I. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

Principe = théorie vérifiée par l'expérience, donc valable dans un domaine d'étude précis.

1. PROBLEMATIQUE

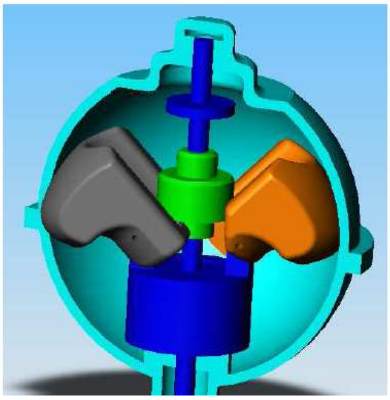
Cinématique : étude du mouvement d'un ou plusieurs solides sans se poser la question : qu'est-ce qui crée, modifie ou entretient ce mouvement ?

→ des actions mécaniques dans les liaisons, moteurs ou résistants…

Dynamique : déterminer les relations entre les paramètres cinématiques du mouvement et les efforts extérieurs appliqués au système étudié.

Hypothèse : On étudie un ou plusieurs solides indéformables, on parle de système de solides, à masse conservative.

- Exemple : Régulateur centrifuge de la direction assistée d'une Xantia.



Considérons le régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de Citroën. Ce système dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse.

L'axe **1** est entraîné en rotation à une vitesse proportionnelle à celle du véhicule, les masselottes **2 et 2'** montées sur cet axe s'écartent de leur axe sous l'effet de l'accélération centripète. En s'écartant, elles translatent la coulisseau **3** et inclinent le levier **3** par l'intermédiaire du ressort **(voir annexe 1)**.

L'inclinaison du levier **3** entraîne la translation de l'axe **5** et donc l'ouverture plus ou moins grande de l'orifice de haute pression de l'huile circulant dans la direction assistée.

Ce régulateur permet alors d'adapter l'assistance au volant en fonction de la vitesse du véhicule.

Nous chercherons à **déterminer l'inclinaison des masselottes en fonction des masses et des efforts extérieurs**.

2. TORSEUR DYNAMIQUE

Torseur dynamique = quantités d'accélérations de tous les points du système de solides Σ.

Soit un système de solides Σ en mouvement par rapport à un repère galiléen $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Soit A un point quelconque de l'espace.

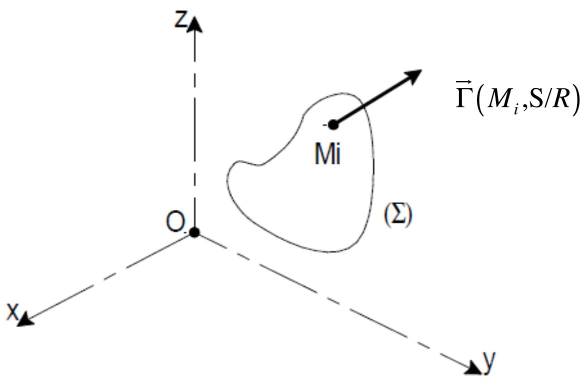


Fig. 1

En Mi :

→ $\vec{\Gamma}(M_i,S/R).dm$: quantité d'accélération élémentaire (**N**:homogène à une force !

→ $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M_i,S/R).dm$: moment dynamique élémentaire en A (**N.m** :homogène au moment d'une force !!)

Il suffit de sommer sur le système Σ pour avoir le torseur dynamique de Σ en A par rapport au repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:

$$\{D(\Sigma/R)\}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_d}(\Sigma/R) = \int_\Sigma \vec{\Gamma}(M,\Sigma/R).dm \\ \vec{\delta}(A,\Sigma/R) = \int_\Sigma \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M,\Sigma/R).dm \end{Bmatrix}_A$$

- **Résultante dynamique :**

La quantité $\overrightarrow{R_d}(\Sigma/R)$ est la **résultante dynamique du système Σ** dans son mouvement par rapport au repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Unités : **N**.

La résultante dynamique dépend ***uniquement des paramètres de position*** des solides de Σ dans l'espace et de leurs dérivées premières et secondes. Cette forme n'est pas utilisée pour le calcul. On verra dans le paragraphe II comment calculer cette résultante.

- **Moment dynamique :**

La quantité $\vec{\delta}(A,\Sigma/R)$ est appelée **moment dynamique en A du système Σ** dans son mouvement par rapport au repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Unités : **N.m**

De même, le moment dynamique ***ne dépend que des paramètres de position*** des solides.
Il s'agit d'un moment d'un torseur, donc il est calculable en tout point de l'espace à l'aide de la formule classique d'un champ de moments d'un torseur :

Changement de point : $\vec{\delta}(B,\Sigma/R) = \vec{\delta}(A,\Sigma/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_d}(\Sigma/R)$

3. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE : PFD

Enoncé : Il existe au moins un repère galiléen R tel que pour tout système matériel Σ, le torseur dynamique dans ce repère R en un point A de l'espace est égal à chaque instant à la somme des torseurs en A des efforts extérieurs appliqués à Σ.

$$\{D(\Sigma/R)\}_A = \Sigma\{T(\bar{\Sigma} \to \Sigma)\}_A$$

repère galiléen= pour nos études, tout repère lié à la terre sera considéré comme Galiléen.

1. Théorème de la résultante dynamique TRD

Pour le système Σ en mouvement dans $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ galiléen, la résultante dynamique est égale à la résultante des efforts extérieures appliquées sur Σ :

$$\overrightarrow{R_d}(\Sigma/R) = \sum \vec{R}(\bar{\Sigma} \to \Sigma)$$

La projection de cette équation vectorielle dans une BOND nous donne 3 équations scalaires, **3 équations différentielles du mouvement** liant les efforts extérieurs aux paramètres cinématiques.

- il y aura dans ces équations **uniquement des forces** ! pas de couple moteur, moment de freinage etc…

2. Théorème du moment dynamique TMD

Pour le système Σ en mouvement dans $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ galiléen, le moment dynamique en A est égal à la somme des moments en A des efforts extérieures appliquées sur Σ :

$$\vec{\delta}(A,\Sigma/R) = \sum \vec{M}(A,\bar{\Sigma} \to \Sigma)$$

La projection de cette équation vectorielle dans une BOND nous donne 3 équations scalaires, **3 équations différentielles du mouvement** liant les efforts extérieurs aux paramètres cinématiques.

- il y aura dans ces équations les moments des forces présentes dans le TRD plus les **couples moteurs, couples résistants** etc...

4. APPLICATION DU PRINCIPE FONDAMENTAL

Rarement, dans les problèmes proposés, nous aurons à écrire les 6 équations du PFD pour résoudre le problème posé. Parfois quelques équations équations suffisent, il faut déterminer quel théorème appliquer et sur quel axe de projection.

- Exemple 1 : Transformation de mouvement (loi entrée sortie Dynamique)

Le maneton **6** est lié au bâti par une liaison pivot d'axe $B(\overrightarrow{z_0})$ et est entraîné par un couple moteur $C_m\overrightarrow{z_0}$. La croix de Malte **5** est liée au bâti par une liaison pivot d'axe $C(\overrightarrow{z_0})$.

Un couple résistant s'exerce sur **5** autour de l'axe $C(\overrightarrow{z_0})$: $C_r\overrightarrow{z_0}$.

La liaison entre **6** et **5** au niveau du galet peut être assimilée à une liaison ponctuelle de normale $(A,\vec{v})$:

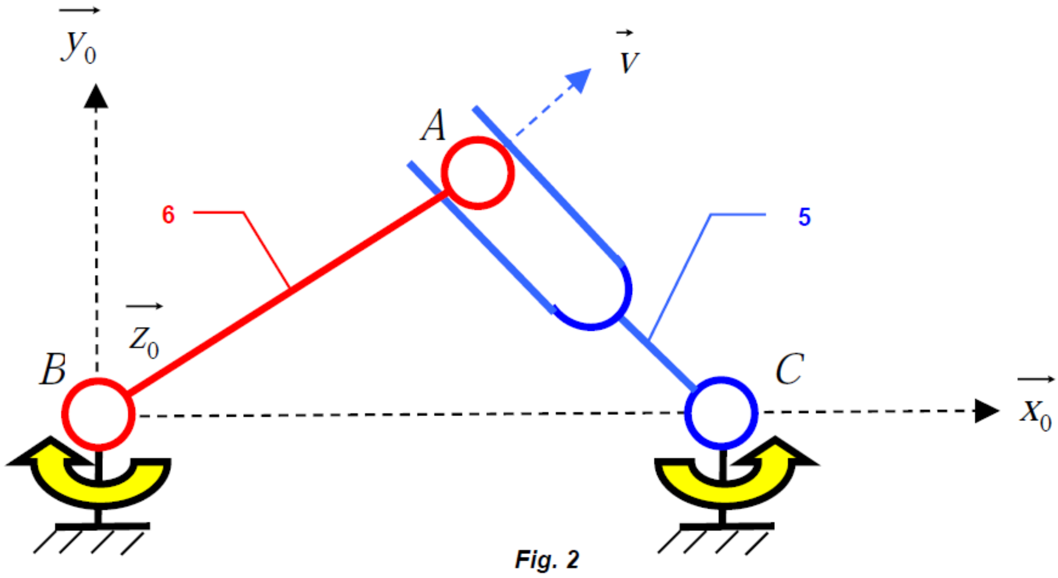


Fig. 2

$$\{T_{5\to6}\}_A=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{F_{5\to6}}=A.\vec{v}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_A \quad \{T_{0\to5}\}_C=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{F_{0\to5}}\\ \overrightarrow{M(C,0/5)}\end{Bmatrix}_C \quad avec \quad \overrightarrow{M(C,0/5)}.\vec{z}_0=0$$

$$\{T_{0\to6}\}_B=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{F_{0\to6}}\\ \overrightarrow{M(B,0/6)}\end{Bmatrix}_B \quad avec \quad \overrightarrow{M(B,0/6)}.\vec{z}_0=0$$

Les actions de pesanteur **sont négligées** et la croix de Malte **5** tourne librement autour de son axe. On souhaite exprimer C_m en fonction de C_r lorsque le mouvement est connu.

