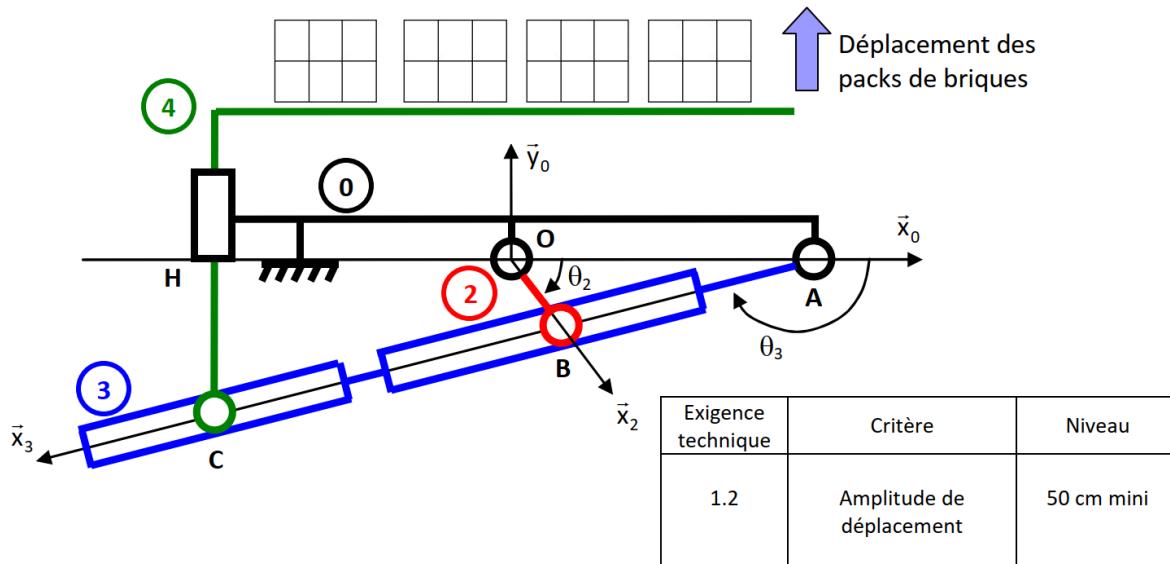


DS2

Statique – Cinématique

Palettiseur pour l'industrie laitière

Les briques de lait de 1L sont stockées par groupe de 6, et déposée sur des palettes (ce qui facilite leur transport dans les camions). Dans une chaîne de conditionnement de briques de lait, on utilise souvent des pousoirs qui poussent tout un lot de 6 briques de lait. On se propose d'étudier un de ces pousoirs dont on donne le modèle ci-dessous ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel. L'objectif d'étude est de vérifier si le système permet d'atteindre l'exigence demandée.



Le bâti 0 est fixe. Un motoréducteur anime en rotation la manivelle 2. Par l'intermédiaire d'une liaison en B, la manivelle 2 déplace la tige 3 en rotation autour de l'axe (A, \vec{x}_0) qui déplace elle même le poussoir 4 en translation suivant l'axe \vec{y}_0 .

Données : $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$; $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$; $\overrightarrow{AB} = \mu \cdot \vec{x}_3$; $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \vec{x}_3$; $\overrightarrow{CH} = y \cdot \vec{y}_0$; $\overrightarrow{OB} = R \cdot \vec{x}_2$;
 $\overrightarrow{HA} = L \cdot \vec{x}_0$ et ; $\overrightarrow{OA} = L_1 \cdot \vec{x}_0$; $R = 0,15\text{m}$; $L = 2 \cdot L_1 = 0,5\text{m}$.

On se place en modèle plan. Les distances λ , μ et y sont variables.

Q.1. Représenter les vues géométriques des positions relatives de R_2 / R_0 et R_3 / R_0 .

Q1bis. Donner la liste des paramètres géométriques (angulaires ou linéaires) variables et la liste des paramètres géométriques constants dans ce problème.

Q.2. Écrire les équations de fermeture géométrique (OAB) en projection dans la base 3.

Q.3. Écrire les équations de fermeture géométrique (HAC) en projection dans la base 3.

Q.4. Réécrire les équations de fermeture géométrique (OAB) et (HAC) en projection dans la base 0 et en déduire la loi entrée sortie du système y en fonction de θ_2 .

Q.5. Déterminer l'amplitude de déplacement du poussoir $\Delta y = y_{\max} - y_{\min}$.

