CENTRE DE GRAVITE

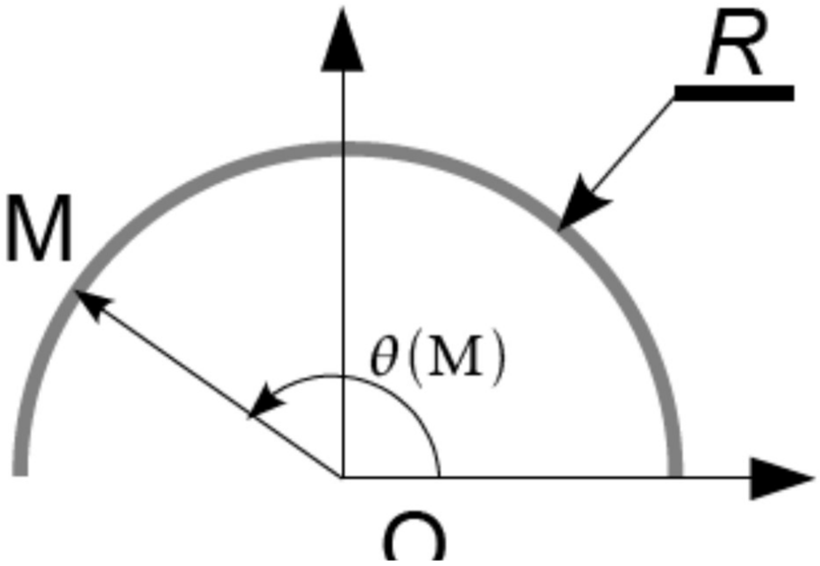
EXO1

Calcul du centre de gravité : exemple

Demi-cercle homogène de rayon *R*. (masse linéique λ)

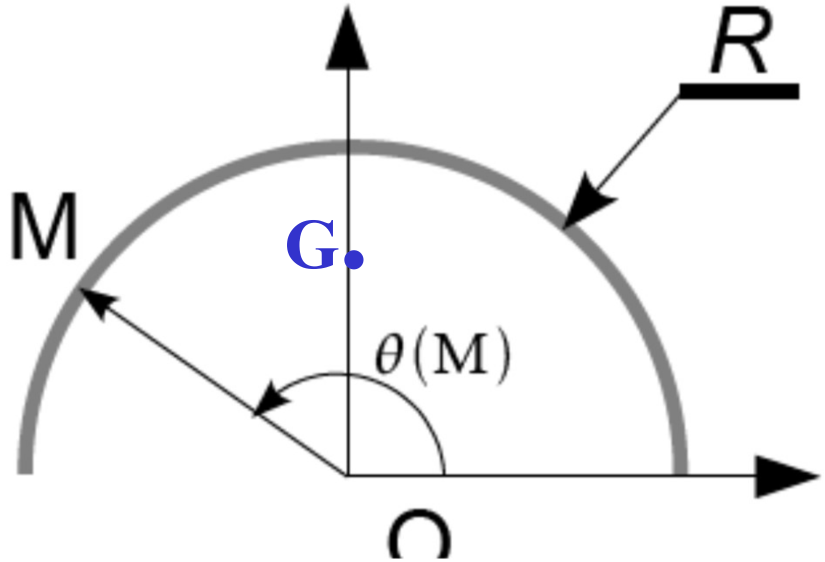
Exploitation des symétries

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} \, dm$$



Calcul du centre de gravité : exemple

Demi-cercle homogène de rayon *R*. (masse linéique λ)