- Quel(s) système(s) à isoler, quel théorème utiliser et sur quel axe de projection ?

  2 inconnues donc 2 équations !!

• On isole 6, pour faire apparaître Cm, il faut une **équation de moment dynamique** en B en projection sur $\overrightarrow{z_0}$, elle fera apparaître le moment en B de $\overrightarrow{F_{5\to6}}$:
$$\overrightarrow{\delta(B,6/0)}.\overrightarrow{z_0}=C_m+\left(\overrightarrow{BA}\wedge A.\vec{v}\right).\overrightarrow{z_0}$$

• On isole 5, pour connaître A sans faire intervenir les actions de la pivot en C, il faut écrire l'**équation de moment dynamique** en C sur $\overrightarrow{z_0}$:
$$\overrightarrow{\delta(C,5/0)}.\overrightarrow{z_0}=C_r+\left(\overrightarrow{CA}\wedge -A.\vec{v}\right).\overrightarrow{z_0}$$

➔ En faisant disparaitre A, on peut mettre en place une relation « entrée sortie » dynamique entre C_m et C_r.

- Exemple 2 : Banc d'essai de suspension de moto (vu en TP)

La liaison entre le châssis **5** et le bâti **1** est une liaison glissière d'axe $(O,\vec{y})$. La liaison entre la traverse **9** et la roue **6** est une liaison ponctuelle, les actions de **9** sur **6** peuvent être modélisées par $\{T_{9\to6}\}_I = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{9\to6}} = F.\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I$ en négligeant la faible inclinaison de la traverse.

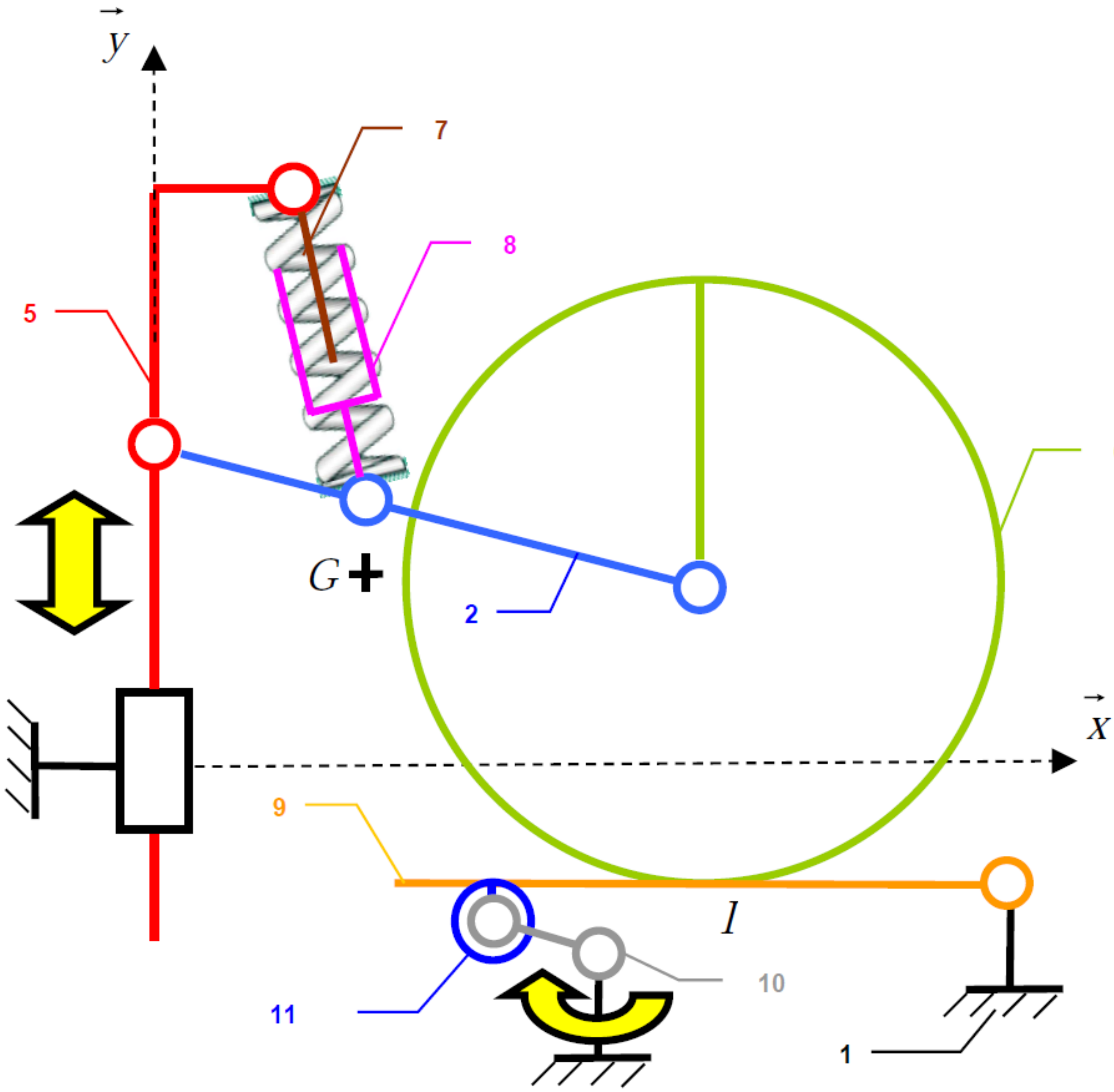


Fig. 3

Le champ de pesanteur est défini par $\vec{g} = -g.\vec{y}$. Le repère lié à 1 est considéré comme galiléen.
Connaissant le mouvement (à l'aide d'un enregistrement), on souhaite connaître F.

- Quel(s) système(s) à isoler, quel théorème utiliser et sur quel axe de projection ?

