rapport entre la vitesse de rotation de l'axe moteur et la vitesse d'avancée du robot est le rapport cinématique K_R ; dans le cas où la vitesse réelle de la plate-forme est égale à la vitesse de consigne, on obtiendra un écart $\varepsilon(t)$ nul si le générateur de consigne a pour gain l'inverse du rapport cinématique :

$$\boxed{K_G = \frac{1}{k R}} \quad \text{A.N. : } K_G = 111 \text{ rad/m}$$

Q3 : Schéma-bloc fonctionnel

Les conditions initiales des fonctions et de leurs dérivées étant nulles, on peut leur appliquer directement la transformée de Laplace, ce qui conduit aux fonctions de transfert reportées dans le schéma-blocs ci-dessous :

a. **Etude des performances sans correction** $C(p) = 1$ **Q4 :** Stabilité théorique

La fonction de transfert en boucle ouverte est : $H_{bo}(p) = K_{\text{capt}} C(p) K_A H_u(p)$, soit encore

$$H_{bo}(p) = \frac{K_{\text{capt}} K_A K_u}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} ; \text{ cette fonction est celle d'un système fondamental du second ordre.}$$

La fonction de transfert en boucle fermée est alors $H_{bf}(p) = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)}$, soit encore

$H_{bf}(p) = \frac{K_{capt} K_A K_U}{K_{capt} K_A K_U + (T_1 + T_2)p + T_1 T_2 p^2}$, fonction d'un système fondamental du second ordre, théoriquement stable.

L'examen du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte, fourni page 12 du document réponses, confirme cette analyse :

- Le gain est toujours négatif : la marge de phase est infinie
- La phase est toujours supérieure à -180 degrés : la marge de gain est infinie.

Q5 : Précision du système

- Erreur statique en poursuite ε_V après un échelon de vitesse d'amplitude V_{C0} :

On la détermine par le théorème de la valeur finale : $\frac{V_{C0}}{p}$ étant la transformée de Laplace de

l'échelon de consigne en vitesse, $\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V_{C0}}{p} \underbrace{\left(1 - H_{bf}(p)\right)}_{\frac{1}{1 + H_{bo}(p)}}$; soit encore :

$$\varepsilon_V = \lim_{p \rightarrow 0} V_{C0} \frac{1}{1 + \frac{K_{capt} K_A K_U}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}}$$

On obtient une erreur en régime établi sur la vitesse $\varepsilon_V = \frac{V_{C0}}{1 + K_{capt} K_A K_U}$, non nulle, qui ne convient donc pas par rapport au cahier des charges.

Remarque : On retrouve le résultat vu en cours qui est que l'erreur en régime établi sous une consigne en échelon d'amplitude V_{C0} d'un système de classe 0 est $\frac{V_{C0}}{1 + K_{bo}}$, où K_{bo} est le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte (ici, $K_{bo} = K_{capt} K_A K_U$).

- Erreur statique en régulation ε_C après un échelon de couple C_0 :

On la détermine par le théorème de la valeur finale : $\frac{C_0}{p}$ étant la transformée de Laplace de

l'échelon de consigne en vitesse, $\varepsilon_C = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{C_0}{p} H_{reg}(p)$, où $H_{reg}(p) = \frac{V(p)}{C_{equ}(p)}$ est la fonction de transfert du système en régulation.

$$H_{reg}(p) = H_C(p) \frac{\frac{1}{K_G}}{1 + \frac{K_{capt} K_A K_U}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}} ; H_{reg}(p) = \frac{\frac{K_C}{K_G} \left(1 + \frac{L}{r} p\right)}{K_{capt} K_A K_U + (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$$

$$\varepsilon_C = \lim_{p \rightarrow 0} C_0 \frac{\frac{K_C}{K_G} \left(1 + \frac{L}{r} p\right)}{K_{capt} K_A K_U + (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$$

On obtient une erreur en régime établi sur la vitesse $\varepsilon_c = \frac{K_c C_0}{K_G (1 + K_{capt} K_A K_U)}$, non nulle, qui ne convient donc pas par rapport au cahier des charges.

