DM

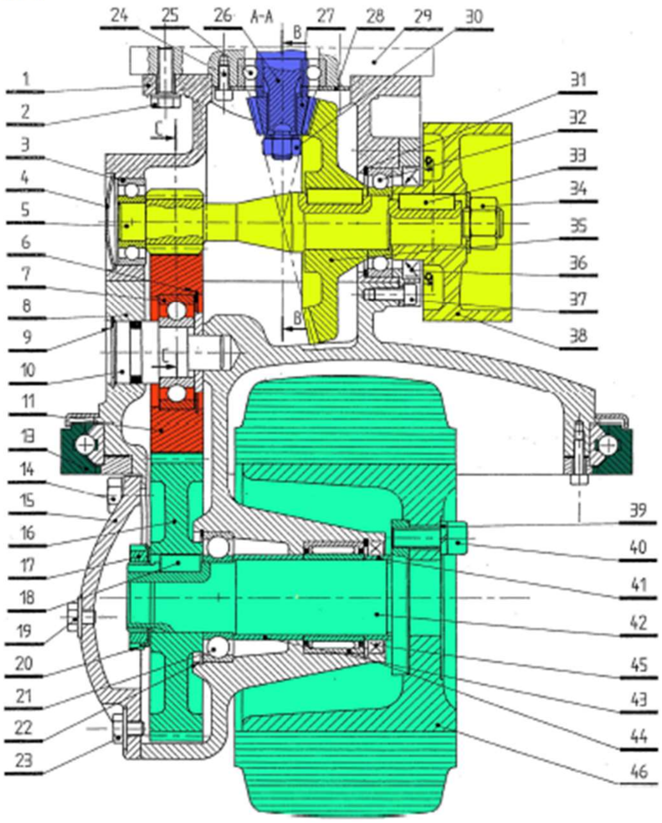
Cinématique des engrenages

EX1 : cinématique des engrenages

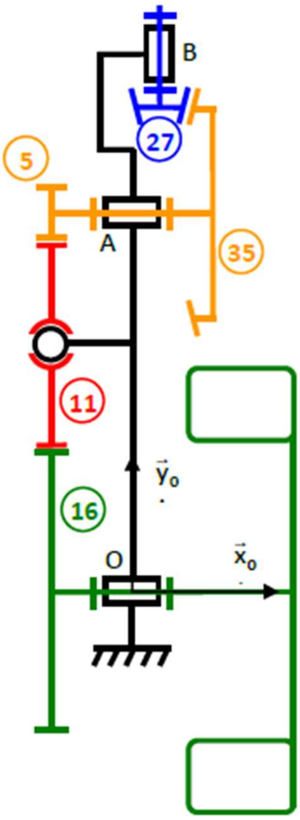
Réducteur de roue motrice de chariot élévateur - Corrigé

z_{27} = 16 dents (m=1,5), z_{35} = 84 dents (m=1,5), z_5 = 14 dents (m=1,5), z_{11} = 56 dents (m=1,5), z_{16} = 75 dents (m=1,5)

Q.1.



Q.2.



Q.3.

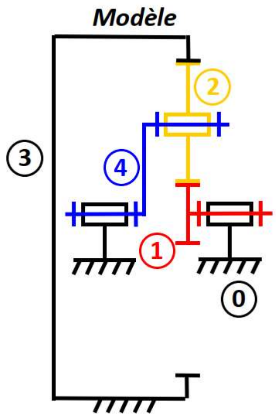
Repère de la roue	Module m (mm)	Nombre de dents z	Diamètre primitif D (mm)
27	1,5	16	24
35	1,5	84	126
5	1,5	14	21
11	1,5	56	84
16	1,5	75	112,5

Q.4. $r = \left|\frac{\omega_{16/1}}{\omega_{21/1}}\right| = \frac{Z_{27}.Z_5.Z_{11}}{Z_{35}.Z_{11}.Z_{16}} = \frac{Z_{27}.Z_5}{Z_{35}.Z_{16}} = \frac{16\times14}{84\times75} = 0,035$

D'où $N_{roue} = 0,035.N_{moteur} = 0,035.1500 = 53,4$ tr/min < 55 tr/min.