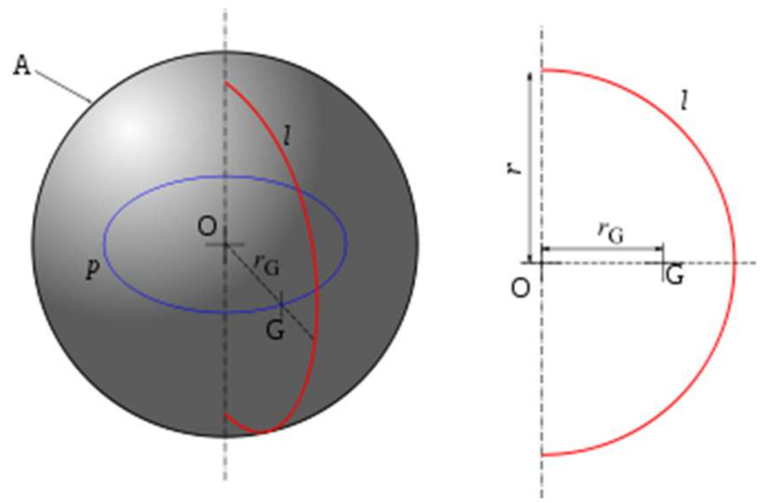


$$\overrightarrow{OG}\cdot\vec{y}=\frac{1}{\lambda L}\int_{\theta=0}^{\pi}\lambda R^2\sin\theta\, d\theta$$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\pi R}\int_{\theta=0}^{\pi}R^2\sin\theta\, d\theta=\frac{2R}{\pi}$$

Calcul du centre de gravité : exemple

Théorème de Guldin :

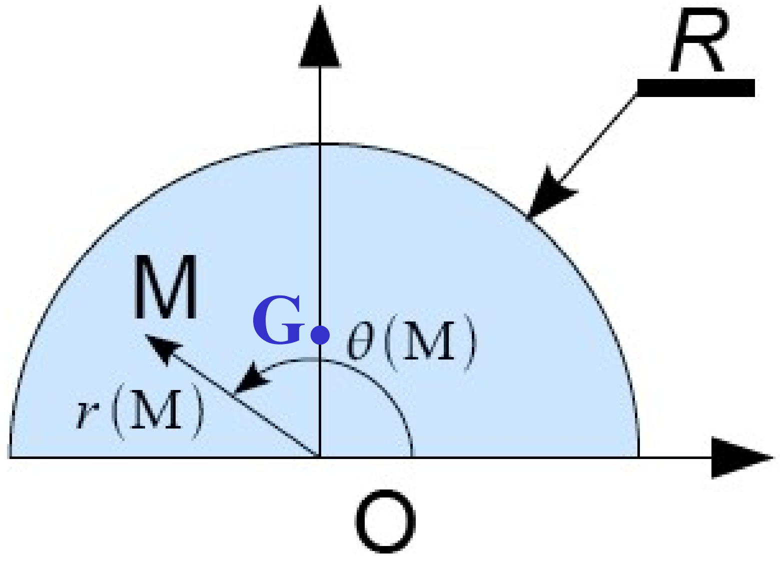


$$S = 2\pi L r_G = 2\pi\pi R \times \left(\frac{2R}{\pi}\right) = 4\pi R^2$$

Calcul du centre de gravité : exemple

Demi-disque homogène de rayon *R*. (masse surfacique λ)

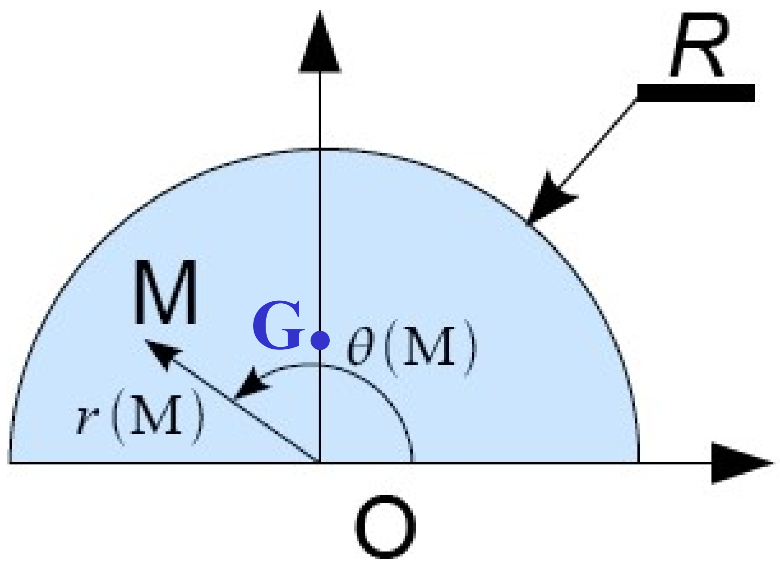
Exploitation des symétries



$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{M \in S} \overrightarrow{OM}\, dm \quad ; \quad \forall O$$

Calcul du centre de gravité : exemple

Demi-disque homogène de rayon *R*. (masse surfacique λ)

