Cinématique des engrenages

I. Les engrenages

A. Généralités

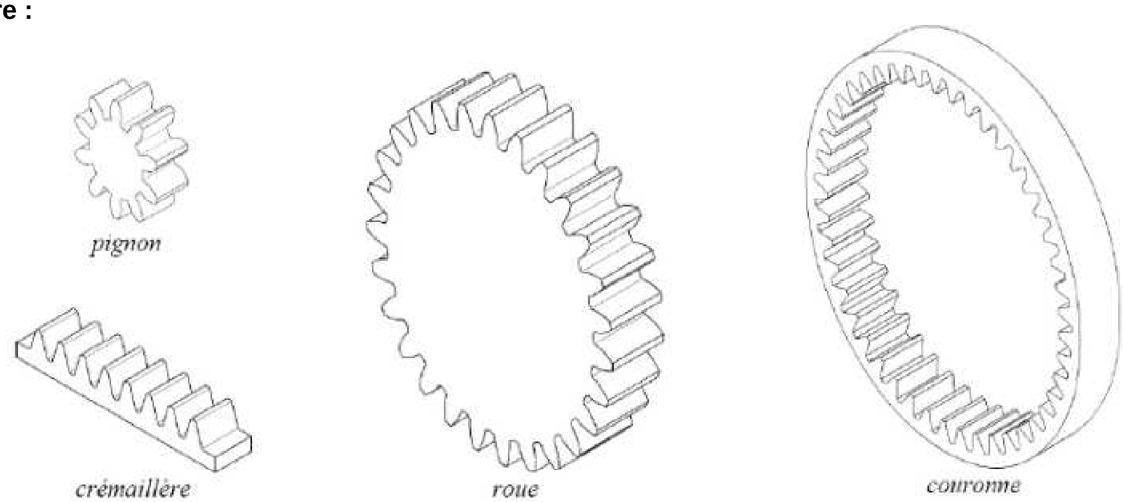
Définition : association de deux roues dentées complémentaires, chacune en liaison par rapport à un support appelé « porte axe » (souvent le bâti mais pas toujours…)

Fonction des engrenages : transmettre une puissance d'un arbre en rotation vers un autre, les 2 vitesses restant dans un rapport constant

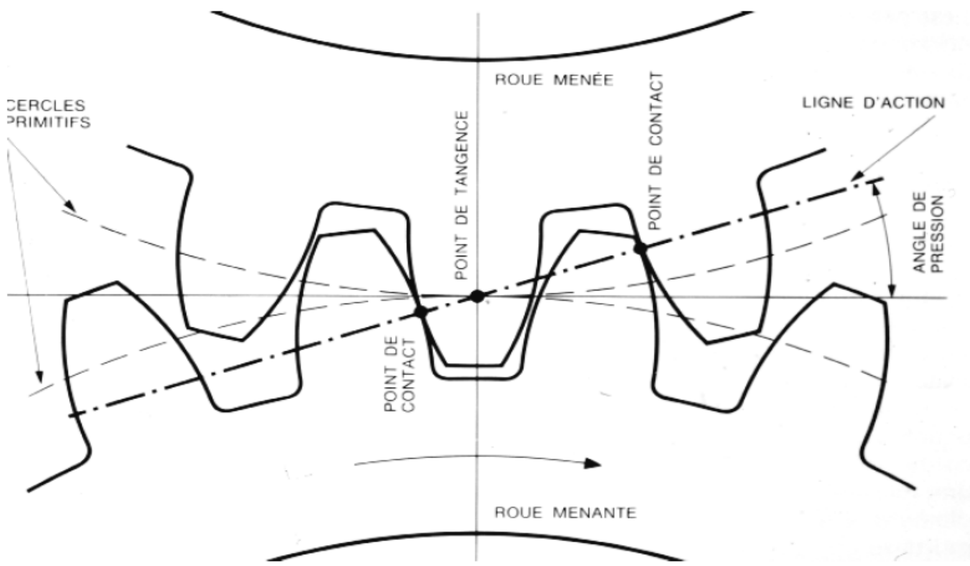
Autres solutions :
- - Transmission par accouplement (arbres dans le prolongement l'un de l'autre)
- - Transmission par friction : roue de friction , courroies plates ….
- - Transmissions par courroies crantées (poulies ou chaînes sur roues)