b. **Etude des performances avec correcteur** $C(p) = \frac{K_I}{p}$

Q6 : Influence du correcteur $C(p) = \frac{K_I}{p}$

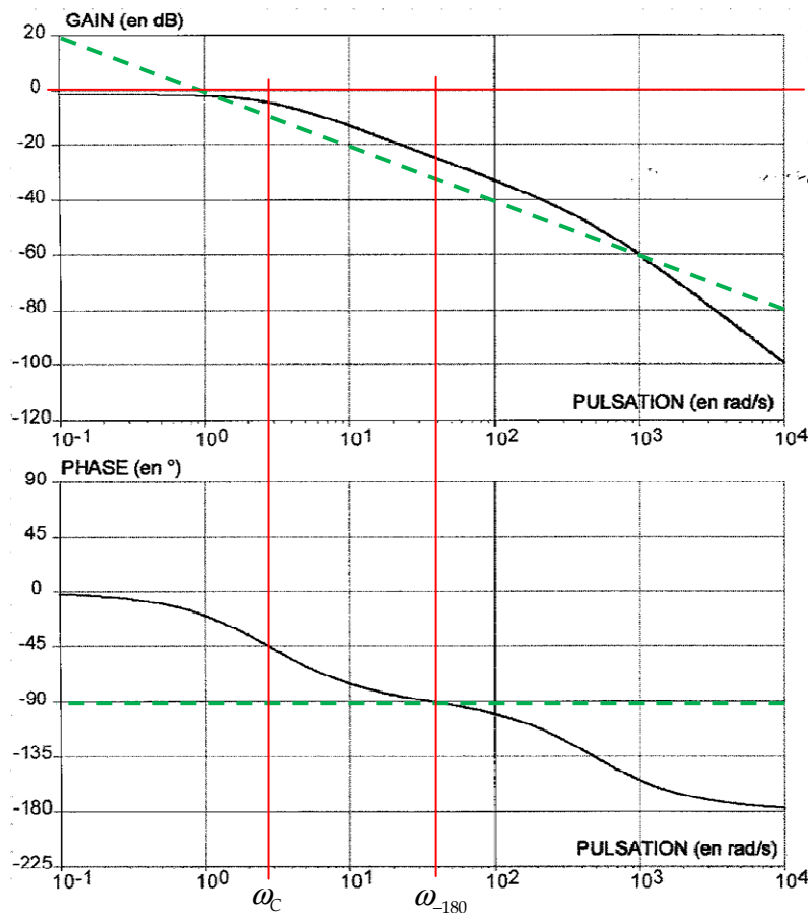
$C(p) = \frac{K_I}{p}$ est un correcteur proportionnel intégral pur. Son rôle est d'annuler les erreurs statiques (calculées Q19) en poursuite et en régulation (puisque le correcteur est en amont de la perturbation).

Un tel correcteur, par le déphasage constant de -90 degrés en fonction de la pulsation, est déstabilisant : les marges de stabilité sont à vérifier. Il peut aussi ralentir le système, en prolongeant la durée du régime transitoire (indiquée par le temps de réponse à 5 %).

Q7 : Réglage du correcteur $C(p) = \frac{K_I}{p}$

Le tracé du diagramme de Bode du correcteur ($K_I = 1$) est superposé (en traits interrompus courts) au diagramme de Bode du système non corrigé sur la figure ci-après :

- La courbe de gain est une droite de pente -20 dB/décade, passant par le point de coordonnées (1 ; 0).
- La courbe de phase est une droite d'équation : $\text{PHASE}(\text{en } ^\circ) = -90$



On se propose maintenant de déterminer le gain K_I du correcteur assurant les marges de stabilité demandées par le cahier des charges, à savoir : $MG \geq 6$ dB et $M\phi \geq 45$ degrés.