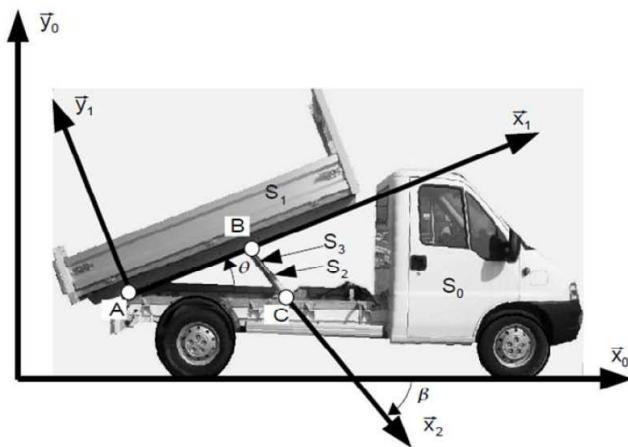
Q.6. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Benne de camion

On s'intéresse à un camion en phase de déchargement dont on donne une description structurelle ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel.

Le camion noté S_0 en déchargement soulève l'ensemble S_1 (benne + chargement) de centre de gravité G et de masse $M = 7000 \text{ kg}$ constitué de la benne et de la matière transportée. Un vérin (corps de vérin S_2 et tige S_3) commande le mouvement.

Exigence technique	Critère	Niveau
1.5	Vitesse angulaire de la benne	$< 0,5 \text{ tr/min}$



L'objectif est de déterminer la vitesse de rotation de la benne 1 en fonction du débit dans le vérin afin de vérifier la performance en vitesse angulaire de cette benne.

On donne les caractéristiques géométriques suivantes :

$$\vec{AB} = L \cdot \vec{x}_1 \quad \vec{AG} = x_G \cdot \vec{x}_1 + y_G \cdot \vec{y}_1 \quad \vec{BC} = \lambda \cdot \vec{x}_2 \quad \vec{AC} = x_C \cdot \vec{x}_0 + y_C \cdot \vec{y}_0 \quad \theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) \quad \beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$$

Q.1. Réaliser le schéma cinématique du système et représenter les figures géométrales.

On donne les caractéristiques du vérin :

- débit volumique d'huile injectée dans le vérin Q (en m^3/s),
- Surface du piston du vérin S (en m^2),
- vitesse de déploiement du vérin V (en m/s).

Q.2. Exprimer le débit Q dans le vérin en fonction de sa vitesse de déploiement V et de la surface du piston S.

Q2bis. Donner la liste des paramètres géométriques (angulaires ou linéaires) variables et la liste des paramètres géométriques constants dans ce problème.

Q.3. Écrire l'équation vectorielle de fermeture géométrique linéaire et projeter l'équation vectorielle obtenue dans la base 0.

Q.4. A partir des équations issues de la fermeture géométrique, exprimer λ en fonction de θ .

Q.5. Dériver l'expression obtenue question précédente et déterminer Q en fonction de $\dot{\theta}$ et de θ .

Q.6. L'étude de l'application numérique de la formule précédente aboutit à $\dot{\theta}_{\max} = 70.Q$. Le vérin délivrant 0,4 Litres/s, conclure quant à la capacité de la benne à satisfaire la performance en vitesse angulaire.

Manège de fête foraine : « La chenille » améliorée

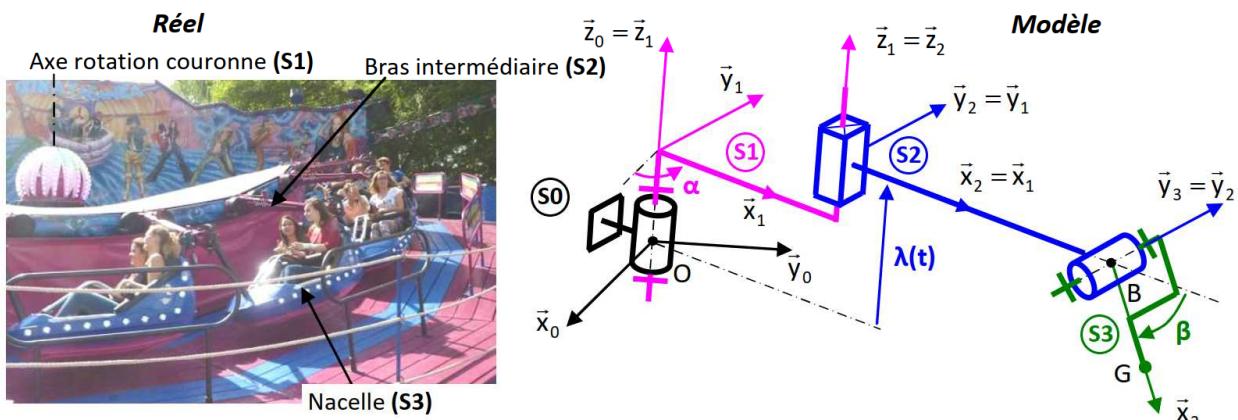
On s'intéresse dans ce problème à un manège rencontré dans les fêtes foraines, inspiré du manège communément appelé « la chenille » et qui est une version améliorée pour plus de sensations fortes.