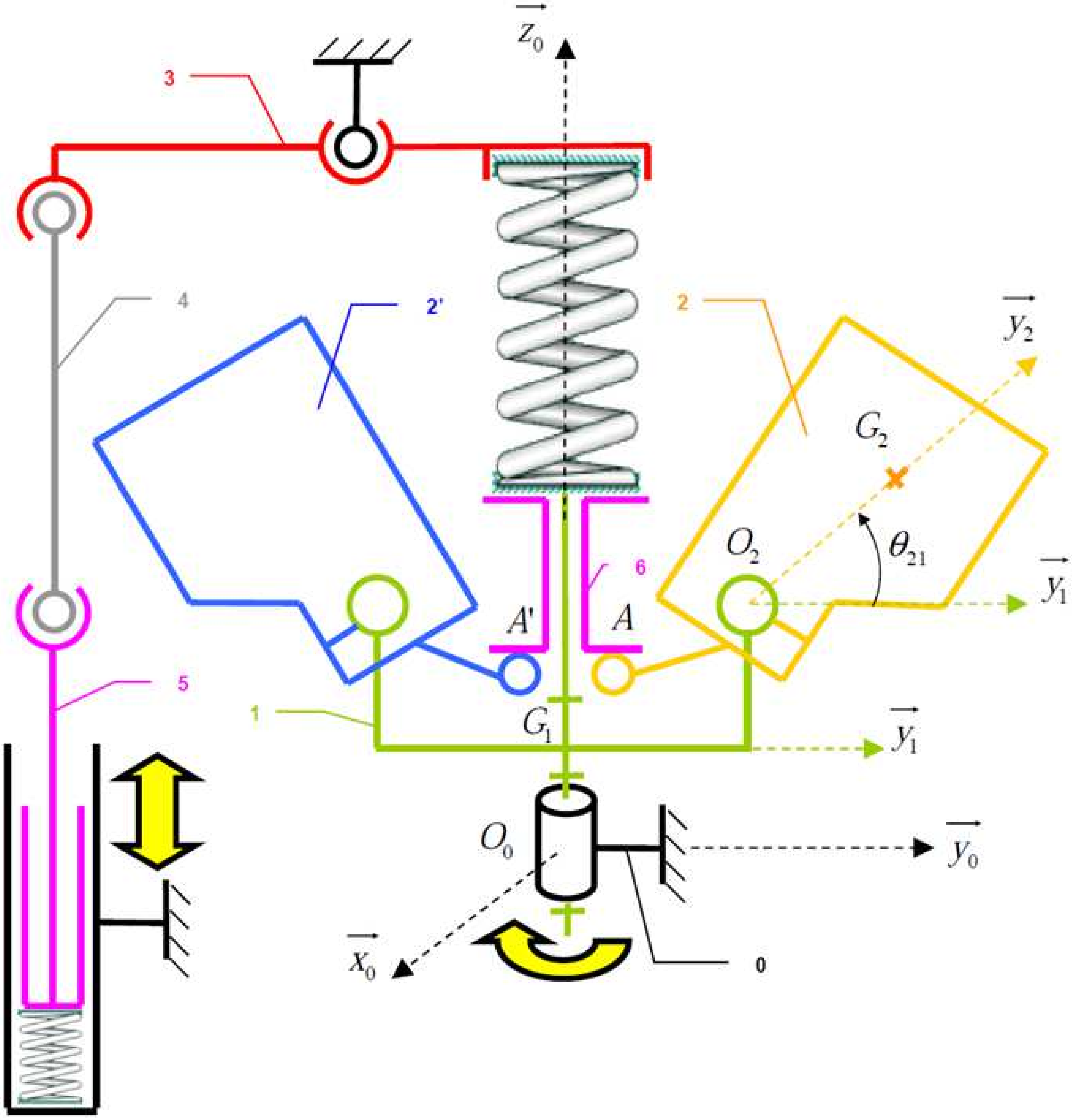
1 inconnue donc 1 équation scalaire suffit, c'est une force, on utilise le **théorème de la résultante dynamique** à l'ensemble en mouvement en projection sur l'axe $\vec{y}$: $\mathrm{M}.\overrightarrow{\Gamma(G/R)}.\vec{y} = -\mathrm{M}g + F + 0$

➔ L'analyse relative de la valeur des termes Mg et $\mathrm{M}.\overrightarrow{\Gamma(G/R)}.\vec{y}$ permettra de conclure sur la possibilité de décollement (suppression de contact entre 9 e t 6).

- Exemple 3 : Régulateur centrifuge

Lorsque la pièce **1** tourne, la masselotte **2** pivote autour de 0_2. Cette dernière exerce en A une action mécanique sur **6**. Cette action mécanique transmise par le ressort s'exerce sur la pièce **3** (susceptible de pivoter autour). Ce levier **3** communique cette action mécanique à la bielle **4**, elle-même exerçant une action mécanique sur **5**.

L'action mécanique de **6** sur **2** est modélisée par : $\{T_{6\to 2}\}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{6\to 2}} = Z_{62}.\overrightarrow{y_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$



Les actions de pesanteur **sont négligées sauf pour la masselotte 2**. On souhaite exprimer Z_{62} en fonction des paramètres de mouvement, de masse et d'inertie. Ceci nous permettra, entre autre, de quantifier l'influence sur la valeur de Z_{62} de la vitesse de rotation de 1/0 et celle de la masse de **2** ainsi que celle d'autres paramètres liés aux propriétés de masse sur la valeur de Z_{62}.Cet exemple met par ailleurs bien en évidence la limite de la statique des solide et de la cinématique ; en effet ici, le mouvement permet de générer une action mécanique.

Il s'agit donc de mettre en place une relation entre paramètres du mouvement, propriétés de masse et action mécanique ; relation que les fermetures cinématiques ou autres applications du PFS ne peuvent produire.

- Quel(s) système(s) à isoler, quel théorème utiliser et sur quel axe de projection ?

La pièce **2** est directement concernée, c'est elle qui pivote sous l'action de la force centrifuge et c'est elle qui subit de la part de **6** l'action mécanique Z_{62}. Isolons la masselotte **2**, faisons le BAME :

$$\{T_{1\to 2}\} = {}_{O_2}\begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_1,-,-)} \qquad \{T_{pes\to 2}\} = {}_{G_2}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -m_2.g & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}$$

$$\{T_{6\to 2}\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -Z_{62} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$$

On pose $\overrightarrow{AO_2} = a\vec{y}_2 + b\vec{z}_2$ → $\{T_{6\to 2}\} = {}_{O_2}\begin{Bmatrix} 0 & \delta Z_{62} \\ 0 & 0 \\ -Z_{62} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$

1 inconnue donc 1 équation scalaire suffit, on utilise le **théorème du moment dynamique** en O_2 en projection sur $\vec{x}_2$ pour ne pas avoir d'inconnue de liaisons de la fonction pivot entre **1** et **2** dans nos équations. On dit que l'on exploite judicieusement le « zéro » du torseur d'action transmissible de la liaison pivot 1/2 en O_2.

$$\vec{\delta}(O_2,2/0).\vec{x}_2 = \sum \overrightarrow{M}(O_2, ext \to 2).\vec{x}_2$$

RQ : si nous avions souhaité déterminer les actions mécaniques transmissibles par la liaison pivot, nous aurions du utilisé les 5 autres équations suivantes :

Théorème du moment dynamique en *O2* en projection sur $\vec{y}_2$ et $\vec{z}_2$

Théorème de la résultante dynamique en projection sur $\vec{x}_2$, $\vec{y}_2$ et $\vec{z}_2$

Quelque soit l'exemple, il faut désormais être capable de calculer la résultante dynamique de Σ et son moment dynamique en tout point. C'est l'objet du paragraphe II.

II. CINETIQUE

1. CARACTERISTIQUES D'INERTIE DES SOLIDES

1. Masse

Soit S un solide de volume V, M un point de volume dV de ce solide. La masse du solide S est $\boxed{m(S)=\int \rho(M).dV}$. Avec ρ, masse volumique du matériau constituant S en $kg.m^{-3}$.

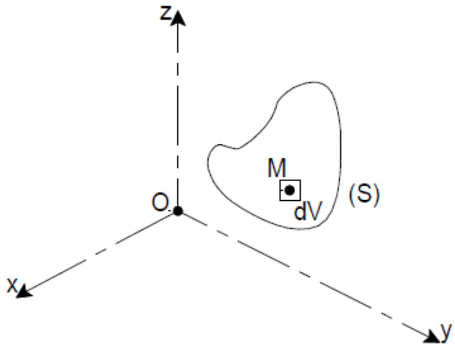


Fig. 4

Exemples : ρ= 7800 $kg.m^{-3}$ pour l'acier ; ρ= 2700 $kg.m^{-3}$ pour l'aluminium ; ρ= 8900 $kg.m^{-3}$ pour le bronze.

Cas particulier du solide homogène : ρ=cste → $\boxed{m(S)=\rho.V}$.

2. Centre d'inertie

a. Définition

Le centre de gravité d'un solide est le point unique G, tel que : $\boxed{\int_S \overrightarrow{GM}.dm=\vec{0}}$

b. Position

$\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OM}$ d'où $\int_S\left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OM}\right).dm=\int_S\overrightarrow{GO}.dm+\int_S\overrightarrow{OM}.dm=\vec{0}$ et finalement $\boxed{m_S.\overrightarrow{OG}=\int_S\overrightarrow{OM}.dm}$.

Cette relation permet d'obtenir les coordonnées du centre de gravité G dans le repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.
On projette sur les axes du repère et on obtient :

$$x_G=\frac{1}{m_s}\int_S x.dm \qquad y_G=\frac{1}{m_s}\int_S y.dm \qquad z_G=\frac{1}{m_s}\int_S z.dm$$

avec

$$\overrightarrow{OG}=\left|\begin{array}{l}x_G\\y_G\\z_G\end{array}\right. \text{ dans } R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$$

c. Symétries

Si un solide S ou un système de solides Σ possèdent **un plan ou un axe de symétrie** matériel alors le centre de gravité G **appartient à ce plan ou cet axe**.

d. Systèmes de solides

Soit Σ un système de n solides Si, i=1 à n, de centre de gravité G_i et de masse mi. Le centre de gravité G du système Σ de masse M est tel que : $\boxed{M.\overrightarrow{OG}=\sum_{i=1}^{n}m_i.\overrightarrow{OG_i}}$ et $M=\sum_{i=1}^{n}m_i$.