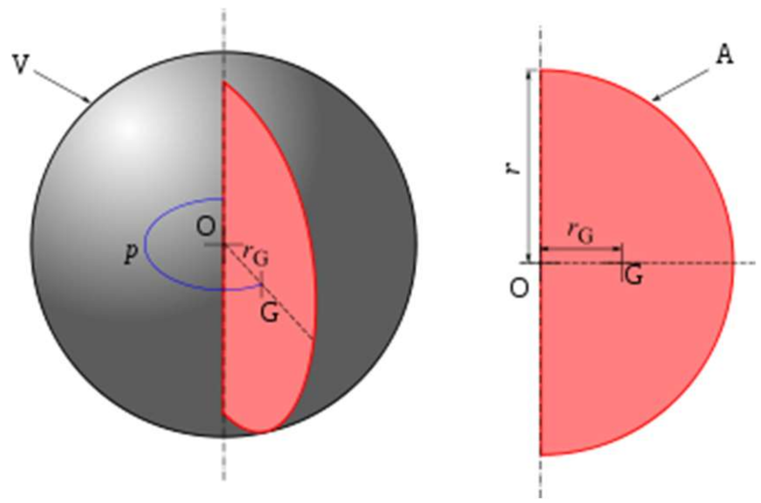


$$\overrightarrow{OG}\cdot\vec{y}=\frac{1}{\lambda S}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{R}\lambda\, r^2\sin\theta\, dr\, d\,\theta$$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{2}{\pi R^2}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{R} r^2\sin\theta\, dr\, d\,\theta=\frac{2}{\pi R^2}\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{R^3}{3}\sin\theta\, d\,\theta=\frac{4R}{3\pi}$$

Calcul du centre de gravité : exemple

Théorème de Guldin :



$$V = 2\pi S r_G = 2\pi \frac{\pi R^2}{2}\left(\frac{4R}{3\pi}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