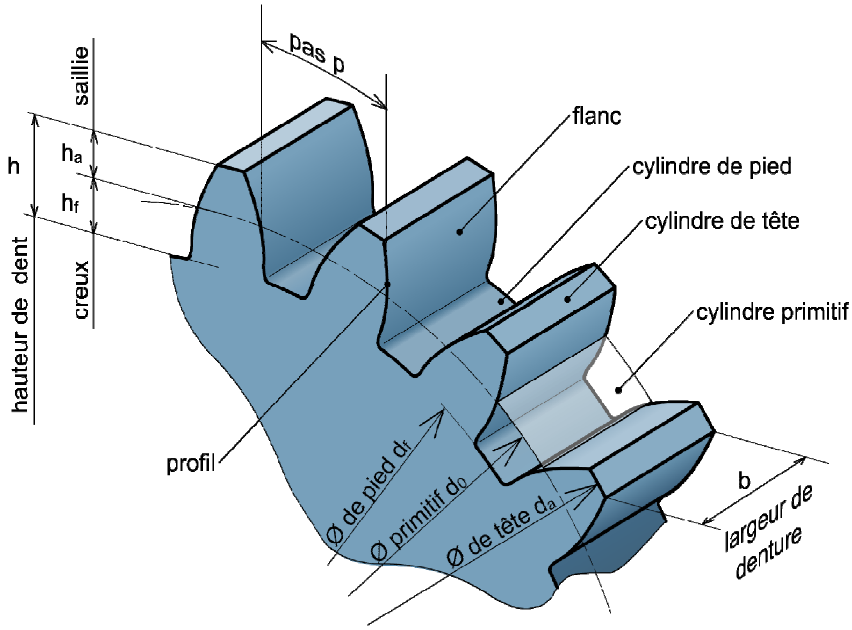
Avantages engrenages : bon rendement et encombrement faible

Vocabulaire :



Géométrie du contact :





Caractéristiques de la denture droite

Pour que **l'engrènement soit possible**, il faut que les pas primitifs des deux roues (distance entre deux dents consécutives) soient identiques. On définit le module de la denture comme le rapport entre le pas primitif et π. La condition d'engrènement peut être énoncée : les roues ont même module. Le nombre de dents de chaque roue doit être un entier.

Le lien entre le pas et le module est donc : $p = m\pi \Leftrightarrow d = mz$ avec d, le diamètre primitif.

B. Différents types

Engrenages à axes parallèles

Roues cylindriques à denture droite

Roues cylindriques à dentures hélicoïdales

Engrenages à axes concourants

Roues coniques

Engrenages gauches

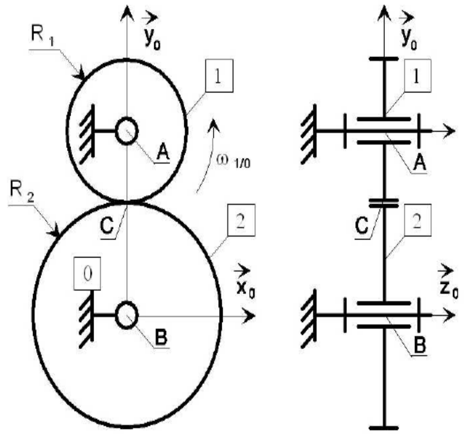
Roues / vis sans fin

II. Les trains d'engrenages

On appelle train d'engrenages **une succession de contacts entre roues dentées** (engrenages), dont la fonction est de réduire ou d'augmenter la vitesse de rotation entre l'entrée et la sortie du mécanisme. Les engrenages constituant le train peuvent être à axes parallèles, à axes concourant ou gauches. Les axes de rotation peuvent être **fixes (cas classiques) ou mobiles (train épicycloïdaux)**