Ce type d'attraction permet de procurer des sensations importantes aux passagers, à la fois en marche avant et en arrière par un mouvement de « brassage ». L'ensemble tourne à une vitesse maximale de 14 tours/min. Les voitures sont suspendues par le haut et peuvent basculer de gauche à droite à chaque dos d'âne. Au plus haut de ces bosses, les nacelles se retournent quasiment « à l'envers ».



Exigences	Critères	Niveaux
Le système doit respecter les exigences techniques suivantes	... Valeur maximale l'accélération reçue par un passager d'une masse de 70 kg pour un angle $\beta = \text{cte} = \pi/2$ et une accélération radiale $\ddot{\lambda} = 1,6 \text{ m/s}^2$ 2g maximum

On s'intéresse au mouvement de la nacelle (S3) du manège dont on donne une description structurelle ainsi qu'une modélisation cinématique.



On considère que le système est constitué de quatre sous ensembles nommés (S0), (S1), (S2) et (S3) pour lesquels on associe un repère R_i . Chaque repère R_i possède la base notée $b_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$.

Le solide (S1) qui correspond à la couronne centrale du manège est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) avec le bâti (S0). On pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.

Le bras intermédiaire (S2) est en liaison glissière de direction $\vec{z}_0 = \vec{z}_1 = \vec{z}_2$ avec la couronne centrale (S1).

Enfin la nacelle (S3) est en liaison pivot d'axe (B, \vec{y}_2) avec le bras (S2). On pose $\beta = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$; $\vec{OB} = \lambda(t) \cdot \vec{z}_0 + a \cdot \vec{x}_1 + b \cdot \vec{x}_2$ et $\vec{BG} = l \cdot \vec{x}_3$. G correspond au centre de gravité de la nacelle (S3).

Q.1. Que peut-on dire de la base b_1 par rapport à la base b_2 compte tenu de la liaison entre (S2) et (S1).

Q.2. Tracer les figures géométriques (ou figures de calcul planes) représentant les angles α et β .

Q.3. Calculer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{G,S3/S0}}$.

On s'intéresse désormais à un passager P installé dans une nacelle (S3). Le théorème de la résultante dynamique (issu de l'écriture du principe fondamental de la dynamique pour les solides) appliqué au passager seul conduit à écrire dans le référentiel galiléen lié au solide (S0) l'équation suivante :

$$m \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G,\text{passager}/S0}} = -m \cdot g \cdot \vec{z}_0 + \overrightarrow{F_{S3 \rightarrow \text{passager}}}$$

Où :

- $\overrightarrow{\Gamma_{G,\text{passager}/S0}}$ est l'accélération du centre d'inertie G du passager dans son mouvement par rapport à S0.
- On considérera ici pour simplifier que le centre d'inertie du passager est confondu avec le centre de gravité de la nacelle S3 par conséquent $\overrightarrow{\Gamma_{G,\text{passager}/S0}} = \overrightarrow{\Gamma_{G,S3/S0}}$.
- $\overrightarrow{F_{S3 \rightarrow \text{passager}}}$ est l'action mécanique correspondant à la force de réaction exercée par la nacelle sur le passager.
- m est la masse du passager en kg.
- g l'accélération de la pesanteur (en m/s^2).

Par conséquent la « force ressentie » par le passager sur son siège s'écrit : $\overrightarrow{F_{\text{passager} \rightarrow S3}} = -m \cdot (\overrightarrow{\Gamma_{G,S3/S0}} + g \cdot \vec{z}_0)$

La composante de cette « force ressentie » selon l'axe de la colonne vertébrale du passager permet de caractériser l'accélération équivalente ressentie par celui-ci.