- Le diagramme de Bode du système corrigé s'obtient en additionnant celui du système non corrigé et celui de l'intégrateur. Le système corrigé présente alors un déphasage de -135 degrés à la pulsation $\omega_c \cong 2,7$ rad.s⁻¹. Pour que la marge de phase soit supérieure à 45 degrés, il faut que l'inéquation suivante soit vérifiée :

$$\underbrace{G_{NC}(\omega_c)}_{\text{gain du système non corrigé}} + \underbrace{G_I(\omega_c)}_{\text{gain de l'intégrateur pur}} + 20\log(K_I) = 0$$

$$\text{Soit : } 20\log(K_I) = -\underbrace{G_{NC}(\omega_c)}_{-5} - \underbrace{G_I(\omega_c)}_{-20\log(2,7)} ; \text{ on obtient } K_I = 4,8$$

- Vérifions si $K_I = 4,8$ est un réglage qui satisfait aussi la marge de gain ; cette dernière se détermine par l'équation :

$$\underbrace{G_{NC}(\omega_{-180})}_{\text{gain du système non corrigé}} + \underbrace{G_I(\omega_{-180})}_{\text{gain de l'intégrateur pur}} + 20\log\left(\underbrace{K_{I \text{ maxi}}}_{4,8}\right) + MG = 0$$

où ω_{-180} est la pulsation pour laquelle le système corrigé présente un déphasage de -180 degrés ; en l'occurrence, $\omega_{-180} \cong 40$ rad.s⁻¹.

On obtient une marge de gain $MG = -\underbrace{G_{NC}(\omega_{-180})}_{-23,6} - \underbrace{G_I(\omega_{-180})}_{-30} - \underbrace{20\log(K_{I \text{ maxi}})}_{+13,6}$, soit $MG = 40$ dB, valeur supérieure aux 6 dB attendus par le cahier des charges.

En conclusion, le correcteur $C(p) = \frac{4,8}{p}$ satisfait les critères de stabilité du cahier des charges.

Avec une calculatrice TI :

$$\frac{K_{cap} \times K_a \times K_u}{p(1 + 2,1 \cdot 10^{-3} p)(1 + 0,36 p)} = \frac{0,83}{p(1 + 2,1 \cdot 10^{-3} p)(1 + 0,36 p)} \rightarrow h$$

$$h|p = i\omega \rightarrow g$$

Je cherche ω_c et K_I

$$\text{Solve}(\text{angle}(g) = -135, \omega) \quad \text{cela donne} \quad \omega = \omega_c = 2,7 \text{ rad/s}$$

$$g|_{\omega = 2,7} \rightarrow f$$

$$\text{Solve}(20\log(K) = -20\log[\text{abs}(f)], K) \quad \text{cela donne} \quad K = K_I = 4,8 \text{ rad/s}$$

Q8 : Pôle dominant de $H_u(p)$ - Réglage de la rapidité

- Le pôle dominant d'une fonction de transfert est celui de plus basse pulsation, donc de plus grande constante de temps ; pour la fonction $H_u(p)$, le pôle dominant est $-\frac{1}{T_2}$. On approxime alors $H_u(p)$ par :

$$H_U(p) = \frac{K_U}{1 + T_2 p} \quad \text{avec } T_2 = 0,36 \text{ s}$$

NB : En effet dans le cas simplifié la réponse à l'échelon unitaire vaut $\frac{K_U}{(1 + T_2 p)p} \rightarrow K_U (1 - e^{-t/T_2})$

Et celle de la fonction non simplifiée

$$\frac{K_U}{(1 + T_2 p)(1 + T_1 p)p} \rightarrow K_U \left(1 + \frac{(T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2})}{(T_1 - T_2)} \right) \xrightarrow{T_1 \ll T_2} K_U (1 - e^{-t/T_2})$$

- La fonction de transfert en boucle ouverte devient alors $H_{bo}(p) = \frac{K_{capt} K_I K_A K_U}{p(T_2 p + 1)}$ et celle en boucle

$$\text{fermée } H_{bf}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{capt} K_I K_A K_U} p + \frac{T_2}{K_{capt} K_I K_A K_U} p^2}.$$

Le système en boucle fermée est un modèle fondamental du second ordre ; il sera le plus rapide possible en ajustant son taux d'amortissement à la valeur $\xi = 0,69$.