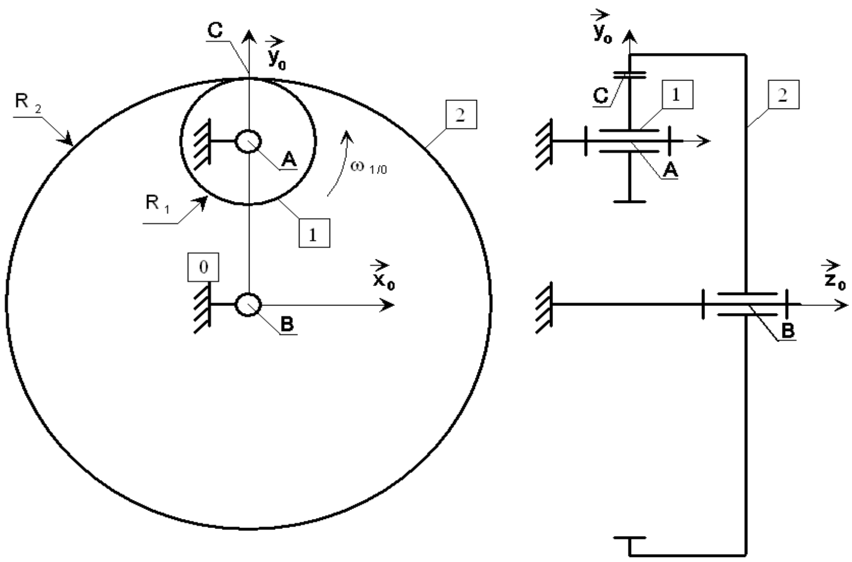
A. Les trains à axes fixes

Cas classique : engrenage à contact extérieurs (*)

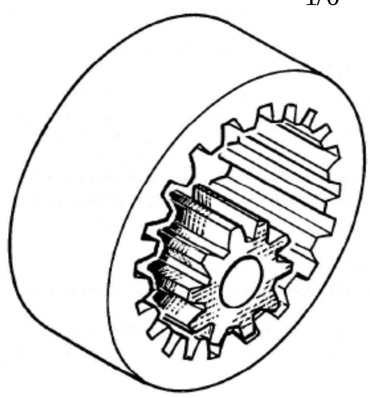


$$\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

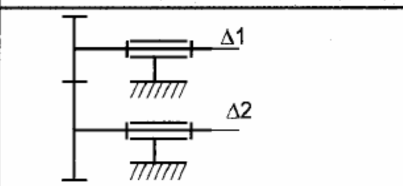
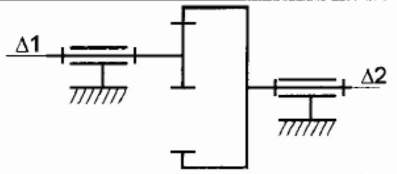
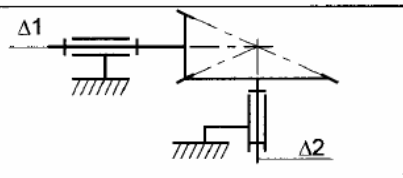
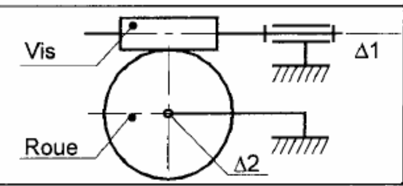
Cas classique : engrenage à contact intérieur (**)