EX3 : cinématique des engrenages

Réducteur à train épicycloïdal du sécateur PELLENC - Corrigé



Q.1. Il s'agit d'un train épicycloïdal de type I.

$\rightarrow \boxed{\dfrac{\omega_{3/0}-\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}-\omega_{4/0}}=\lambda \text{ avec } \lambda=-\dfrac{Z_1}{Z_3}}$

Q.2. $\dfrac{\omega_{3/0}-\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}-\omega_{4/0}}=\lambda$ avec $\omega_{3/0}=0$

$\rightarrow -\lambda.\omega_{1/0}+(\lambda-1).\omega_{4/0}=0$

$\rightarrow \dfrac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}=\dfrac{\lambda}{(\lambda-1)} \rightarrow \dfrac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}=\dfrac{-\dfrac{Z_1}{Z_3}}{\left(-\dfrac{Z_1}{Z_3}-1\right)} \rightarrow \boxed{\dfrac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}=\dfrac{Z_1}{(Z_1+Z_3)}}$

Q.3. $\dfrac{340}{1500}=\dfrac{Z_1}{(Z_1+Z_3)} \rightarrow \dfrac{340}{1500}.(Z_1+Z_3)=Z_1 \rightarrow \boxed{340.Z_3=1160.Z_1}$

A.N. : $Z_3=\dfrac{1160}{340}.19=64{,}8$ soit 65 dents

Q.4. $\dfrac{d_1}{2}+d_2=\dfrac{d_3}{2} \rightarrow \dfrac{Z_1}{2}+Z_2=\dfrac{Z_3}{2} \rightarrow \boxed{Z_2=\dfrac{Z_3}{2}-\dfrac{Z_1}{2}}$

A.N. : $Z_2=\dfrac{Z_3}{2}-\dfrac{Z_1}{2}=\dfrac{65}{2}-\dfrac{19}{2}=23$ dents

EX2 : Torseur des actions mécaniques global de pression de l'air sur une aile d'avion.

Rappel - Méthode générale : modélisation des actions mécaniques - passage local → global

$$\begin{Bmatrix} d\vec{F}(M) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M \xrightarrow{\text{Changement de point}} \begin{Bmatrix} d\vec{F}(M) \\ ? \end{Bmatrix}_O \xrightarrow{\text{Intégration}} \{T_{air\rightarrow aile}\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{air\rightarrow aile} \\ \vec{M}_{O\ air\rightarrow aile} \end{Bmatrix}_O$$

Changement de point Intégration

1 $$\begin{Bmatrix} P(M).dS.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M \longrightarrow \begin{Bmatrix} P(M).dS.\vec{z} \\ \overrightarrow{OM}\wedge P(M).dS.\vec{z} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} P(M).dS.\vec{z} \\ \left(x\vec{x}+y\vec{y}\right)\wedge P(M).dS.\vec{z} \end{Bmatrix}_O$$

$$= \begin{Bmatrix} P(M).dS.\vec{z} \\ -xP(M).dS.\vec{y}+yP(M).dS.\vec{x} \end{Bmatrix}_O$$

2
Or $dS = y_{aile}(x).dx$ $\quad \overrightarrow{OM} = x.\vec{x}$

$y_{aile}(x) = c.x+d$

$y_{aile}(0) = a$ et $y_{aile}(L) = b$ $\longrightarrow$ $y_{aile}(x) = \dfrac{(b-a)}{L}.x+a$

3

$$\overrightarrow{M_{O,air\rightarrow aile}} = \iint_S \overrightarrow{OM}\wedge PdS\vec{z} = P\int_0^L x\vec{x}\wedge\left[\frac{(b-a)}{L}x+a\right]dx\vec{z} = -P\vec{y}\int_0^L x\left[\frac{(b-a)}{L}x+a\right]dx$$

$$\overrightarrow{M_{O,air\rightarrow aile}} = -P\vec{y}\int_0^L x\left[\frac{(b-a)}{L}x+a\right]dx = -P\vec{y}\left[\frac{(b-a)}{L}\frac{x^3}{3}+a\frac{x^2}{2}\right]_0^L = -P\vec{y}\left[\frac{(b-a)L^2}{3}+a\frac{L^2}{2}\right]$$

$$\overrightarrow{M_{O,air\rightarrow aile}} = -P\left[\frac{bL^2}{3}+\frac{aL^2}{6}\right]\vec{y}$$