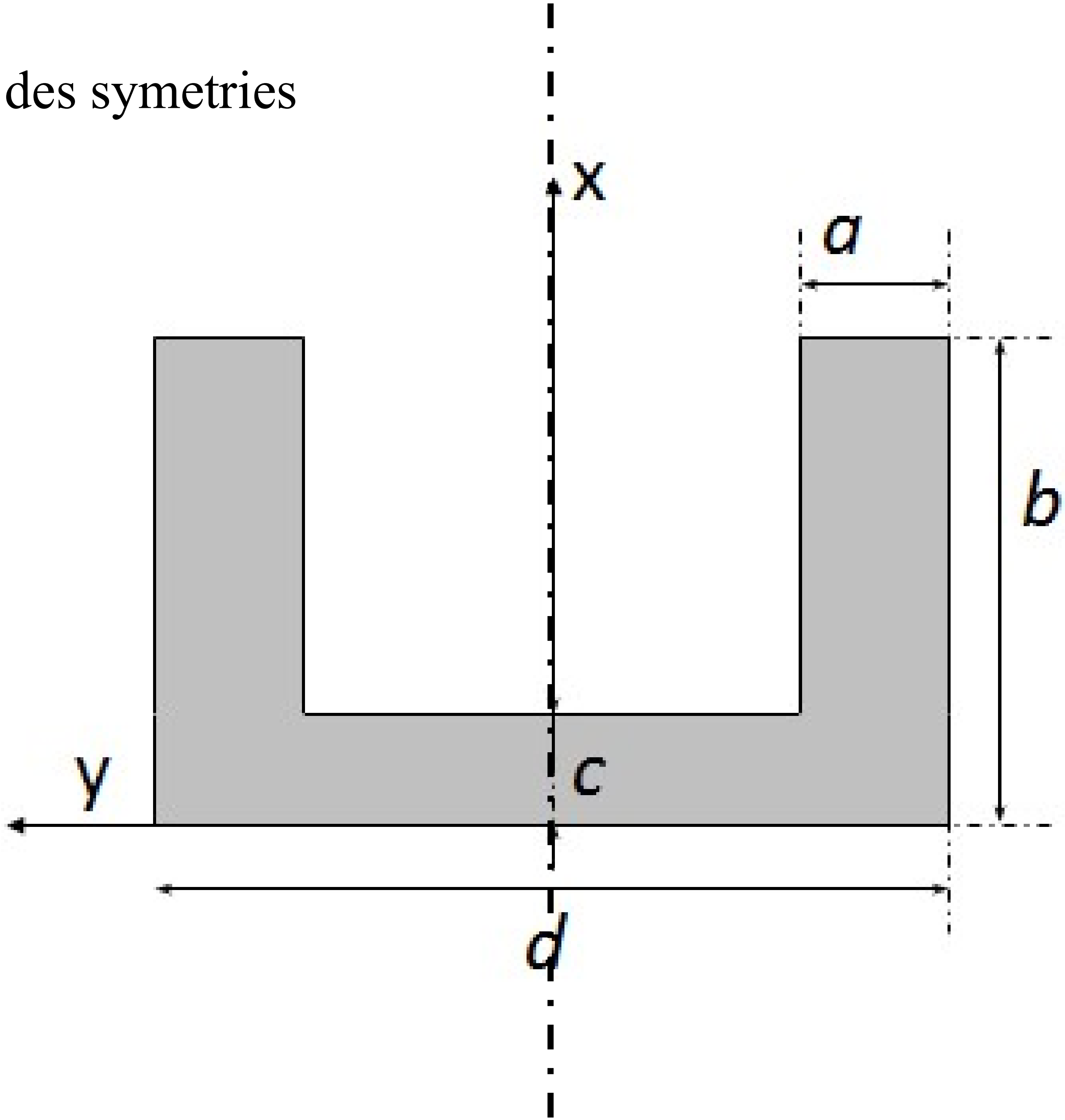
EXO2

Analyse des symetries

x_G=?

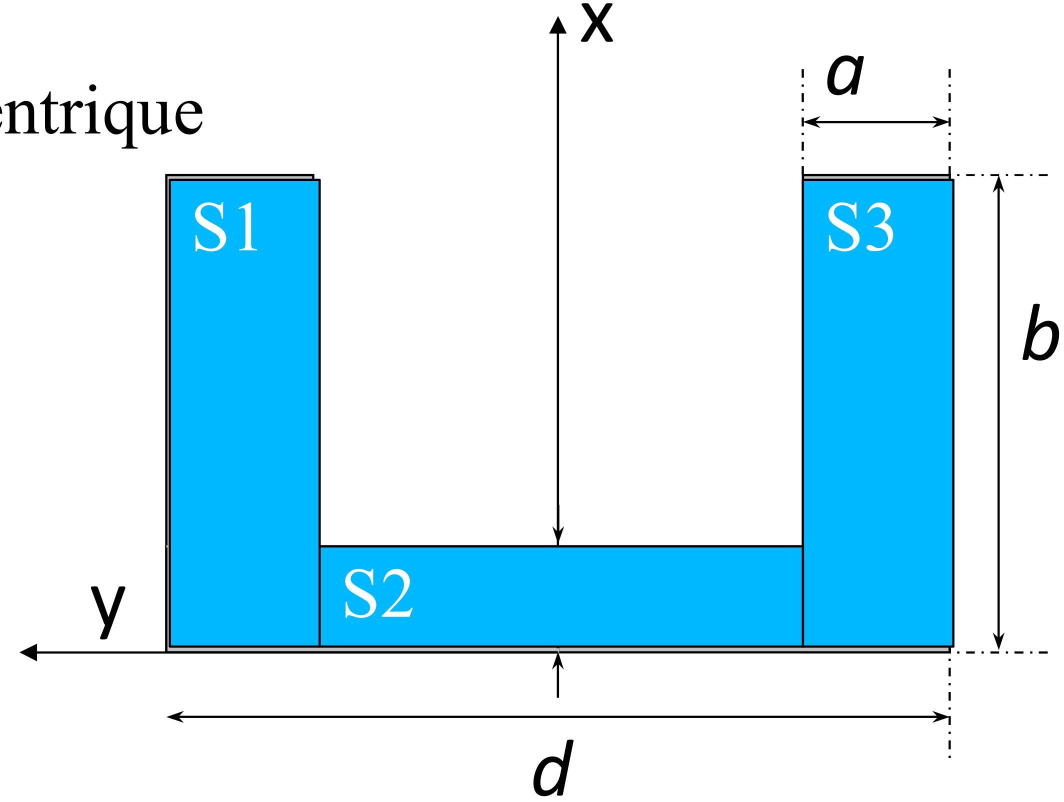
y_G=0

z_G=0



Méthode 1 : relation barycentrique

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_S} \sum_{k=1}^{n} m_k \overrightarrow{OG_k}$$