- Exemple :

Déterminer la position du centre de gravité d'un demi cylindre de rayon R et de hauteur h de masse $\dfrac{\rho.\pi R^2.h}{2}$

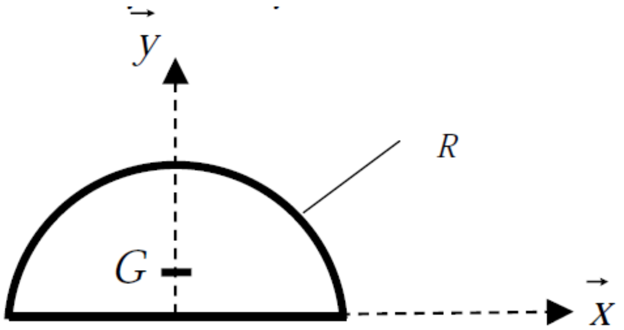


Fig. 5

Deux plans de symétrie donc $x_G = 0$ et $z_G = 0$.

$$y_G = \frac{2}{\rho.\pi R^2.h}\int_0^R\int_0^\pi\int_{-h/2}^{h/2} r.\sin\theta.\rho.r.dr.d\theta.dz = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R r^2.dr\int_0^\pi \sin\theta.d\theta = \frac{4R}{3\pi} \;;\; \boxed{y_G = \frac{4R}{3\pi}}$$

3. Matrice d'inertie

La matrice d'inertie d'un solide **caractérise la répartition géométrique de la matière autour d'un point** du solide.
La matrice d'inertie s'exprime en un point et dans une BOND quelconque.

a. *Définition*

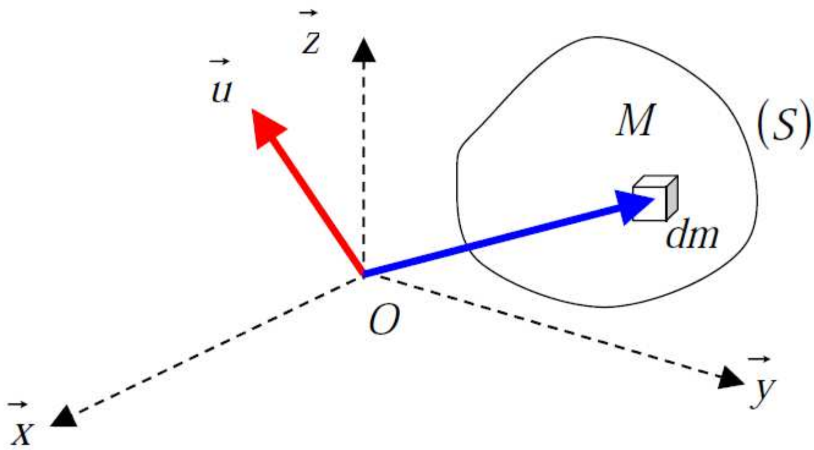


Fig. 7

Soit un solide S et un point matériel de masse dm et $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère associé. B est la base du repère. La matrice d'inertie de S au point O de l'espace est l'opérateur qui a tout vecteur $\vec{u}$ fait correspondre le vecteur :

$$\vec{u} \rightarrow I(O,S).\vec{u} = \int_S \overline{OM}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overline{OM}\right).dm$$

b. *Calcul*

Calculons les termes de la matrice d'inertie : on pose $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_B$ dans $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

$$\overline{OM}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overline{OM}\right) = -\overline{OM}\wedge\left(\overline{OM}\wedge\vec{u}\right) = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} yc - zb \\ za - xc \\ xb - ya \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -y^2a - z^2a + xy.b + xz.c \\ -x^2b - z^2b + yz.c + xy.a \\ -x^2c - y^2c + xz.a + yz.b \end{vmatrix}$$

En utilisant la notation matricielle, on remarque que ce terme peut s'écrire comme le produit de deux matrices :

$\overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -x.y & -x.z \\ -x.y & x^2+z^2 & -y.z \\ -x.z & -y.z & x^2+y^2 \end{bmatrix}_B \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_B$ .En intégrant sur S on obtient en simplifiant par $\vec{u}$:

$$I(O,S) = \begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2).dm & -\int_S x.y.dm & -\int_S x.z.dm \\ -\int_S x.y.dm & \int_S (x^2+z^2).dm & -\int_S y.z.dm \\ -\int_S x.z.dm & -\int_S y.z.dm & \int_S (x^2+y^2).dm \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_B \quad \text{avec } \overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B$$

• ***A, B, C*** sont appelés respectivement **moments d'inertie par rapport aux axes** $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y})$, $(O, \vec{z})$.

• ***D, E, F*** sont appelés respectivement **produits d'inertie par rapport aux plans** $(O, \vec{y}, \vec{z})$, $(O, \vec{x}, \vec{z})$, $(O, \vec{x}, \vec{y})$.

c. *Propriétés*

➢ Repère principal d'inertie :

La matrice d'inertie est différente en chaque point de S et est exprimée dans une BOND. C'est une matrice réelle 3x3 symétrique, elle est donc diagonalisable.
Il existe une BOND B' de vecteurs $\left(\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}'\right)$ dans laquelle, la matrice d'inertie en un point O est diagonale :

$$\boxed{I(O,S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B'}}$$

• $R'\left(O, \vec{x}', \vec{y}', \vec{z}'\right)$ est appelé **repère principal d'inertie** ;

• A, B et C sont appelés les **moments principaux d'inertie** de S en O.

➢ Systèmes de solides :

Pour un système Σ de Si solides on applique le théorème de superposition : $I(O,\Sigma) = \sum_{i=1}^{n} I(O,S_i)$

Toutes les matrices doivent être exprimées au même point et dans la même base.

d. *Symétries*

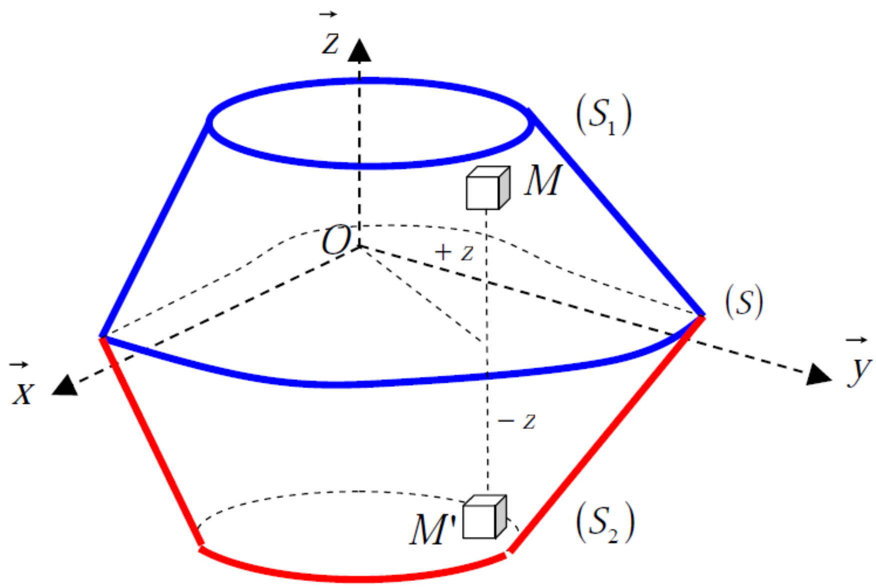


Fig. 8

Si le solide S admet le plan $(O,\vec{x},\vec{y})$ comme plan de symétrie matérielle alors la matrice d'inertie est de la forme suivante :

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_B$$

En effet : $D=\int_S yz.dm=\int_{S1} yz.dm+\int_{S2} yz.dm$ or z sur S2 est ≈ à –z sur S1 donc $D=\int_S yz.dm=\int_{S1} yz.dm-\int_{S1} yz.dm=0$

Idem pour E

➢ Propriétés :

• Si $\left(O,\vec{z}\right)$ est la normale d'un plan de symétrie matérielle de S alors $D=\int_S yz.dm$ et $E=\int_S xz.dm$ sont nuls.

• Pour une normale suivant $\left(O,\vec{x}\right)$: $E=F=0$.

• Pour une normale suivant $\left(O,\vec{y}\right)$: $D=F=0$.

• Cela implique que si **deux des trois plans de références sont des plans de symétrie matérielle alors tous les produits d'inertie sont nuls**, la matrice d'inertie de S est alors diagonale :

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_B$$

• Si l'axe $\left(O,\vec{z}\right)$ est un **axe de révolution matérielle** pour S alors les produits d'inertie sont tous nuls et la matrice d'inertie est de la forme suivante :

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_B$$

Pour $(O,\ x)$ axe de révolution ; $I(O,S)=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_B$

Pour $(O,\ y)$ axe de révolution ; $I(O,S)=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_B$

➔ **avant de se lancer dans les calculs, il faut impérativement simplifier la matrice en observant les symétries du solide S.**

e. Théorème de Huygens généralisé :

Il est parfois nécessaire de calculer la matrice d'inertie de S en un point quelconque A du solide S.
Le théorème de Huygens donne une relation entre $I\,(A,\ S)$ et $I\,(G,\ S)$ avec **G centre de gravité de S** !!