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{K_{capt} K_I K_A K_U T_2}} \Rightarrow K_I = \frac{1}{4\xi^2 K_{capt} K_A K_U T_2} ; \text{ on en déduit } K_{I\,5\%} = 1,76$$

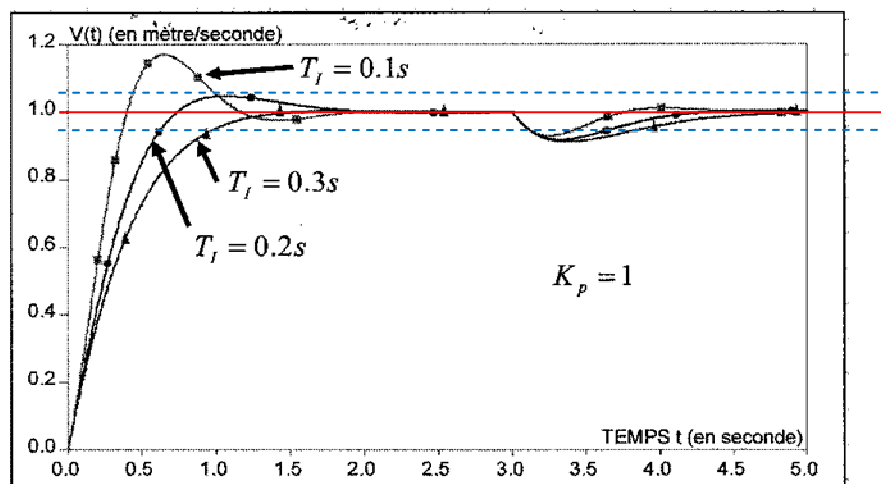
Pour ce taux d'amortissement, l'énoncé propose une équation d'approximation du temps de réponse à 5% : $T_{5\% \text{ mini}} \omega_0 = 3$ (en accord avec l'abaque $\omega_0 T_{5\%} = f(\xi)$ usuellement utilisé).

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{capt} K_{I\,5\%} K_A K_U}{T_2}} \Rightarrow T_{5\% \text{ mini}} = 3 \sqrt{\frac{T_2}{K_{capt} K_{I\,5\%} K_A K_U}} ; \text{ on en déduit } T_{5\% \text{ mini}} = 1,5 \text{ s}$$

Cette valeur ne convient pas, puisque supérieure à la valeur de 0,5 seconde accordée par le cahier des charges : le système est trop lent.

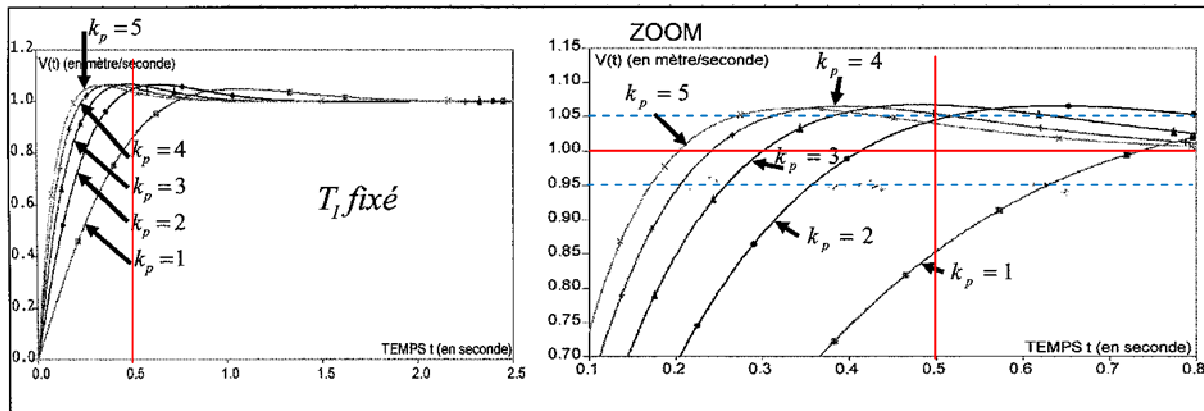
c. **Etude des performances avec correcteur proportionnel intégral** $C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I p} \right)$

Q9 : Préréglage de la rapidité par la constante de temps T_I



Parmi les trois tracés proposés, celui correspondant à $T_i = 0,2 \text{ s}$ se stabilise le plus rapidement dans la fourchette de $\pm 5\%$ (tracés en traits interrompus courts sur la figure ci-dessus) autour de la réponse en régime établi.