Q.4. Calculer la projection de cette force selon l'axe \vec{x}_3 , soit $\overrightarrow{F_{\text{passager} \rightarrow \text{nacelle}}} \cdot \vec{x}_3$.

Pour faire l'application numérique de la projection $\overrightarrow{F_{\text{passager} \rightarrow \text{nacelle}}} \cdot \vec{x}_3$ et connaître le nombre de « g » ressenti par le passager à tout instant, il est normalement nécessaire de connaître l'évolution des paramètres α , β et λ en fonction du temps.

Q.5. Pour la configuration correspondant à celle définie dans l'exigence du cahier des charges, déterminer l'accélération équivalente « ressentie » par le passager et commenter la valeur obtenue.

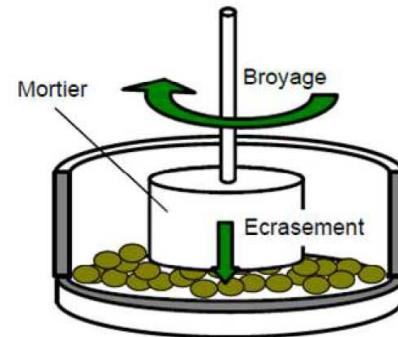
Broyeur

On s'intéresse à un broyeur dont on donne une description structurelle ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel. La fonction principale de ce système est de réduire en poudre des matériaux dur et cassant (levures, charbon, clinker, sels, substances homéopathiques, ...).

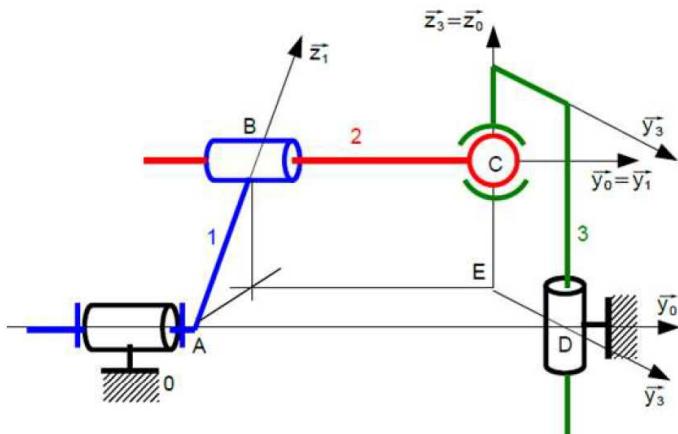
Exigences	Critères	Niveaux
...
1.1 Le système doit réduire en poudre des granulats de matériaux	Taille initiale granulat Taille finale granulat Effort écrasement minimal ...	Diamètre 8 mm Diamètre 0,001 mm 5 N mini ...



Pour réduire en poudre les matériaux, on utilise un mortier (pièce cylindrique) qui effectue un mouvement combiné de rotation et de translation, afin de broyer et d'écraser les agglomérats de matériaux.



On donne ci-dessous le modèle cinématique du mécanisme permettant la mise en mouvement du mortier 3 :



Un motoréducteur (non représenté ici) entraîne le volant 1 en rotation autour de l'axe (A, \vec{y}_0). Le déplacement de la bielle 2 provoque la rotation et la translation simultanées du mortier 3 par rapport au bâti 0 réalisant ainsi la réduction en poudre correcte du produit.

Données :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= R \cdot \vec{z}_1, \quad \overrightarrow{BC} = \lambda(t) \cdot \vec{y}_1, \quad \overrightarrow{AD} = d \cdot \vec{y}_1, \quad \overrightarrow{EC} = h(t) \cdot \vec{z}_0, \\ \overrightarrow{ED} &= L \cdot \vec{y}_3 \end{aligned}$$

Les dimensions géométriques sont les suivantes : $R = 3 \text{ cm}$, $d = 7 \text{ cm}$, $L = 4 \text{ cm}$.

On pose :

$R_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère lié au bâti 0.

$R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère lié au volant 1 tel que $\theta_{10} = (\vec{x}_1, \vec{x}_0)$

$R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ le repère lié à la bielle 2 tel que $\theta_{21} = (\vec{x}_2, \vec{x}_1)$

$R_3(C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ le repère lié à la bielle 2 tel que $\theta_{30} = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$

$$\theta_{01} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$$

$$\theta_{12} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$$

$$\theta_{23} = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$$

Q0 . Calculer le degré d'hyperstaticité h à l'aide des formules rapides et en justifiant précisément votre raisonnement

Q0 bis. Parmi $\theta_{21}, R, \theta_{30}, d, L, \theta_{10}, h, \lambda$, donner la liste des paramètres géométriques (angulaires ou linéaires) variables et la liste des paramètres géométriques constants dans ce problème.