Solide 1 G_1 $m_1=$ $x_{G1}=$

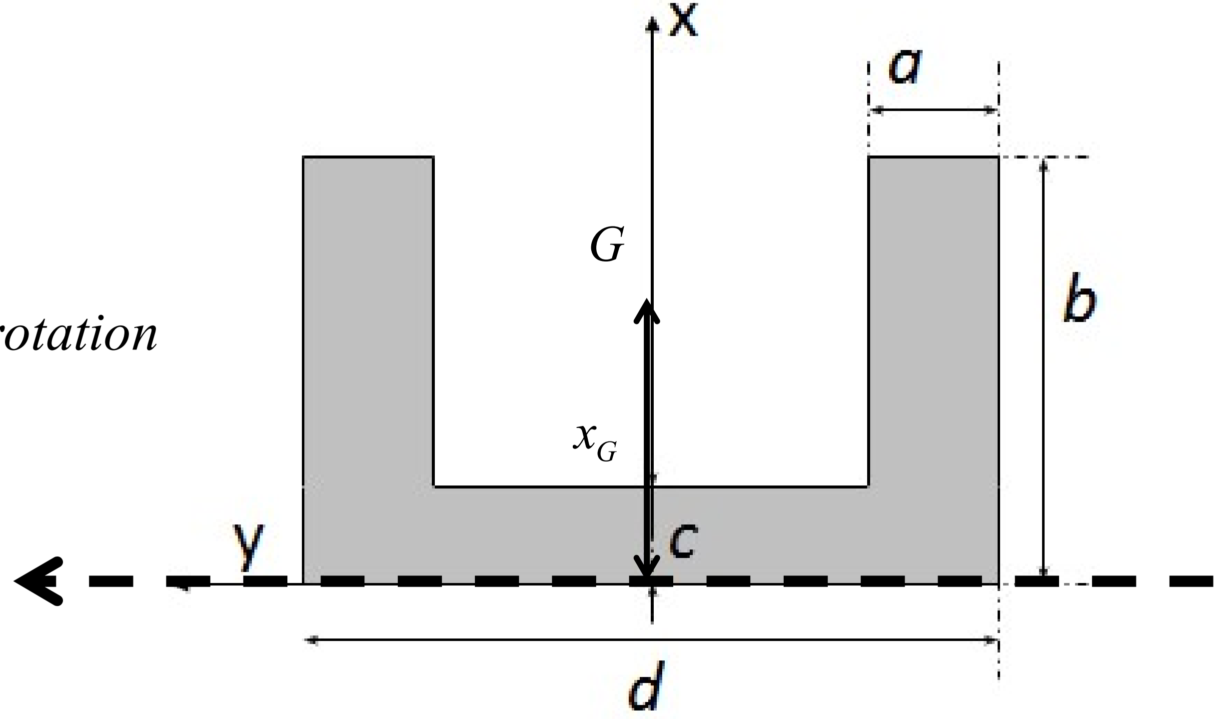
Solide 2 G_2 $m_2=$ $x_{G2}=$

Solide 3 G_3 $m_3=$ $x_{G3}=$

$$x_G = \frac{\left(m_1 x_{G1} + m_2 x_{G2} + m_3 x_{G3}\right)}{m}$$

$$x_G = \frac{2ba\frac{b}{2} + (d-2a)\frac{c^2}{2}}{2ab + (d-2a)c} = \frac{2b^2a + (d-2a)c^2}{2\left[2ab + \left(d-2a\right)c\right]}$$

