GEOMETRIE DES SOLIDES

A. Centre de gravité pour un solide

Le centre de gravité d'un solide est défini comme étant le point G tel que :

$$\int_{M \in S} \overrightarrow{MG}\, dm = \vec{0}$$

ou encore : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{M \in S} \overrightarrow{OM}\, dm \quad ; \quad \forall O$

B. Centre de gravité pour un ensemble de solides

Soit un système matériel ou un ensemble de solides S de masse totale m_S, tel que $S = \sum_{k=1}^{n} S_k$. La relation de CHASLES sur l'intégrale nous permet d'écrire :

$$m_S \overrightarrow{OG} = \iiint_S \overrightarrow{OM}_i dm_i = \iiint_{S_1} \overrightarrow{OM}_i dm_i + \iiint_{S_2} \overrightarrow{OM}_i dm_i + \ldots + \iiint_{S_n} \overrightarrow{OM}_i dm_i .$$

Or : $\iiint_{S_k} \overrightarrow{OM}_i dm_i = m_k \overrightarrow{OG}_k$. Donc : $m_S \overrightarrow{OG} = m_1 \overrightarrow{OG}_1 + m_2 \overrightarrow{OG}_2 + \ldots + m_n \overrightarrow{OG}_n$.

D'où :

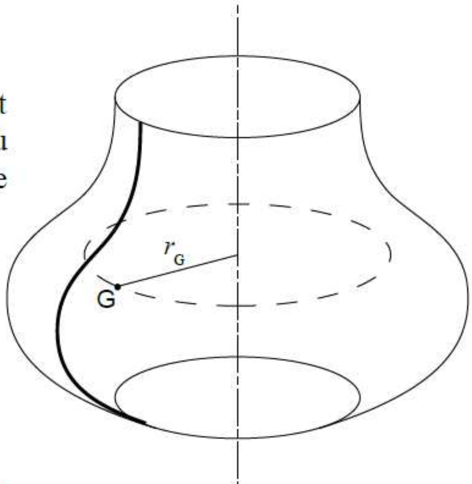
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_S} \sum_{k=1}^{n} m_k \overrightarrow{OG}_k$$

Le centre de gravité d'un ensemble de solides est le barycentre des centres de gravité de chacun des solides, affectés chacun d'un poids correspondant à la masse du solide.

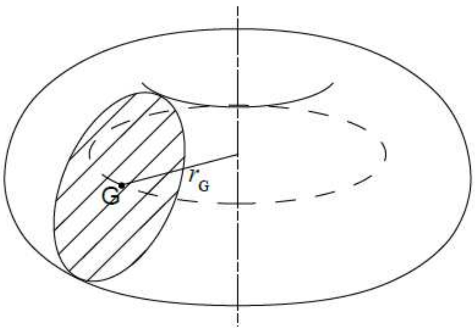
C. Premier théorème de Guldin

L'aire d'une surface engendrée par une courbe plane tournant autour d'un axe de son plan, ne la traversant pas, est égale au produit de la longueur de la courbe par le périmètre du cercle décrit par son centre d'inertie.

$$S = 2\pi L r_G$$



D. Second théorème de Guldin

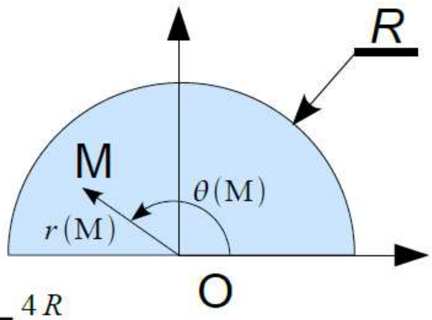


Le volume d'un solide engendré par une surface plane tournant autour d'un axe de son plan, ne la traversant pas est égal au produit de l'aire de la surface par le périmètre du cercle décrit par son centre d'inertie.

$$V = 2\pi S r_G$$

E. Exemples de calcul de position de centre de gravité

Demi-disque homogène de rayon *R*. (masse surfacique λ)



$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{m}\int_{M\in S}\overrightarrow{OM}\,dm$$

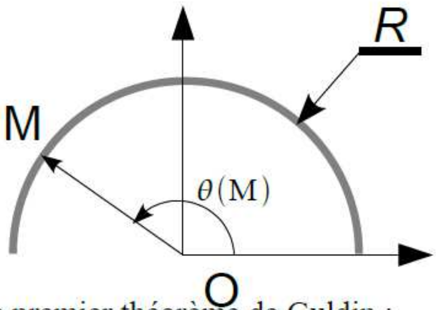
Par symétrie, on sait que G appartient à $(O,\vec{y})$

d'où : $\overrightarrow{OG}\cdot\vec{y}=\frac{1}{\lambda S}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{R}\lambda r^2\sin\theta\,dr\,d\theta$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{2}{\pi R^2}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{R}r^2\sin\theta\,dr\,d\theta=\frac{2}{\pi R^2}\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{R^3}{3}\sin\theta\,d\theta=\frac{4R}{3\pi}$$