$$\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

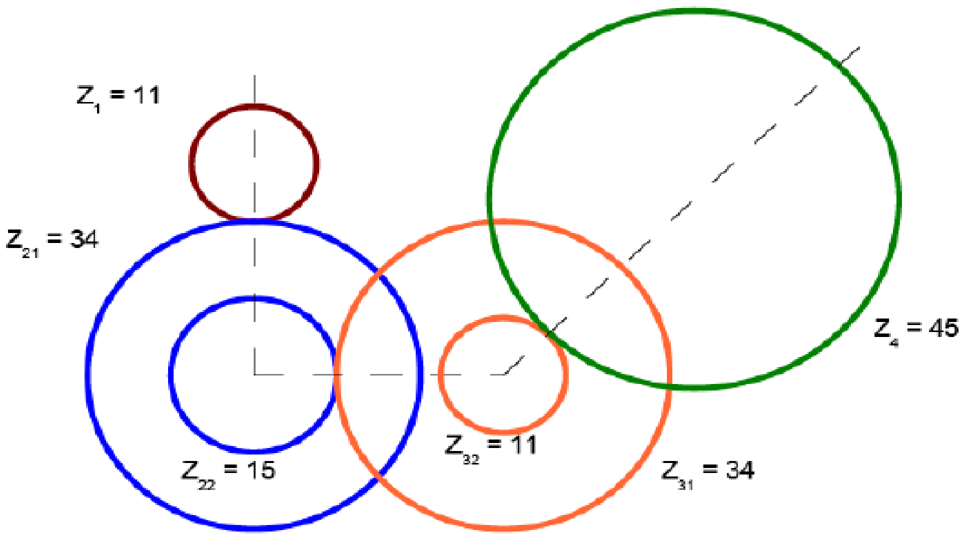


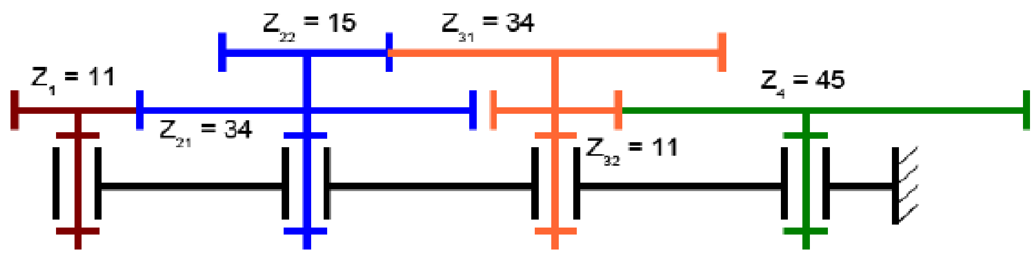
Rapport de réduction

Position relative des axes des arbres d'entrée et de sortie du réducteur	Type d'engrenage assurant la transmission	Schéma de principe	Rapport de réduction
* $\Delta 1$ et $\Delta 2$ parallèles	cylindriques à denture droite ou hélicoïdale à contact extérieur		$\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{z_1}{z_2}$ Les sens de rotation des arbres d'entrée et de sortie sont inversés
**	cylindriques à denture droite ou hélicoïdale à contact intérieur		$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2}$ Les sens de rotation des arbres d'entrée et de sortie sont identiques
$\Delta 1$ et $\Delta 2$ perpendiculaires et concourants	conique à contact extérieur		$\left\lvert\frac{\omega_2}{\omega_1}\right\rvert = \frac{z_1}{z_2}$
$\Delta 1$ et $\Delta 2$ perpendiculaires et non concourants	roue et vis sans fin		$\left\lvert\frac{\omega_2}{\omega_1}\right\rvert = \frac{z_1}{z_2}$ z_1: nombre de filets de la vis z_2: nombre de dents de la roue

Extrait du livre de Francis Esnault sur les transmissions de puissance , Dunod

Exemple :





L'entrée est 1 et la sortie est 4 :

$$\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{3/0}} = -\frac{Z_{31}}{Z_4} \qquad \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{2/0}} = -\frac{Z_{21}}{Z_{32}} \qquad \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = -\frac{Z_1}{Z_{22}}$$