Méthode 2 : Guldin



$$2\pi x_G S_{plaque} = V_{generé/rotation}$$

S =

V =

$$x_G = \frac{V}{2\pi S} =$$

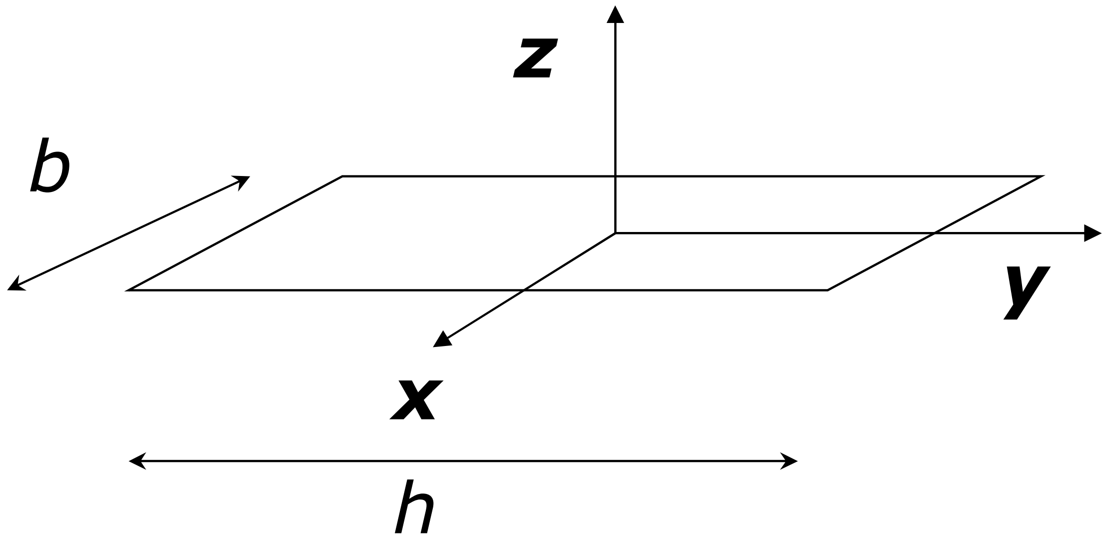
Matrice d'inertie

Exo 1

Calcul d'opérateur d'inertie : exercice 1

On considère une plaque rectangulaire homogène de côté b et h.

Déterminer sa matrice d'inertie $\left[I(G,S)\right]_{R_G}$



$$R_G = \left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$$

Plaque d'épaisseur nulle z=0

$$A = \int_{\Sigma} (y^2 + z^2)dm = \int_{\Sigma} y^2 dm$$

$$B = \int_{\Sigma} (x^2 + z^2)dm = \int_{\Sigma} x^2 dm$$

$$C = \int_{\Sigma} (x^2 + y^2)dm = A + B$$

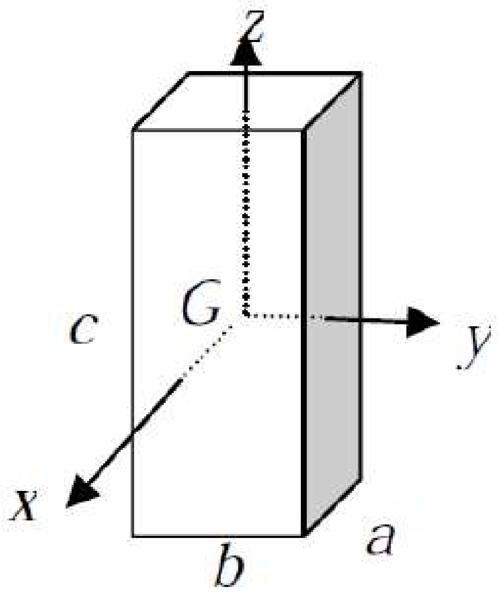
Symétrie

$$D = \int_{\Sigma} yz\,dm = E = \int_{\Sigma} zx\,dm = F = \int_{\Sigma} xy\,dm = 0$$

$$\left[I(G,S)\right]_{R_G} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{bmatrix}$$

Masse de la plaque $M = \sigma b h$

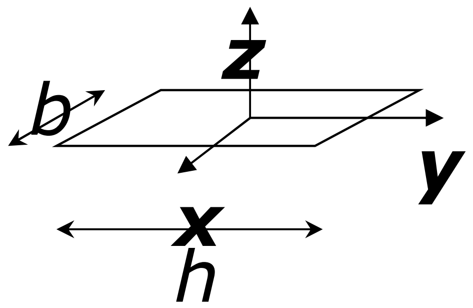
Parallelépipède de masse m et de coté a,b,c



$$I(G,S)=\begin{bmatrix} \frac{m(b^2+c^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(a^2+c^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(b^2+a^2)}{12} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