Ce résultat nous permet de retrouver le volume d'une sphère par application du second théorème de Guldin : $V=2\pi S r_G=2\pi\frac{\pi R^2}{2}(\frac{4R}{3\pi})=\frac{4}{3}\pi R^3$. Inversement, la connaissance de la valeur du volume de la sphère aurait pu nous donner la position du centre de gravité du demi-disque.

Demi-cercle homogène de rayon *R*. (masse linéique λ)



$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{m}\int_{M\in S}\overrightarrow{OM}\,dm$$

de même : $\overrightarrow{OG}\cdot\vec{y}=\frac{1}{\lambda L}\int_{\theta=0}^{\pi}\lambda R^2\sin\theta\,d\theta$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\pi R}\int_{\theta=0}^{\pi}R^2\sin\theta\,d\theta=\frac{2R}{\pi}$$

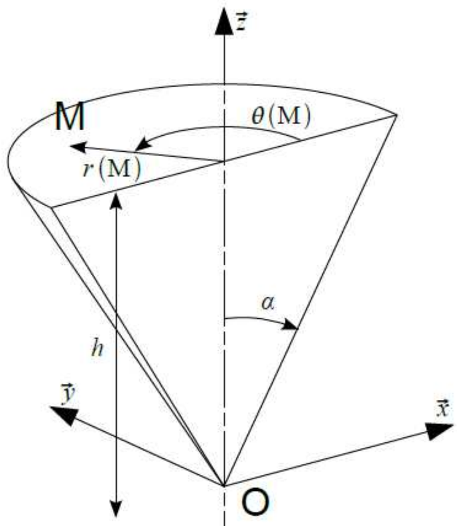
On peut ainsi calculer la surface d'une sphère de rayon R : d'après le premier théorème de Guldin :

$$S=2\pi L r_G=2\pi\pi R\times(\frac{2R}{\pi})=4\pi R^2$$

Position du centre de masse d'un demi-cône de demi-angle au sommet α et de hauteur *h*.

- Première méthode : calcul direct

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\rho V}\int_{z=0}^{h}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{z\tan\alpha}\rho(r\vec{u}_r+z\vec{z})r\,dr\,d\theta\,dz$$



Par symétrie, on sait que G appartient au plan $(O,\vec{y},\vec{z})$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\rho V}\int_{z=0}^{h}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{z\tan\alpha}\rho(r\sin\theta\,\vec{y}+z\vec{z})r\,dr\,d\theta\,dz$$

On intègre successivement (en commençant par le « milieu ») :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\rho V}\int_{z=0}^{h}\int_{\theta=0}^{\pi}\rho[\frac{(z\tan\alpha)^3}{3}\sin\theta\,\vec{y}+z\frac{(z\tan\alpha)^2}{2}\vec{z}]d\theta\,dz$$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{V}\int_{z=0}^{h}[\frac{2(z\tan\alpha)^3}{3}\vec{y}+\pi z\frac{(z\tan\alpha)^2}{2}\vec{z}]dz$$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{V}[\frac{2h^4\tan^3\alpha}{12}\vec{y}+\frac{\pi h^4\tan^2\alpha}{8}\vec{z}]$$

or $V=\frac{1}{6}\pi h R^2=\frac{1}{6}\pi h^3\tan^2\alpha\;\rightarrow\;\overrightarrow{OG}=[\frac{h\tan\alpha}{\pi}\vec{y}+\frac{3h}{4}\vec{z}]=[\frac{3h\tan\alpha}{4}\times\frac{4}{3\pi}\vec{y}+\frac{3h}{4}\vec{z}]$

- Seconde méthode : en considérant le demi-cône comme un empilement de demi-disques :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{m_{(1/2\text{-cône})}}\int_{z=0}^{h}m_{(1/2\text{-disque})}[\frac{4R(z)}{3\pi}\vec{y}+z\vec{z}]dz\quad\text{avec}\quad R(z)=z\tan\alpha\quad\text{et}\quad m_{(1/2\text{-disque})}=\rho\frac{\pi(z\tan\alpha)^2}{2}$$

d'où : $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\rho V}\int_{z=0}^{h}\rho\frac{\pi(z\tan\alpha)^2}{2}\times[\frac{4z\tan\alpha}{3\pi}\vec{y}+z\vec{z}]dz$ soit la même intégrale que la 1[ère] méthode.