Q.1. Réaliser le graphe des liaisons du système.

Q.2. Poser les trois figures géométrales.

Q.3. Réaliser le schéma cinématique du système dans le plan $(O, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en utilisant une couleur par classe d'équivalence pour la position particulière $\theta_{10} = 0^\circ$ et $\theta_{30} = 0^\circ$.

Q.4. A l'aide d'une fermeture géométrique, donner les expressions de $h(t)$, $\lambda(t)$ puis de $\tan\theta_{30}$ uniquement en fonction de R , L , d et de l'angle θ_{10} .

L'action mécanique exercée par le motoréducteur sur le rotor est modélisée par $\{F_{M \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{y}_0 \end{Bmatrix}$. Les actions mécaniques exercées par le matériau à écraser sur le mortier 3 sont modélisables par le torseur suivant : $\{F_{P \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} Z_p \cdot \vec{z}_0 \\ N_p \cdot \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$.

On néglige l'action mécanique de la pesanteur devant les autres actions mécaniques et on considère que toutes les liaisons entre les solides sont parfaites. Le repère R_0 est considéré comme galiléen.

Par la suite, on notera $\{F_{i \rightarrow j}\} = \begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_{B_0}$ le torseur d'action mécanique transmissible du solide i sur le solide j

en un point P quelconque et dans la base 0 .

Q.5. Donner le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison $0-1$ noté $\{F_{0 \rightarrow 1}\}$ en A et dans la base 0 .

Q.6. Donner le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison $2-1$ noté $\{F_{2 \rightarrow 1}\}$ en B et dans la base 0 .

Q.7. Donner le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison $3-2$ noté $\{F_{3 \rightarrow 2}\}$ en C et dans la base 0 .

Q.8. Donner le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison $0-3$ noté $\{F_{0 \rightarrow 3}\}$ en D et dans la base 0 .

Q9. Proposer et isoler un solide afin de déterminer, par une équation du PFS à préciser, une relation liant R , X_{21} , Z_{21} , C_m et θ_{10} .

Q10. Isoler le solide 2 et déterminer par le PFS les deux relations permettant de relier Z_{21} , Z_{32} , X_{21} et X_{32} . Démontrer que $Y_{32}=0$.

Q11. Proposer et isoler un solide afin de déterminer, par 2 équations du PFS à préciser, 2 relations liant Z_P et Z_{32} d'une part et N_P , X_{32} , L et θ_{30} enfin .

Q.12. A partir des résultats obtenus questions précédentes, déterminer la loi entrée statique du système liant C_m en fonction de L , R , N_P , Z_P , θ_{30} et θ_{10} .

Indication : on doit trouver

$$C_m = -R \cdot \frac{N_p}{L \cdot \cos \theta_{30}} \cdot \cos \theta_{10} + R \cdot Z_p \cdot \sin \theta_{10}$$

Les caractéristiques du moteur sont les suivantes :

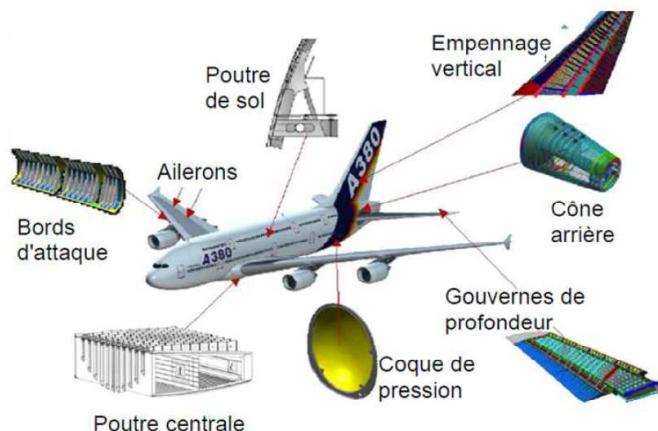
	Puissance nominale (W)	Vitesse nominale (tr/min)	Couple nominal (N.m)	Inertie (kg.m ²)	Poids (kg)
Moteur P30B04005DX	50	3000	0,16	$0,03 \times 10^{-4}$	0,35

Q.13. En considérant le couple de broyage nul, déterminer l'effort d'écrasement minimal que peut obtenir avec le broyeur. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Etude du dispositif de mise en contact du rouleau de pression d'une machine à draper

(D'après Mines Ponts MP)

Dans les avions, de nombreuses pièces sont fabriquées en matériaux composites. Pour fabriquer de telles pièces, on utilise des machines à draper. Une machine à draper est une machine à commande numérique dont la fonction est de déposer des bandes de carbone sur les panneaux structurels des avions. L'unité de drapage avec son rouleau de dépôse est l'effecteur de cette machine à commande numérique. Il se déplace le long du panneau à draper.