4

$$\overrightarrow{R_{air\rightarrow aile}} = \iint_S PdS.\vec{z} = P\vec{z}\iint_S dS$$

$$dS = y(x)dx = \left[\frac{(b-a)}{L}x+a\right]dx$$

$$\overrightarrow{R_{air\rightarrow aile}} = P\vec{z}\int_0^L\left[\frac{(b-a)}{L}x+a\right]dx = P\vec{z}\left[\frac{(b-a)}{L}\frac{x^2}{2}+ax\right]_0^L = P\left[\frac{(b+a)L}{2}\right]\vec{z}$$

5

$$\{T_{air\rightarrow aile}\}_O = \begin{Bmatrix} P\dfrac{(a+b)}{2}L.\vec{z} = PS\vec{z} \\ -P\left[\dfrac{bL^2}{3}+\dfrac{aL^2}{6}\right].\vec{y} \end{Bmatrix}_O \qquad \text{avec} \qquad S_{aile} = \frac{(a+b)}{2}L$$

Rq : moment résultant uniquement selon $\vec{y}$ car la symétrie du chargement annule la composante selon $\vec{x}$

6 Supposons P est sur l'axe de l'aile par symétrie donc on a P(x,0)

$$\overrightarrow{M_{P,air\to aile}} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{M_{O,air\to aile}} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{R_{air\to aile}}$$

$$-P\left[\frac{bL^2}{3}+\frac{aL^2}{6}\right]\vec{y} = x\vec{x} \wedge P\left[\frac{(b+a)L}{2}\right]\vec{z}$$

$$x = \left[\frac{bL^2}{3}+\frac{aL^2}{6}\right] \Big/ \left[\frac{(b+a)L}{2}\right] = L\frac{(2b+a)}{3(b+a)}$$

7 Si l'aile est rectangulaire :

$$\left\{T_{air\to aile}\right\}_O = \left\{\begin{matrix} P.a.L.\vec{z} \\ -P\dfrac{aL^2}{2}.\vec{y} \end{matrix}\right\}_O \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P\ (L/2,0)}$$

Cohérent avec le chargement global équivalent suivant : une force globale équivalente F=P.a.L situé au milieu de l'aile.

8

$$\left\{T_{air\to aile}\right\}_O + \left\{T_{bati\to aile}\right\}_O = \left\{0\right\}_O \rightarrow \left\{T_{bati\to aile}\right\}_O = -\left\{\begin{matrix} P\dfrac{(a+b)}{2}L.\vec{z} = PS\vec{z} \\ -P\left[\dfrac{bL^2}{3}+\dfrac{aL^2}{6}\right].\vec{y} \end{matrix}\right\}_O \qquad \text{avec} \qquad S_{aile} = \frac{(a+b)}{2}L$$

EX4 : Cinématique du roulement à billes

1. Quelle est la direction de $\vec{V}_{C\in S/R}$ *? En explicitant les conditions de non glissement en I1 et en I2, montrer que:*

$$v = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2} \quad et \quad \omega = \frac{\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}{r_2 - r_1}$$

Le torseur cinématique, au point C, du mouvement de la bille par rapport au bâti est de la forme :

$$\{\mathcal{V}(S/R)\} = {}_C\begin{Bmatrix} \omega\vec{z} \\ v\vec{j} \end{Bmatrix}$$

(ω et v sont des valeurs algébriques).

