Centre d'inertie G d'un solide de masse m_s

O, un point quelconque

Bs , base liée au solide

$$\boxed{m_S.\overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OM}.dm} \qquad \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}_{Bs}$$

$$x_G = \frac{1}{m_s}\int_S x.dm \qquad y_G = \frac{1}{m_s}\int_S y.dm \qquad z_G = \frac{1}{m_s}\int_S z.dm$$

Centre d'inertie G d'un système de n solides Si de masse mi

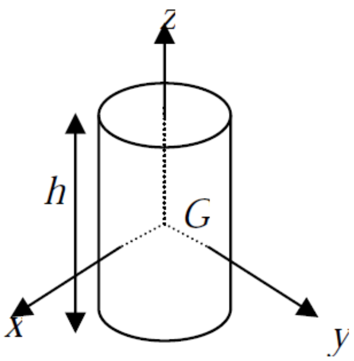
$$M.\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} m_i.\overrightarrow{OG}_i \quad \text{avec} \quad M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Forme générale de la matrice inertie en O dans la base Bs associé au solide S

$$I(O,S) = \begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2).dm & -\int_S x.y.dm & -\int_S x.z.dm \\ -\int_S x.y.dm & \int_S (x^2+z^2).dm & -\int_S y.z.dm \\ -\int_S x.z.dm & -\int_S y.z.dm & \int_S (x^2+y^2).dm \end{bmatrix}_{Bs} \qquad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{Bs}$$

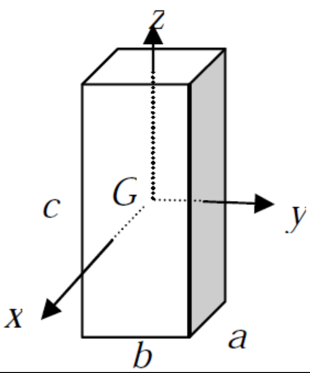
Matrice d'inertie classiques

Cylindre de masse m , de hauteur h et de rayon R



$$I(G,S) = \begin{bmatrix} m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\left(\frac{R^2}{2}\right) \end{bmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$$

Parallelépipède de masse m et de coté a,b,c



$$I(G,S) = \begin{bmatrix} \frac{m(b^2+c^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(a^2+c^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(b^2+a^2)}{12} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Théorème de Huygens pour un solide de masse m_s

$$I(A,S) = I(G,S) + m_s \begin{bmatrix} (y_G{}^2+z_G{}^2) & -x_G.y_G & -x_G.z_G \\ -x_G.y_G & (x_G{}^2+z_G{}^2) & -y_G.z_G \\ -x_G.z_G & -y_G.z_G & (x_G{}^2+y_G{}^2) \end{bmatrix}_{Bs} \qquad \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}_{Bs}$$

Torseur cinétique	$\{C(S/R)\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c}(S/R) = \int_S \vec{V}(\mathrm{M,S}/R).dm \\ \vec{\sigma}(A,S/R) = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(\mathrm{M,S}/R).dm \end{array} \right\}_A$
Résultante cinétique	$\overrightarrow{R_c}(S/R) = m_s.\vec{V}(G,S/R)$
Moment cinétique	$\vec{\sigma}(A,S/R) = I(A,S).\vec{\Omega}(S/R) + m_s.\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A,S/R)$
Au centre de gravité ou d'inertie G de S	$\vec{\sigma}(G,S/R) = I(G,S).\vec{\Omega}(S/R)$
En un point A fixe /R	$\vec{\sigma}(A,S/R) = I(A,S).\vec{\Omega}(S/R)$
Changement de point	$\vec{\sigma}(B,S/R) = \vec{\sigma}(A,S/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_c}(S/R) = \vec{\sigma}(A,S/R) + m_s.\overrightarrow{BA} \wedge \vec{V}(G,S/R)$
Torseur dynamique	$\{D(S/R)\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d}(S/R) = \int_S \vec{\Gamma}(\mathrm{M,S}/R).dm \\ \vec{\delta}(A,S/R) = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(\mathrm{M,S}/R).dm \end{array} \right\}_A$
Résultante dynamique	$\overrightarrow{R_d}(S/R) = m_s.\vec{\Gamma}(G,S/R)$
Moment dynamique	$\vec{\delta}(A,S/R) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(A,S/R)\right)_R + m_s.\vec{V}(A,S/R) \wedge \vec{V}(G,S/R)$
Au centre de gravité ou d'inertie G de S	$\vec{\delta}(G,S/R) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(G,S/R)\right)_R$
En un point fixe A/R	$\vec{\delta}(A,S/R) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(A,S/R)\right)_R$
Changement de point	$\vec{\delta}(B,S/R) = \vec{\delta}(A,S/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_d}(S/R) = \vec{\delta}(A,S/R) + m_s.\overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Gamma}(G,S/R)$
Principe Fondamentale de la dynamique Appliqué à un système de solides Σ	Pour le système Σ en mouvement dans $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ galiléen, la résultante dynamique est égale à la résultante des efforts extérieurs appliqués sur Σ : $\overrightarrow{R_d}(\Sigma/R) = \sum \vec{R}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$
	Pour le système Σ en mouvement dans $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ galiléen, le moment dynamique en A est égal à la somme des moments en A des efforts extérieurs appliqués sur Σ : $\vec{\delta}(A,\Sigma/R) = \sum \overrightarrow{M}(A,\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$

NB1 : lorsque le champ de gravité est uniforme, on peut confondre le terme centre d'inertie et celui de centre de gravité

NB2 : l'indication /R (par rapport à R) signifie que toutes les dérivées sont faites par rapport à R et que R est le référentiel Galiléen dans lequel est appliqué le PFD