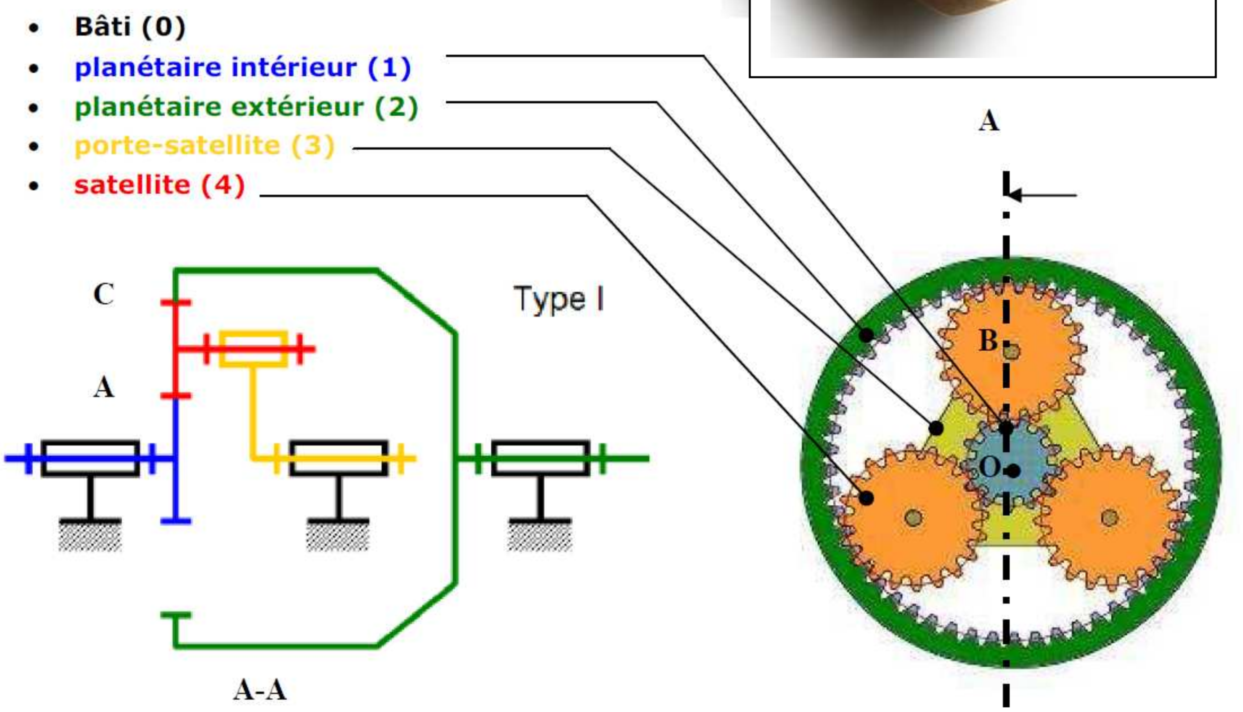
$$\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}} = (-1)^3 \frac{Z_1 Z_{22} Z_{32}}{Z_4 Z_{31} Z_{21}}$$

Formule générale (uniquement valable dans le cas des trains d'engrenages à axes fixes):

$$\frac{\omega_{s/0}}{\omega_{e/0}} = (-1)^p \frac{\Pi Z_{menantes}}{\Pi Z_{menees}}$$

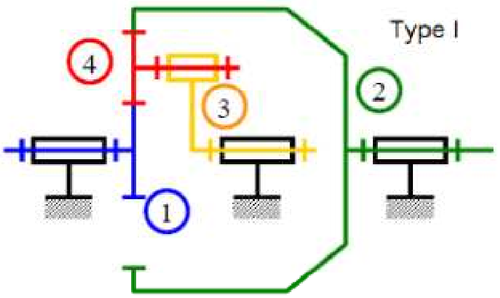
e, entrée
s, sortie
p, nombre de contact extérieurs