Par définition :

$$I(A,S).\vec{u}=\int_S \overrightarrow{AM}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM}\right).dm=\int_S\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM}\right)\wedge\left(\vec{u}\wedge\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM}\right)\right).dm$$

$$I(A,S).\vec{u}=\int_S \overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right).dm+\underbrace{\int_S \overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GM}\right).dm}_{\overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\int_S\overrightarrow{GM}dm\right)=\vec{0}}+\underbrace{\int_S \overrightarrow{GM}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right).dm}_{\int_S\overrightarrow{GM}dm\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right)=\vec{0}}+\underbrace{\int_S \overrightarrow{GM}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GM}\right).dm}_{I(G,S).\vec{u}}$$

Finalement : $\boxed{I(A,S).\vec{u}=I(G,S).\vec{u}+m_s\overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}\right)}$

Avec le calcul du *3.b*, on obtient :

➢ Théorème de Huygens généralisé :

Soit S un solide de masse m_s, de **centre de gravité G**. Soit A un point de ce solide.

$$I(A,S)=I(G,S)+m_s\begin{bmatrix}\left(y_G^2+z_G^2\right) & -x_G.y_G & -x_G.z_G\\ -x_G.y_G & \left(x_G^2+z_G^2\right) & -y_G.z_G\\ -x_G.z_G & -y_G.z_G & \left(x_G^2+y_G^2\right)\end{bmatrix}_B$$

avec dans $R(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ $\overrightarrow{AG}=\begin{vmatrix}x_G\\ y_G\\ z_G\end{vmatrix}$

2. CINETIQUE

Ce paragraphe a pour objet le calcul de la résultante dynamique et du moment dynamique d'un solide S en mouvement par rapport au repère galiléen $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

1. Torseur cinétique

a. *Définition*

Le torseur cinétique de S au point A dans son mouvement par rapport au repère galiléen $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est :

$$\boxed{\left\{C(S/R)\right\}_A=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{R_c}(S/R)=\int_S\vec{V}(\mathrm{M,S}/R).dm\\ \vec{\sigma}(A,S/R)=\int_S\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(\mathrm{M,S}/R).dm\end{Bmatrix}_A}$$

- $\overrightarrow{R_c}(S/R)$ est la résultante cinétique appelée couramment **quantité de mouvement** ;
- $\vec{\sigma}(A,S/R)$ est **le moment cinétique en A de S** dans son mouvement par rapport à R.

b. *Calcul*

- $$\overrightarrow{R_c}(S/R)=\int_S\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}.dm=\frac{d}{dt}\int_S\overrightarrow{OM}.dm=m_s.\vec{V}(G,S/R)$$

- $$\vec{\sigma}(A,S/R)=\int_S\overrightarrow{AM}\wedge\left[\vec{V}(\mathrm{A,S}/R)+\overrightarrow{MA}\wedge\vec{\Omega}(\mathrm{S}/R)\right].dm$$
$$=\underbrace{\int_S\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(\mathrm{A,S}/R).dm}_{m_s.\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(\mathrm{A,S}/R)}+\underbrace{\int_S\overrightarrow{AM}\wedge\left(\overrightarrow{MA}\wedge\vec{\Omega}(\mathrm{S}/R)\right).dm}_{I[A,S].\vec{\Omega}(\mathrm{S}/R)}$$

Le moment cinétique en A d'un solide S dans son mouvement par rapport au repère galiléen $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est :

$$\boxed{\vec{\sigma}(A,S/R)= I(A,S).\vec{\Omega}(S/R)+m_s.\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A,S/R)}$$

Au **centre de gravité G** de S :

$$\boxed{\vec{\sigma}(G,S/R)= I(G,S).\vec{\Omega}(S/R)}$$

En **un point A fixe** :

$$\boxed{\vec{\sigma}(A,S/R)= I(A,S).\vec{\Omega}(S/R)}$$

• Pour calculer le moment cinétique en un point B quelconque, on applique la relation du changement de point du moment d'un torseur classique :

$$\boxed{\vec{\sigma}(B,S/R)=\vec{\sigma}(A,S/R)+\overrightarrow{BA}\wedge\vec{R_c}(S/R)=\vec{\sigma}(A,S/R)+m_s.\overrightarrow{BA}\wedge\vec{V}(G,S/R)}$$

• Pour un ensemble Σ de solides Si, le moment cinétique en A est la somme des moments cinétiques en A de chaque solide :

$$\boxed{\vec{\sigma}(A,\Sigma/R)=\sum_{i=1}^{n}\vec{\sigma}(A,S_i/R)}$$

Au même point A !!!

2. Torseur dynamique

a. *Résultante dynamique*

Par définition la résultante dynamique d'un solide S dans son mouvement par rapport au repère galiléen $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est :

$$\vec{R_d}(S/R)=\int_S\vec{\Gamma}(\mathrm{M,S}/R).dm=\int_S\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}.dm=\frac{d^2}{dt^2}\int_S\overrightarrow{OM}.dm=m_s.\vec{\Gamma}(G,S/R)$$

NB : $\dfrac{d\vec{u}}{dt}=\left(\dfrac{d\vec{u}}{dt}\right)_R$ car tout les calculs sont faits relativement à R en raison de la mention « /R »

La résultante dynamique d'un solide S en mouvement est :

$$\boxed{\vec{R_d}(S/R)=m_s.\vec{\Gamma}(G,S/R)}$$

• Pour un ensemble Σ de solides Si, la résultante dynamique est la somme des résultantes dynamiques de chaque solide :

$$\boxed{\vec{R_d}(\Sigma/R)=\sum_{i=1}^{n}m_{si}.\vec{\Gamma}(G_i,S_i/R)}$$

Attention en Gi !!!

b. *Moment dynamique*

Par définition, le moment dynamique en A d'un solide S dans son mouvement par rapport au repère galiléen $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est : $\vec{\delta}(A,S/R)=\int_S\overrightarrow{AM}\wedge\vec{\Gamma}(\mathrm{M,S}/R).dm$

Or le moment cinétique en A vaut $\vec{\sigma}(A,S/R)=\int_S\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(\mathrm{M,S}/R).dm$. En dérivant par rapport au temps et en appliquant la conservation de la masse, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(A,S/R)=\int_S\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(\mathrm{M,S}/R)\right]dm=\int_S\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AM}\right]\wedge\vec{V}(\mathrm{M,S}/R).dm+\underbrace{\int_S\overrightarrow{AM}\wedge\frac{d}{dt}\left[\vec{V}(\mathrm{M,S}/R)\right].dm}_{\vec{\delta}(A,S/R)}$$

Or

$$\int_S \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AM}\right]\wedge\vec{V}(\mathrm{M,S}/R).dm = -\int_S \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OA}\right]\wedge\vec{V}(\mathrm{M,S}/R).dm + \int_S \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OM}\right]\wedge\vec{V}(\mathrm{M,S}/R).dm = -m_s.\vec{V}(\mathrm{A,S}/R)\wedge\vec{V}(\mathrm{G}/R)$$

Finalement, le moment dynamique en A d'un solide S dans son mouvement par rapport au repère galiléen $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est :

$$\boxed{\vec{\delta}(A,S/R) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(A,S/R)\right)_R + m_s.\vec{V}(A,S/R)\wedge\vec{V}(G,S/R)}$$

Au **centre de gravité G** de S :

$$\boxed{\vec{\delta}(G,S/R) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(G,S/R)\right)_R}$$

En **un point fixe A** :

$$\boxed{\vec{\delta}(A,S/R) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(A,S/R)\right)_R}$$

• Pour calculer le moment dynamique en un point B quelconque, on applique la relation du changement de point du moment d'un torseur :