COURS UTILE

On prend c=0 b dans le cours joue le rôle de h dans l'exo et a dans le cours le rôle de b



$$[I(G,S)]_{R_G}=\frac{M}{12}\begin{bmatrix} h^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & h^2+b^2 \end{bmatrix}$$

COURS UTILE

Forme générale de la matrice inertie en O dans la base Bs associé au solide S

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} \int_S \left(y^2+z^2\right).dm & -\int_S x.y.dm & -\int_S x.z.dm \\ -\int_S x.y.dm & \int_S \left(x^2+z^2\right).dm & -\int_S y.z.dm \\ -\int_S x.z.dm & -\int_S y.z.dm & \int_S \left(x^2+y^2\right).dm \end{bmatrix}_{Bs}$$

$$A = \sigma \int_{-h/2}^{h/2} \left(\int_{-b/2}^{b/2} dx \right) y^2 dy = \sigma \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \left[x \right]_{-b/2}^{b/2} dy$$

$$= \sigma b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = \sigma b \frac{h^3}{12} = \left(\sigma b h \right) \frac{h^2}{12} = M \frac{h^2}{12}$$

$$B = \sigma \int_{-h/2}^{h/2} \left(\int_{-b/2}^{b/2} x^2 dx \right) dy = \sigma \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} dy$$

$$= \sigma \frac{b^3}{12} \int_{-h/2}^{h/2} dy = \sigma \frac{b^3}{12} \left[y \right]_{-h/2}^{h/2} = \sigma h \frac{b^3}{12}$$

$$= \left(\sigma b h \right) \frac{b^2}{12} = M \frac{b^2}{12}$$

$$\left[I(G,S)\right]_{R_G} = \begin{bmatrix} \frac{Mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Mb^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M\left(h^2+b^2\right)}{12} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{M}{12}\begin{bmatrix} h^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & h^2+b^2 \end{bmatrix}$$

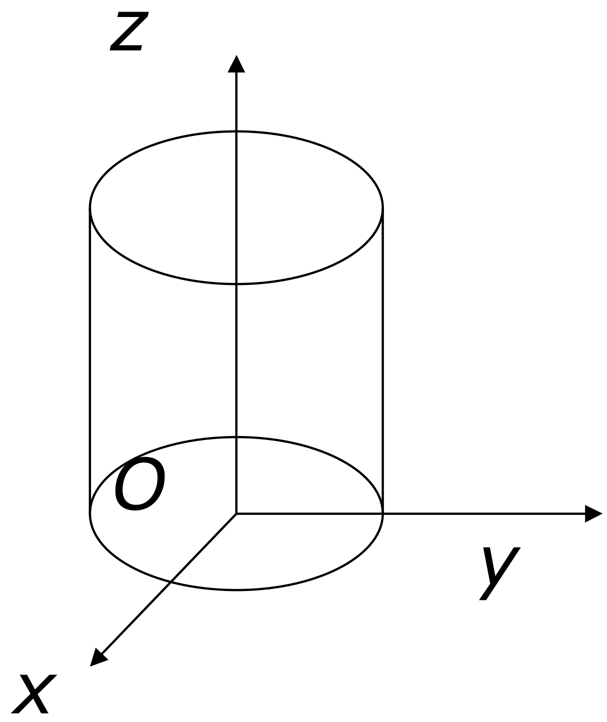
Matrice d’inertie

Exo 2

Calcul d'opérateur d'inertie : exercice 2

Déterminer la matrice d'inertie

$$\left[I(G,S)\right]_{R_G}$$



Ensuite

$$\left[I(O,S)\right]_{R_G}$$

d'un cylindre plein de masse m,

de rayon R et de hauteur H

Symétrie

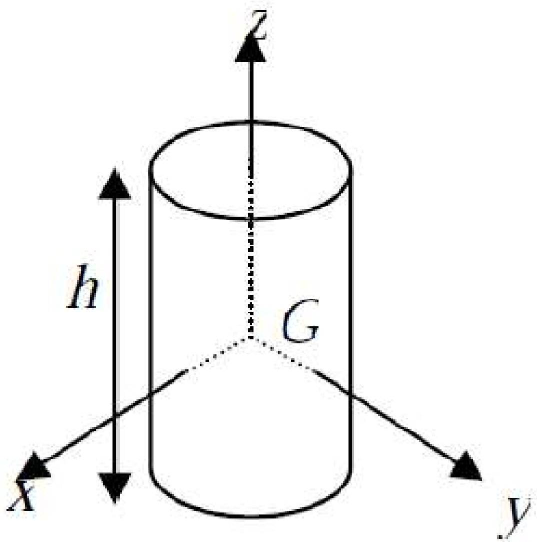
$$\left[I(G,S)\right]_{R_G} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathrm{R_G}}$$