Exprimons qu'au point I_1 la vitesse de glissement de (S) par rapport à (S_1) est nulle :

$$\vec{V}(I_1 \in S/S_1) = \vec{0}.$$

En passant par l'intermédiaire de R :

$$\vec{V}(I_1 \in S/R) - \vec{V}(I_1 \in S_1/R) = \vec{0}$$

$\vec{V}(I_1 \in S/R)$ se calcule à partir de la vitesse du point C de (S) :

$$\begin{aligned}\vec{V}(I_1 \in S/R) &= \vec{V}(C/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{CI_1} \\ &= v\vec{j} + \omega\vec{z} \wedge -\frac{1}{2}(r_2 - r_1)\vec{i} \\ &= \left[v - \frac{\omega}{2}(r_2 - r_1)\right]\vec{j}\end{aligned}$$

$\vec{V}(I_1 \in S_1/R)$ se calcule à partir de la vitesse du point O de (S_1) :

$$\begin{aligned}\vec{V}(I_1 \in S_1/R) &= \vec{V}(O/R) + \vec{\Omega}(S_1/R) \wedge \overrightarrow{OI_1} \\ &= \vec{0} + \omega_1\vec{z} \wedge r_1\vec{i} \\ &= \omega_1 r_1 \vec{j}.\end{aligned}$$

La condition de non glissement en I_1 se traduit donc par la relation :

$$v - \frac{\omega}{2}(r_2 - r_1) - \omega_1 r_1 = 0.$$

Par un calcul analogue, la condition de non glissement en I_2 se traduit par la relation :

$$v + \frac{\omega}{2}(r_2 - r_1) - \omega_2 r_2 = 0.$$

La résolution de ces deux équations permet d'exprimer v et ω :

$$\boxed{v = \frac{1}{2}(\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2)}$$

et

$$\boxed{\omega = \frac{\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}{r_2 - r_1}.}$$

Soit le point A tel que $\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(r2 - r1)\vec{j}$

2. En exprimant $\vec{V}_{C\in S3/R}$ *de deux façons différentes, déterminer* $\vec{\Omega}_{S3/R}$ *. En déduire* $\vec{\Omega}_{S/S3}$ *en fonction des données.*

Pour calculer la vitesse de glissement en A de (S) par rapport à (S_3) passons par l'intermédiaire du point C :

$$\vec{V}(A \in S/S_3) = \vec{V}(C \in S/S_3) + \vec{\Omega}(S/S_3) \wedge \overrightarrow{CA}$$

le point C étant lié à (S) et à (S_3) :

$$\vec{V}(C \in S/S_3) = \vec{0}.$$

Pour obtenir $\vec{\Omega}(S/S_3)$ appliquons la relation de composition des vecteurs rotation entre (S), (S_3) et R

$$\vec{\Omega}(S/S_3) = \vec{\Omega}(S/R) - \vec{\Omega}(S_3/R)$$

$\vec{\Omega}(S/R)$ a été calculé à la question précédente :

$$\vec{\Omega}(S/R) = \frac{\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}{r_2 - r_1}\,\vec{z}.$$

Pour avoir $\vec{\Omega}(S_3/R)$, qui est égal à $\vec{\Omega}(R_1/R)$, écrivons la relation entre les vecteurs vitesse des points O et C appartenant à R_1 :

$$\vec{V}(C/R) = \vec{V}(O/R) + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{OC}$$

$$\frac{1}{2}(\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2)\,\vec{j} = \vec{0} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \frac{1}{2}(r_1 + r_2)\,\vec{i}.$$

Par suite :

$$\vec{\Omega}(R_1/R) = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{r_1 + r_2}\,\vec{z}$$

et

$$\vec{\Omega}(S/S_3) = \frac{\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}{r_2 - r_1}\,\vec{z} - \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{r_1 + r_2}\,\vec{z}$$

soit

$$\vec{\Omega}(S/S_3) = \frac{2 r_1 r_2 (\omega_2 - \omega_1)}{r_2^2 - r_1^2}\,\vec{z}.$$

3 - Déterminer la vitesse de glissement $\vec{\mathbf{V}}_{A \in S/S_3}$ de la bille S par rapport à la cage S3 en A.

La vitesse de glissement cherchée s'écrit donc :

$$\vec{V}(A \in S/S_3) = \frac{2 r_1 r_2 (\omega_2 - \omega_1)}{r_2^2 - r_1^2}\,\vec{z} \wedge \frac{1}{2}(r_2 - r_1)\,\vec{j}$$

soit

$$\boxed{\vec{V}(A \in S/S_3) = \frac{r_1 r_2}{r_2 + r_1}(\omega_2 - \omega_1)\,\vec{i}.}$$