Q10 : Ajustement de la rapidité par le gain K_p



Le tracé pour $K_p = 4$ obtient un temps de réponse à 5 pourcents très proche de la valeur de 0,5 s exigée par le cahier des charges.

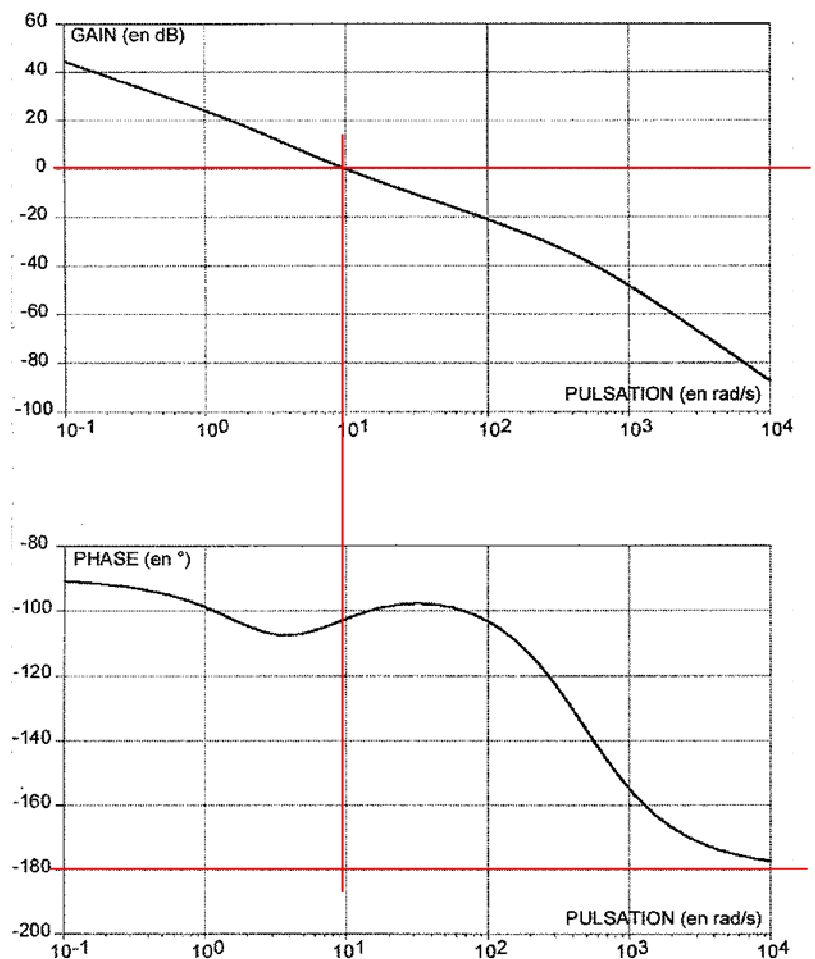
Q11 : Critique du correcteur proportionnel intégral choisi vis-à-vis des clauses du cahier des charges

$C(p) = 4 \left(1 + \frac{1}{0,2p} \right)$ est le correcteur réglé dans les questions précédentes pour, en accord avec le cahier des charges :

- Annuler les erreurs statiques en poursuite comme en régulation (effet intégrateur du correcteur)
- Ajuster le temps de réponse à 5 pourcents à 0,5 secondes

De plus, on observe sur le diagramme de Bode du système corrigé, fourni ci-contre, que :

- Le déphasage étant toujours supérieur à -180 degrés, la marge de gain est infinie ; elle est donc supérieure aux 6 dB attendus
- La pulsation de coupure à 0 dB est de 10 rad/s ; à cette valeur, le déphasage est de -105 degrés. La marge de phase est donc de 75 degrés, valeur supérieure aux 45 degrés exigés.



En conséquence, le correcteur $C(p) = 4 \left(1 + \frac{1}{0,2p} \right)$ permet de concilier le système à toutes les contraintes du cahier des charges.