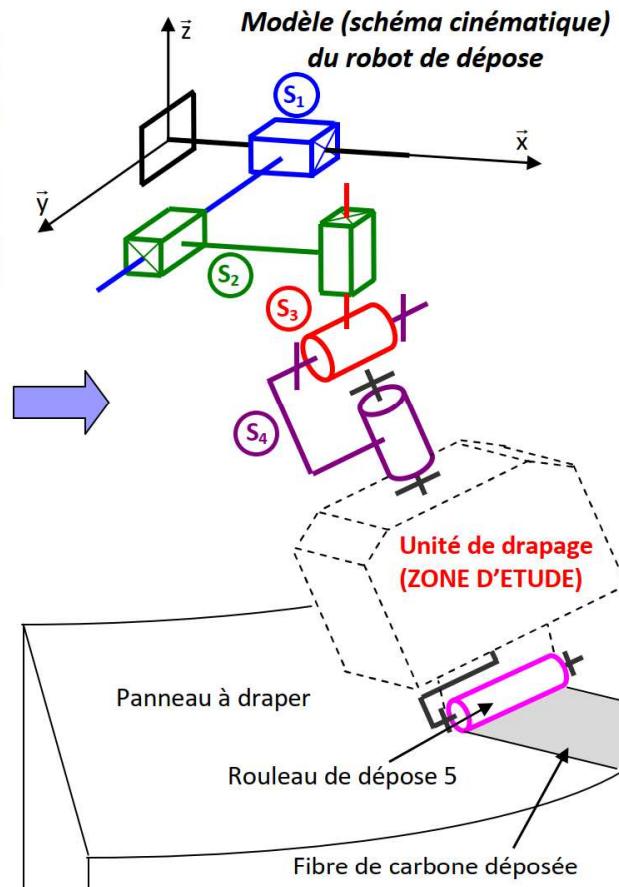
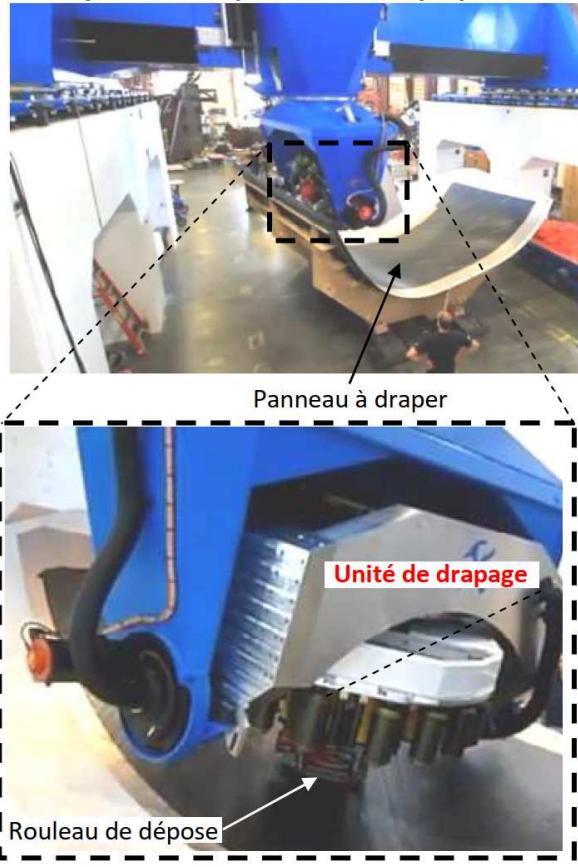


Pour chaque épaisseur de carbone à déposer, le cycle de déplacement du rouleau est défini à l'avance par programme informatique et est interprété par l'ordinateur de commande de la machine au fur et à mesure de l'avancement de la dépôse. Lors de la dépôse de la bande de carbone sur le panneau, le rouleau doit exercer un effort presseur pour la plaquer.