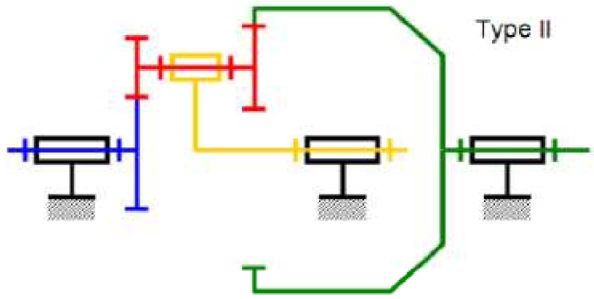
B. Les trains à axes mobiles

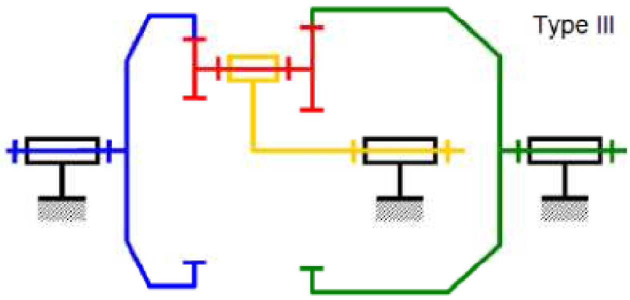


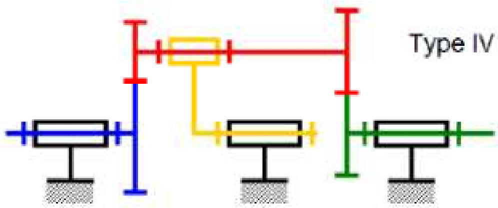
Un train d'engrenages est qualifié d'**épicycloïdal** quand, pendant le fonctionnement, une ou plusieurs roues dentées tournent autour d'un axe géométrique mobile par rapport au carter principal. Les trains **épicycloïdaux** sont des systèmes à **deux degrés de liberté**. Il faut imposer deux paramètres angulaires pour définir complètement la position du système. On peut donc considérer que les trains épicycloïdaux sont des systèmes à deux entrées (et une sortie).

Ainsi généralement, **parmi les 3 éléments suivant,** les 2 planétaires et le porte satellite, un des éléments est bloqué par rapport au bâti alors qu'on impose à un second une vitesse non nulle (entrée) et le troisième constitue la sortie. Il existe plusieurs types de trains épicycloïdaux, les plus courants étant les trains plans (à axes parallèles), parmi lesquels on peut distinguer quatre variantes :









La roue 4 est celle qui tourne autour d'un axe non fixe par rapport au bâti. Il est appelé **satellite** et est en liaison pivot avec le **porte-satellite(s)** 3. Les roues 1 et 2 sont appelées **planétaires**, qualifiés d'intérieur ou extérieur selon leur denture.

Étude cinématique :1, 2 et 3 sont en liaison pivot de même axe avec le bâti. On peut donc considérer 3 comme étant le porte « axes » du train, tous les autres éléments (0, 1, 2 et 4) sont en liaison pivot avec lui.

- Dans un premier temps, on détermine l'objectif du calcul : $\dfrac{\omega_{s/0}}{\omega_{e/0}} = ?$

- Ensuite, on utilisera le porte-satellite 3 (et non le bâti 0) comme référence pour les vitesses de rotation. Dans ce cadre et seulement dans ce cadre, on pourra traduire la présence des engrènements à l'aide de la relation classique, puisque l'on se ramène mentalement au cas du train d'engrenages à axes fixes :