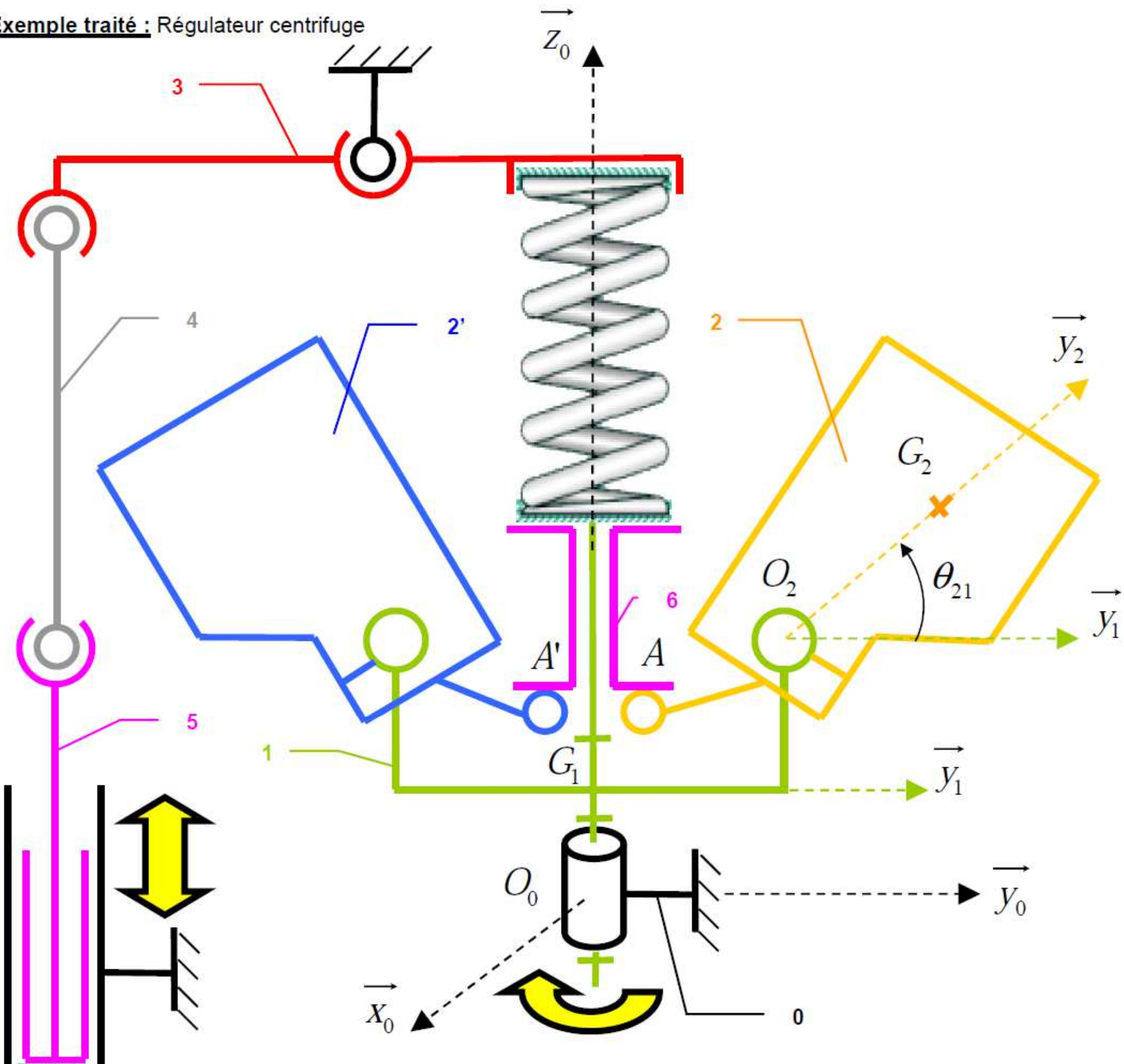
$$\boxed{\vec{\delta}(B,S/R) = \vec{\delta}(A,S/R) + \overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{R_d}(S/R) = \vec{\delta}(A,S/R) + m_s.\overrightarrow{BA}\wedge\vec{\Gamma}(G,S/R)}$$

• Pour un ensemble Σ de solides Si, le moment dynamique en A est la somme des moments dynamiques en A de chaque solide :

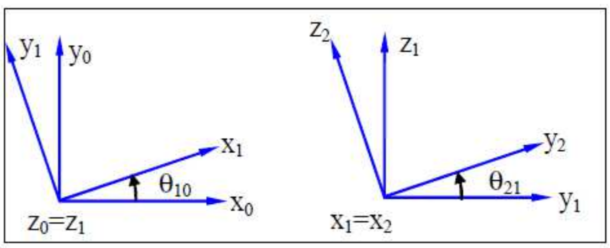
$$\boxed{\vec{\delta}(A,\Sigma/R) = \sum_{i=1}^{n}\vec{\delta}(A,S_i/R)}$$

Au même point A !!!

Exemple traité : Régulateur centrifuge



Figures angulaires planes :



$(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1})=(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1})=\theta_{10}$ $\quad(\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{y_2})=(\overrightarrow{z_1},\overrightarrow{z_2})=\theta_{21}$

Données :

$$I(G_2,S2)=\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{bmatrix}_{(x2,y2,z2)}$$

$\overrightarrow{O_0G_1}=l_1.\overrightarrow{z_0}$; $\overrightarrow{O_0O_2}=d_1.\overrightarrow{z_0}+L_1.\overrightarrow{y_1}$; $\overrightarrow{O_2G_2}=l_2.\overrightarrow{y_2}$

Hypothèses : $\dot{\theta}_{10}=cste$; $\dot{\theta}_{21}=cste$

Isolons la masselotte **2**. Nous cherchons à calculer **le torseur dynamique en *O2* de *2* par rapport au repère galiléen** R_0 afin de mettre en place une « loi entrée sortie dynamique » entre la vitesse de rotation de 1/0 notée

$\dot{\theta}_{10} = cste$, l'inclinaison de la masselotte θ_{21} et l'action mécanique de la masselotte 2 sur 6 notée Z_{62} . Pour ce faire l'application du théorème du moment dynamique en O2 est requise afin d'obtenir une équation sans inconnue de liaison de la liaison pivot 2 /1.

Astuces de calcul afin de limiter les calculs au strict minimum :

Astuce 0 : on pense à effectuer le changement de point et la projection simultanément.

Astuce 1 : on projette avant de dériver et on remplace un calcul compliqué par deux calculs plus simples.

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_0}.\vec{v} = \frac{d\left(\vec{u}.\vec{v}\right)}{dt} - \vec{u}.\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{R_0}$$

Astuce 2 : on utilise la propriété du produit mixte (permutation des termes): $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{w} = \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right).\vec{u} = \left(\vec{w} \wedge \vec{u}\right).\vec{v}$

Lorsque parmi les 3 vecteurs du produit mixte, un des trois est compliqué ou imposant , on commence par le produit vectoriel entre les vecteurs plus simples , ce qui permet de ne calculer qu'une projection du vecteur compliqué.

Méthodologie pour le calcul de $\vec{\delta}\left(O_2, 2/0\right).\vec{x}_2$

Préalable : Détermination du torseur cinématique 2/0 en G2 et du torseur cinétique 2/0 en G2

$$\left.\begin{aligned} &\vec{V}\left(G_2, 2/0\right) \\ &\vec{\sigma}\left(G_2, 2/0\right) = I\left(G_2, 2\right).\vec{\Omega}\left(2/0\right) \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{C_{2/0}\right\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} m_2.\vec{V}\left(G_2, 2/0\right) \\ \vec{\sigma}\left(G_2, 2/0\right) \end{Bmatrix}_{G_2}$$

Calcul de $\vec{\delta}\left(O_2, 2/0\right).\vec{x}_2$

$$\vec{\delta}\left(O_2, 2/0\right).\vec{x}_2 = \left(\vec{\delta}\left(G_2, 2/0\right) + m_2.\overrightarrow{O_2G_2} \wedge \vec{\Gamma}\left(G_2, 2/0\right)\right).\vec{x}_2 \text{ : astuce 0}$$

$$\vec{\delta}\left(G_2, 2/0\right).\vec{x}_2 = \left(\frac{d\left(\vec{\sigma}\left(G_2, 2/0\right)\right)}{dt}\right)_{R_0}.\vec{x}_2 \text{ + astuce 1}$$

Astuce 2 : $\left[\overrightarrow{O_2G_2} \wedge \vec{\Gamma}\left(G_2, 2/0\right)\right].\vec{x}_2 = \left[\vec{x}_2 \wedge \overrightarrow{O_2G_2}\right].\vec{\Gamma}\left(G_2, 2/0\right)$

et $\vec{\Gamma}\left(G_2, 2/0\right) = \left(\frac{d\left(\vec{V}\left(G_2, 2/0\right)\right)}{dt}\right)_{R_0}$ + astuce 1

Torseur cinématique de 2/0 en O2:

$$\left\{V_{1/0}\right\}_{O_0}=\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(1/0)\\ \vec{V}(O_0,1/0)\end{Bmatrix}_{O_0}=\begin{Bmatrix}0&0\\0&0\\\dot{\theta}_{10}&0\end{Bmatrix}_{O_0,(-,-,\vec{z}_0)}\qquad \left\{V_{2/1}\right\}_{O_2}=\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(2/1)\\ \vec{V}(O_2,2/1)\end{Bmatrix}_{O_2}=\begin{Bmatrix}\dot{\theta}_{21}&0\\0&0\\0&0\end{Bmatrix}_{O_2,(\vec{x}_1,-,-)}$$

$$\left\{V_{2/0}\right\}_{O_2}=\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(2/0)\\ \vec{V}(O_2,2/0)\end{Bmatrix}_{O_2}=\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(2/1)+\vec{\Omega}(1/0)\\ \vec{V}(O_2,2/1)+\vec{V}(O_2,1/0)\end{Bmatrix}_{O_2}\ ;$$