On s'intéresse dans ce sujet uniquement à l'unité de drapage et plus particulièrement au sous système de l'unité de drapage permettant d'assurer le contact du rouleau avec pression sur le panneau à draper.

On donne une description structurelle ainsi qu'un extrait partiel du cahier des charges du système étudié.

Système réel (Machine à draper)



L'effort presseur est généré par un vérin pneumatique (ensemble 1+2) dont la pression est asservie. La pression d'air disponible est de l'ordre de 10 bars.

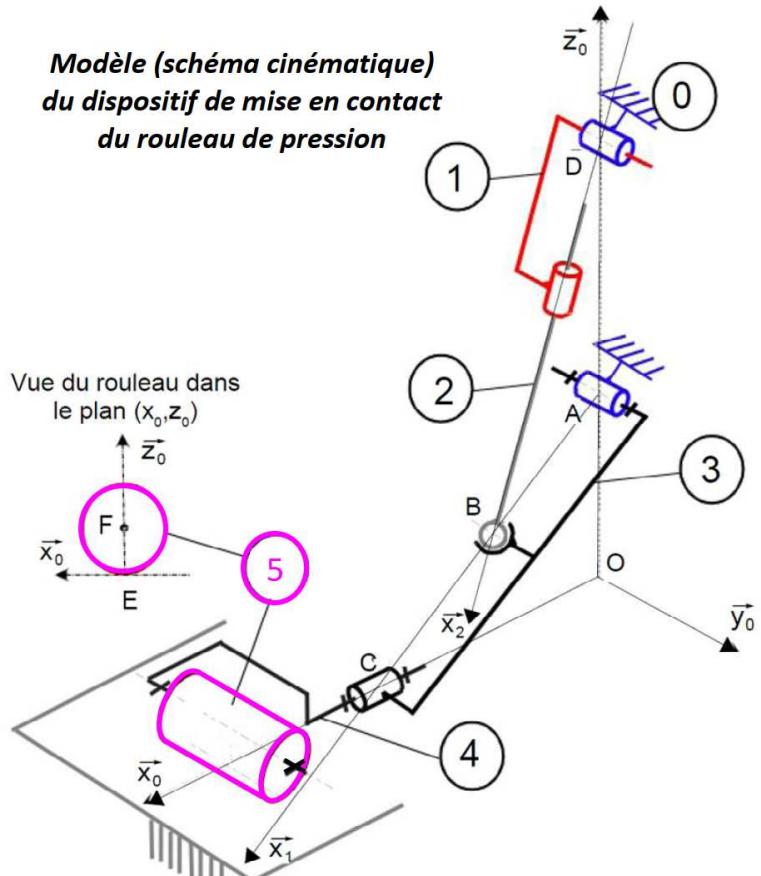
Les liaisons sont considérées comme parfaites.

Les classes d'équivalence cinématiques sont les suivantes :

- 0 : Unité de drapage (considéré fixe pour cette étude)
- 1 : Corps du vérin
- 2 : Tige du vérin
- 3 : Bras
- 4 : Support du rouleau
- 5 : Rouleau

L'objectif de cette étude est de vérifier la capacité du système à satisfaire ou non le niveau du critère demandé.

Modèle (schéma cinématique) du dispositif de mise en contact du rouleau de pression



Q0 . Calculer le degré d'hyperstaticité h à l'aide des formules rapides et en justifiant précisément votre raisonnement

Exigences	Critère	Niveau
... Le système doit maintenir plaqué le rouleau de dépose sur le panneau à draper Effort presseur Pression maxi $F = 100 \text{ N mini}$ 10 Bars ...

Données : $\vec{AB} = \frac{L}{2} \vec{x}_1$; $\vec{AC} = L \vec{x}_1$; $\vec{DB} = b \vec{x}_2$; $\vec{CE} = a \vec{x}_0$; $\vec{OA} = c \vec{z}_0$; $\vec{OD} = d \vec{z}_0$; $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \theta$; $(\vec{x}_0, \vec{x}_2) = \beta$.

$S = 300 \text{ mm}^2$: surface du piston du vérin ; $L = 400 \text{ mm}$; $a = 35 \text{ mm}$; $c = 150 \text{ mm}$; $d = 675 \text{ mm}$.

L'action mécanique exercée par le solide Si sur le solide Sj sera notée, au point P dans la base B :

$$\left\{ F_{i \rightarrow j} \right\}_P = \begin{pmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{pmatrix}_{(B)}$$

Q.1. Représenter le schéma cinématique dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$, en indiquant le paramétrage angulaire et en utilisant une couleur par classe d'équivalence.