Masse du cylindre

$$M = \rho V = \rho \pi R^2 H$$

COURS UTILE

Cylindre de masse m , de hauteur h et de rayon R



$$I(G,S)=\begin{bmatrix} m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\left(\frac{R^2}{2}\right) \end{bmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$$

$$\left[I(G,S)\right]_{R_G}=\begin{bmatrix} \frac{MR^2}{4}+\frac{MH^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4}+\frac{MH^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix}_{\mathrm{R_G}}$$

Méthode 2 : Calcul

COURS UTILE

Forme générale de la matrice inertie en O dans la base Bs associé au solide S

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2).dm & -\int_S x.y.dm & -\int_S x.z.dm \\ -\int_S x.y.dm & \int_S (x^2+z^2).dm & -\int_S y.z.dm \\ -\int_S x.z.dm & -\int_S y.z.dm & \int_S (x^2+y^2).dm \end{bmatrix}_{Bs}$$

Symétrie

$$\left[I(G,S)\right]_{R_G} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathrm{R_G}}$$

Astuce car le calcul A est … pas rigolo.

avec $A = C/2 + C'$ et

$$C' = \iiint z^2 dm$$

Masse du cylindre

$$M = \rho V = \rho \pi R^2 H$$

Paramétrage: coordonnées cylindriques (r, θ, z)

dm = ρdV = ρdz.dr.rdθ

$$C = \iiint (x^2 + y^2)dm = \rho \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left(\int_0^R r^3 dr \right) dz \right) d\theta$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R dz \right) d\theta = \rho \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \frac{R^4}{4} dz \right) d\theta$$

$$C = \rho \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \left[z \right]_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} d\theta = \rho \frac{R^4}{4} H \left[\theta \right]_0^{2\pi} = \rho \frac{R^4}{4} 2\pi H$$

$$= \rho\pi \frac{R^4}{2} H = \rho\pi R^2 H \frac{R^2}{2} = \frac{MR^2}{2}$$

$$C' = \iiint z^2 dm = \rho \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left(\int_0^R z^2 r dr \right) dz \right) d\theta$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R dz \right) d\theta = \rho \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 dz \right) d\theta$$

$$C' = \rho \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} d\theta = \rho \frac{R^2}{2} \frac{H^3}{12} \left[\theta \right]_0^{2\pi} =$$

$$2\pi\rho \frac{R^2}{2} \frac{H^3}{12} = \rho\pi R^2 H \left(\frac{H^2}{12} \right) = \frac{MH^2}{12}$$

$$A = \frac{C}{2} + C' = \frac{MR^2}{4} + \frac{MH^2}{12}$$

$$\left[I(G,S)\right]_{R_G} = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{4} + \frac{MH^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} + \frac{MH^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix}_{\mathrm{R_G}}$$

En déduire la matrice d'inertie en O, notée

$$\left[I(O,S)\right]_{R_G}$$

Théorème de Huygens

$$\left[I(O,S)\right]_{R_G} = \left[I(G,S)\right]_{R_G} + \ldots\ldots$$

COURS UTILE

$$I(A,S) = I(G,S) + m_s \begin{bmatrix} (y_G^2 + z_G^2) & -x_G.y_G & -x_G.z_G \\ -x_G.y_G & (x_G^2 + z_G^2) & -y_G.z_G \\ -x_G.z_G & -y_G.z_G & (x_G^2 + y_G^2) \end{bmatrix}_{Bs} \qquad \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}_{Bs}$$

Ici :

$$\left[I(O,S)\right]_{R_G} = \left[I(G,S)\right]_{R_G} + \ldots\ldots \qquad \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{H}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left[I(O,S)\right]_{R_G} = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{4}+\frac{MH^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4}+\frac{MH^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix} + M\begin{bmatrix} \frac{H^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[I(O,S)\right]_{R_G} = M\begin{bmatrix} \frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{bmatrix}$$