Avec $\vec{\Omega}(2/0)=\vec{\Omega}(2/1)+\vec{\Omega}(1/0)=\dot{\theta}_{21}\vec{x}_2+\dot{\theta}_{10}\vec{z}_1=\dot{\theta}_{21}\vec{x}_1+\dot{\theta}_{10}\vec{z}_0=\begin{pmatrix}\dot{\theta}_{21}\\ \dot{\theta}_{10}\sin\theta_{21}\\ \dot{\theta}_{10}\cos\theta_{21}\end{pmatrix}_{B2}$

$$\boxed{\left\{V_{2/0}\right\}_{O_2}=\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(2/0)\\ \vec{V}(O_2,2/0)\end{Bmatrix}_{O_2}=\begin{Bmatrix}\dot{\theta}_{21}&-L_1\dot{\theta}_{10}\\0&0\\\dot{\theta}_{10}&0\end{Bmatrix}_{O_2(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}}$$

Torseur cinétique de 2/0 en G2 :

Par définition : $\left\{C_{2/0}\right\}_{G_2}=\begin{Bmatrix}m_2.\vec{V}(G_2,2/0)\\ \vec{\sigma}(G_2,2/0)\end{Bmatrix}_{G_2}$

$$\vec{V}(G_2,2/0)=\vec{V}(O_2,2/0)+\overrightarrow{G_2O_2}\wedge\vec{\Omega}(2/0)=-L_1\dot{\theta}_{10}.\vec{x}_1-l_2.\vec{y}_2\wedge\left(\dot{\theta}_{21}\vec{x}_2+\dot{\theta}_{10}\vec{z}_1\right)$$

$$\vec{V}(G_2,2/0)=-L_1.\dot{\theta}_{10}.\vec{x}_1+l_2.\dot{\theta}_{21}\vec{z}_2-l_2.\dot{\theta}_{10}\cos\theta_{21}.\vec{x}_2=\begin{pmatrix}-l_2.\dot{\theta}_{10}\cos\theta_{21}-L_1.\dot{\theta}_{10}\\0\\l_2.\dot{\theta}_{21}\end{pmatrix}_{B_2}$$

Calcul du moment cinétique : $\vec{\sigma}(G_2,2/0)=I(G_2,2).\vec{\Omega}(2/0)$

$$\vec{\sigma}(G_2,2/0)=\begin{bmatrix}A_2&0&0\\0&B_2&-D_2\\0&-D_2&C_2\end{bmatrix}_{B2}.\begin{pmatrix}\dot{\theta}_{21}\\ \dot{\theta}_{10}\sin\theta_{21}\\ \dot{\theta}_{10}\cos\theta_{21}\end{pmatrix}_{B2}=\begin{pmatrix}A_2.\dot{\theta}_{21}\\ \dot{\theta}_{10}\left(B_2.\sin\theta_{21}-D_2\cos\theta_{21}\right)\\ \dot{\theta}_{10}\left(-D_2.\sin\theta_{21}+C_2\cos\theta_{21}\right)\end{pmatrix}_{B2}$$

NB : Attention piège !!! Mettre le vecteur $\vec{\Omega}(2/0)$ dans la même base que la matrice d'inertie !!!

$$\boxed{\left\{C_{2/0}\right\}_{G_2}=\begin{Bmatrix}-m_2.\dot{\theta}_{10}.(l_2.\cos\theta_{21}+L_1)&A_2.\dot{\theta}_{21}\\0&\dot{\theta}_{10}\left(B_2.\sin\theta_{21}-D_2\cos\theta_{21}\right)\\m_2.l_2.\dot{\theta}_{21}&\dot{\theta}_{10}\left(-D_2.\sin\theta_{21}+C_2\cos\theta_{21}\right)\end{Bmatrix}_{G_2,B_2}}$$

Torseur dynamique en O2 : on utilise uniquement la composante du moment dynamique sur l'axe $\left(O_2, \vec{x}_2\right)$

Par définition : $\left\{D_{2/0}\right\}_{O_2} = \begin{Bmatrix} m_2.\vec{\Gamma}\left(G_2, 2/0\right) \\ \vec{\delta}\left(O_2, 2/0\right) \end{Bmatrix}_{O_2}$

$$\vec{\delta}\left(O_2, 2/0\right) = \vec{\delta}\left(G_2, 2/0\right) + m_2.\overrightarrow{O_2G_2} \wedge \vec{\Gamma}\left(G_2, 2/0\right)$$

On pose : $\vec{\delta}\left(O_2, 2/0\right).\vec{x}_2 = \left(\vec{\delta}\left(G_2, 2/0\right) + m_2.\overrightarrow{O_2G_2} \wedge \vec{\Gamma}\left(G_2, 2/0\right)\right).\vec{x}_2 = \Delta_1 + m_2.\Delta_2$

Astuce 0 : Il s'avère en effet que c'est la seule composante qui nous intéresse -> on va donc effectuer le changement de point et la projection simultanément afin de limiter les calculs au strict minimum.

$$\Delta_1 = \vec{\delta}\left(G_2, 2/0\right).\vec{x}_2 = \left(\frac{d\left(\vec{\sigma}\left(G_2, 2/0\right)\right)}{dt}\right)_{R_0}.\vec{x}_2$$

Astuce 1 : on projette avant de dériver et on remplace un calcul compliqué par deux calculs plus simples

$$\left(\frac{d\left(\vec{\sigma}\left(G_2, 2/0\right)\right)}{dt}\right)_{R_0}.\vec{x}_2 = \frac{d\left(\vec{\sigma}\left(G_2, 2/0\right).\vec{x}_2\right)}{dt} - \vec{\sigma}\left(G_2, 2/0\right).\left(\frac{d\left(\vec{x}_2\right)}{dt}\right)_{R_0}$$

$$= \underbrace{\frac{d\left(A_2.\dot{\theta}_{21}\right)}{dt}}_{0} - \vec{\sigma}\left(G_2, 2/0\right).\left(\frac{d\left(\vec{x}_2\right)}{dt}\right)_{R_0}$$

Rappel : $\dot{\theta}_{21} = cst$

Calcul de $\left(\frac{d\left(\vec{x}_2\right)}{dt}\right)_{R_0}$: utilisation de la formule de dérivation d'un vecteur par changement de base

$$\left(\frac{d\left(\vec{x}_2\right)}{dt}\right)_{R_0} = \underbrace{\left(\frac{d\left(\vec{x}_2\right)}{dt}\right)_{R_2}}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}(2/0) \wedge \vec{x}_2 = \left(\dot{\theta}_{21}\vec{x}_2 + \dot{\theta}_{10}\vec{z}_1\right) \wedge \vec{x}_2 = \dot{\theta}_{10}.\left(\cos\theta_{21}.\vec{y}_2 - \sin\theta_{21}.\vec{z}_2\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_{10}.\cos\theta_{21} \\ -\dot{\theta}_{10}.\sin\theta_{21} \end{pmatrix}_{B_2}$$

$\left(\frac{d\left(\vec{x}_2\right)}{dt}\right)_{R_2} = \vec{0}$ car on dérive un vecteur par rapport à sa propre base or ce vecteur est lié à sa propre base autrement dit ce vecteur ne bouge pas par rapport à sa propre base.

Finalement $\vec{\delta}(G_2,2/0).\vec{x}_2 = -\vec{\sigma}(G_2,2/0).\left(\dfrac{d(\vec{x}_2)}{dt}\right) = -\begin{pmatrix} A_2.\dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{10}(B_2.\sin\theta_{21} - D_2\cos\theta_{21}) \\ \dot{\theta}_{10}(-D_2.\sin\theta_{21} + C_2\cos\theta_{21}) \end{pmatrix}_{B_2} . \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_{10}.\cos\theta_{21} \\ -\dot{\theta}_{10}.\sin\theta_{21} \end{pmatrix}_{B_2}$

$$\vec{\delta}(G_2,2/0).\vec{x}_2 = -\dot{\theta}_{10}^{\,2}(B_2.\sin\theta_{21} - D_2\cos\theta_{21})\cos\theta_{21} + \dot{\theta}_{10}^{\,2}(-D_2.\sin\theta_{21} + C_2\cos\theta_{21})\sin\theta_{21}$$

$$\vec{\delta}(G_2,2/0).\vec{x}_2 = -\dot{\theta}_{10}^{\,2}\left(\frac{(B_2 - C_2)\sin 2\theta_{21}}{2} - D_2.\cos 2\theta_{21}\right) = \Delta_1$$

Il reste à calculer $\left[\overrightarrow{O_2G_2} \wedge \vec{\Gamma}(G_2,2/0)\right].\vec{x}_2 = \left[\vec{x}_2 \wedge \overrightarrow{O_2G_2}\right].\vec{\Gamma}(G_2,2/0) = \Delta_2$