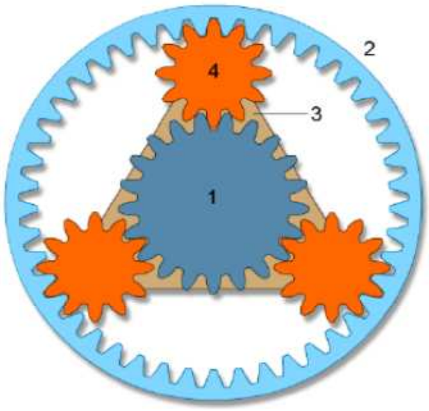
$$\frac{\omega_{i/3}}{\omega_{j/3}} = (-1)^p \frac{\Pi Z_{menantes}}{\Pi Z_{menees}} = R$$

- Enfin, à partir de la relation précédente, on remontera à la véritable relation cinématique entrée/sortie $\dfrac{\omega_{s/0}}{\omega_{e/0}}$ dans le référentiel du bâti à l'aide de la composition des vitesses de rotation. On tiendra compte également du fait qu'un des 3 composants (1, 2 ou 3) est bloqué ou voit sa vitesse contrainte d'une façon ou d'une autre pour simplifier les calcul.

$$\frac{\omega_{i/3}}{\omega_{j/3}} = R \quad \rightarrow \quad \frac{\omega_{s/0}}{\omega_{e/0}} = ?$$

Exemple :

On donne le train épicycloïdal plan de type I suivant :
Z1 = 21 ; Z2 = 45 ; Z4 = 12.
On étudie le fonctionnement avec planétaire extérieur 2 bloqué par rapport au bâti 0 : $\omega_{2/0} = 0$. On impose au planétaire intérieur 1 une vitesse constante $\omega_{1/0}$ et la sortie du mécanisme est la vitesse du porte-satellite.



Question 1 : En considérant l'engrènement de 1 et 4 (en prenant le porte-satellite comme référence des vitesses), écrire le rapport $\frac{\omega_{4/3}}{\omega_{1/3}}$ en fonction de Z_1 et Z_4 .

Question 2 : En considérant l'engrènement de 2 et 4 (en prenant le porte-satellite comme référence des vitesses), écrire le rapport $\frac{\omega_{4/3}}{\omega_{2/3}}$ en fonction de Z_2 et Z_4 .

Question 3 : En utilisant le fait que $\omega_{2/0} = 0$, trouver le rapport de réduction du réducteur en fonction des nombres de dents : $R_1 = \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$

Question 4 : Reprendre le problème dans le cas où le planétaire intérieur est bloqué et la vitesse de sortie est celle du planétaire extérieur 2 .

Réponse 1 : $\frac{\omega_{4/3}}{\omega_{1/3}} = -\frac{Z_1}{Z_4}$

Réponse 2 : $\frac{\omega_{4/3}}{\omega_{2/3}} = \frac{Z_2}{Z_4}$

Réponse 3 : $\omega_{2/0} = 0$

$R_1 = \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = ?$

$$\frac{\omega_{2/3}}{\omega_{1/3}} = -\frac{Z_1}{Z_2} \Leftrightarrow \frac{\omega_{2/0}+\omega_{0/3}}{\omega_{1/0}+\omega_{0/3}} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

$$\frac{\omega_{0/3}}{\omega_{1/0}+\omega_{0/3}} = -\frac{Z_1}{Z_2} \Leftrightarrow \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{Z_1}{Z_1+Z_2}$$

Réponse 4 : $\omega_{1/0} = 0$

$R_2 = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{3/0}} = ?$

$$\frac{\omega_{2/3}}{\omega_{1/3}} = -\frac{Z_1}{Z_2} \Leftrightarrow \frac{\omega_{2/0}+\omega_{0/3}}{\omega_{1/0}+\omega_{0/3}} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

$$\frac{\omega_{2/0}+\omega_{0/3}}{\omega_{0/3}} = -\frac{Z_1}{Z_2} \Leftrightarrow \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{3/0}} = \frac{Z_2+Z_1}{Z_2}$$