Q.2. Exprimer aux points adéquats les torseurs suivants : $\{F_{0 \rightarrow 1}\}$ dans la base 2, $\{F_{0 \rightarrow 3}\}$ dans la base 0, $\{F_{0 \rightarrow 5}\}$ dans la base 0 et $\{F_{2 \rightarrow 3}\}$ dans la base 2.

Q.3. Après isolement de l'ensemble {1+2} en déduire la valeur des inconnues de liaison Z_{01} et Z_{23} .

Q.4. Déterminer les équations de la statique issues de l'isolement de {3+4+5} au point A en projection dans la base 0.

Q.5. En déduire une relation entre Z_{05} et X_{23} puis montrer que $\|F_{\text{air} \rightarrow 2}\| = \frac{(a + L \cos \theta) \cdot F}{\frac{L}{2} \cdot \sin(\beta - \theta)}$

Q.6. Exprimer $\tan \beta$ en fonction de d , c , L et θ .

Q.7. Calculer la valeur numérique de β et $\|F_{\text{air} \rightarrow 2}\|$ pour $\theta = 22^\circ$ et l'effort F du cahier des charges.

Q.8. Vu la pression d'air disponible, conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Dimensionnement de la liaison L45.

Afin de valider le dimensionnement de la liaison pivot L45 entre 4 et 5, on cherche à vérifier que la pression de contact maximale dans cette liaison ne dépasse pas 50 N/mm^2 . La géométrie de liaison est définie par son diamètre intérieur $d_0 = 16 \text{ mm}$ et sa longueur $L_0 = 20 \text{ mm}$.

On suppose que l'action de 5 sur 4 est modélisée par le torseur

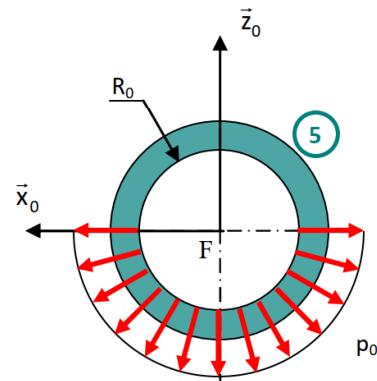
$$\{F_{5 \rightarrow 4}\}_F = \begin{cases} Z_{54} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{cases}$$

avec $Z_{54} = 100 \text{ N}$, et que la pression de contact p_0

qu'exerce 4 sur 5 est répartie de manière uniforme sur toute la surface de contact (comme cela est représenté sur la figure ci-dessous).

Q.9. Définir la valeur numérique de p_0 .

Q.10. Conclure quant au bon dimensionnement de la liaison L45.



Indication pour Q9 : annexe

Annexe

Modélisation des actions mécanique de contact exercée en P sur S par S1 (passage local/global)

L'action élémentaire $d\vec{F}$ définit sur la figure l'action de contact en M sur dS ; elle s'écrit dans le cas général :

$$d\vec{F} = -P dS \vec{n} + f P dS \vec{t}$$

avec P, la pression de contact et f, le coefficient de frottement. \vec{n} , normale « sortante » au contact et \vec{t} , vecteur tangentiel « opposé au mouvement » (cf. Lois de Coulomb ci-dessous). En l'absence de frottement, la seule force de pression s'exprime : $d\vec{F} = -P dS \vec{n}$

Méthodologie pour le passage local → global

- On modélise l'action mécanique locale au lieu de contact (en M)

$$\left\{ T_{S_1 \rightarrow S} \right\}_M = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{dF}(M) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M$$

- On transporte l'action mécanique locale au lieu de calcul (en P)

$$\left\{ T_{S_1 \rightarrow S} \right\}_P = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{dF}(M) \\ \overrightarrow{dF}(M) \wedge \overrightarrow{MP} \end{Bmatrix}_P$$

- On globalise l'action mécanique locale au lieu de calcul (en P)

$$\left\{ T_{S_1 \rightarrow S} \right\}_P = \begin{Bmatrix} \int_{M \in S} \overrightarrow{dF}(M) \\ \int_{M \in S} \overrightarrow{dF}(M) \wedge \overrightarrow{MP} \end{Bmatrix}_P$$

NB ; pour cette dernière étape, il faut être vigilant dans l'intégration et projeter sur une base fixe. On analysera également les symétries afin d'éviter tout calcul inutile.