Astuce 2 : on utilise la propriété du produit mixte (permutation des termes): $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}).\vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}).\vec{v}$

Lorsque parmi les 3 vecteurs du produit mixte, un des trois est compliqué ou imposant , on commence par le produit vectoriel entre les vecteurs plus simples , ce qui permet de ne calculer qu'une projection du vecteur compliqué (ici $\vec{\Gamma}(G_2,2/0)$)

$$\Delta_2 = \left[\overrightarrow{O_2G_2} \wedge \vec{\Gamma}(G_2,2/0)\right].\vec{x}_2 = \left[\vec{x}_2 \wedge \overrightarrow{O_2G_2}\right].\vec{\Gamma}(G_2,2/0) = \left[\vec{x}_2 \wedge l_2.\vec{y}_2\right].\vec{\Gamma}(G_2,2/0) = l_2.\vec{z}_2.\vec{\Gamma}(G_2,2/0)$$

Or $l_2.\vec{z}_2.\vec{\Gamma}(G_2,2/0) = l_2.\vec{z}_2.\left(\dfrac{d(\vec{V}(G_2,2/0))}{dt}\right)_{R_0} = l_2.\underbrace{\left(\dfrac{d(\vec{V}(G_2,2/0).\vec{z}_2)}{dt}\right)}_{0} - l_2.\vec{V}(G_2,2/0)\left(\dfrac{d\vec{z}_2}{dt}\right)_{R_0}$

Or $\vec{V}(G_2,2/0) = \begin{pmatrix} -l_2.\dot{\theta}_{10}\cos\theta_{21} - L_1.\dot{\theta}_{10} \\ 0 \\ l_2.\dot{\theta}_{21} \end{pmatrix}_{B_2}$ avec $\dot{\theta}_{21} = cst$

Et $\left(\dfrac{d\vec{z}_2}{dt}\right)_{R_0} = \underbrace{\left(\dfrac{d\vec{z}_2}{dt}\right)_{R_2}}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}(2/0) \wedge \vec{z}_2 = (\dot{\theta}_{21}\vec{x}_2 + \dot{\theta}_{10}\vec{z}_1) \wedge \vec{z}_2 = \dot{\theta}_{10}.\sin\theta_{21}.\vec{x}_2 - \dot{\theta}_{21}.\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{10}.\sin\theta_{21} \\ -\dot{\theta}_{21} \\ 0 \end{pmatrix}_{B_2}$

D'où

$$l_2.\vec{z}_2.\vec{\Gamma}(G_2,2/0) = -l_2.\begin{pmatrix} \dot{\theta}_{10}.\sin\theta_{21} \\ -\dot{\theta}_{21} \\ 0 \end{pmatrix}_{B_2} . \begin{pmatrix} -l_2.\dot{\theta}_{10}\cos\theta_{21} - L_1.\dot{\theta}_{10} \\ 0 \\ l_2.\dot{\theta}_{21} \end{pmatrix}_{B_2} = \sin\theta_{21}.l_2(l_2.\cos\theta_{21} + L_1)\dot{\theta}_{10}^{\,2}$$

Finalement

$$\boxed{\vec{\delta}(O_2,2/0).\vec{x}_2 = \Delta_1 + m_2.\Delta_2 = -\dot{\theta}_{10}^{\,2}\left(\frac{(B_2 - C_2)\sin 2\theta_{21}}{2} - D_2.\cos 2\theta_{21}\right) + m_2.\sin\theta_{21}.l_2(l_2.\cos\theta_{21} + L_1)\dot{\theta}_{10}^{\,2}}$$

Application du Principe Fondamental de la Dynamique :
Isolons la masselotte **2**, faisons le BAME :

$$\{T_{1\to 2}\} = \underset{O_2}{\begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{Bmatrix}}_{(\vec{x}_1,-,-)} \qquad \{T_{pes\to 2}\} = \underset{G_2}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -m_2.g & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}$$

$$\{T_{6\to 2}\} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -Z_{62} & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$$

On pose $\overrightarrow{AO_2} = a\vec{y}_2 - b\vec{z}_2$ → $\{T_{6\to 2}\} = \underset{O_2}{\begin{Bmatrix} 0 & \delta Z_{62} \\ 0 & 0 \\ -Z_{62} & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$

$Z_{62}>0$ $\qquad \delta = a\cos\theta_{21} + b\sin\theta_{21}$

Ecrivons le **théorème du moment dynamique** en *O2* en projection sur $\vec{x}_2$

$$\vec{\delta}(O_2, 2/0).\vec{x}_2 = \sum \overrightarrow{M}(O_2, ext\to 2).\vec{x}_2$$

Astuce 4 : on projette et on fait le changement de point simultanément afin de limiter les calculs au strict minimum.

$$\overrightarrow{M}(O_2, pes\to 2) = \overrightarrow{M}(G_2, pes\to 2) + \left(\overrightarrow{O_2G_2} \wedge -m_2.g.\vec{z}_0\right) \to$$

$$\overrightarrow{M}(O_2, pes\to 2).\vec{x}_2 = \left(\overrightarrow{O_2G_2} \wedge -m_2.g.\vec{z}_0\right).\vec{x}_2 = \left(l_2.\vec{y}_2 \wedge -m_2.g.\vec{z}_0\right).\vec{x}_2 = -m_2.g.l_2.\cos\theta_{21}$$

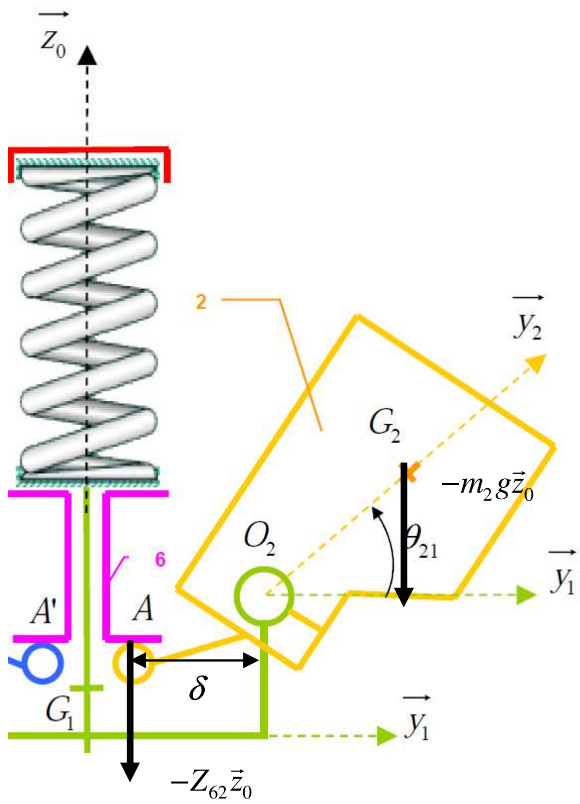
$$\overrightarrow{M}(O_2, 6\to 2).\vec{x}_2 = \overrightarrow{M}(A, 6\to 2) + \left(\overrightarrow{O_2A} \wedge Z_{62}.\vec{z}_1\right) \to$$

$$\overrightarrow{M}(O_2, 6\to 2).\vec{x}_2 = \left(\overrightarrow{O_2A} \wedge Z_{62}.\vec{z}_1\right).\vec{x}_2 = \left(-\left(a\vec{y}_2 - b\vec{z}_2\right) \wedge -Z_{62}.\vec{z}_1\right).\vec{x}_2 = aZ_{62}\cos\theta_{21} + bZ_{62}\sin\theta_{21} = \delta Z_{62}$$

L'équation de mouvement obtenue est :

$$\boxed{\dot{\theta}^2_{10}.\left(\frac{C_2 - B_2}{2}.\sin 2\theta_{21} + D_2.\cos 2\theta_{21} + m_2 l_2\left(L_1 + l_2\cos\theta_{21}\right)\sin\theta_{21}\right) = -m_2.l_2.g.\cos\theta_{21} + \delta Z_{62}}$$

Cette équation permet d'obtenir l'inclinaison θ_{21} de la masselotte 2 en fonction de $\dot{\theta}_{10}$ et de l'effort du ressort Z_{62}.



Avec $\dot{\theta}_{10} = 0$, on retrouve le résultat de la statique

$$0 = -m_2.l_2.g.\cos\theta_{21} + \delta Z_{62}$$

Soit

$$Z_{62} = m_2.\frac{l_2}{\delta}.g.\cos\theta_{21}$$

En dynamique, la vitesse de rotation $\dot{\theta}_{10} \neq 0$ renforce l'action Z_{62} avec l'ajout du terme :

$$\boxed{\frac{\dot{\theta}^2{}_{10}}{\delta}.\left(\frac{C_2 - B_2}{2}.\sin 2\theta_{21} + D_2.\cos 2\theta_{21} + m_2 l_2 \left(L_1 + l_2 \cos\theta_{21}\right)\sin\theta_{21}\right)}$$