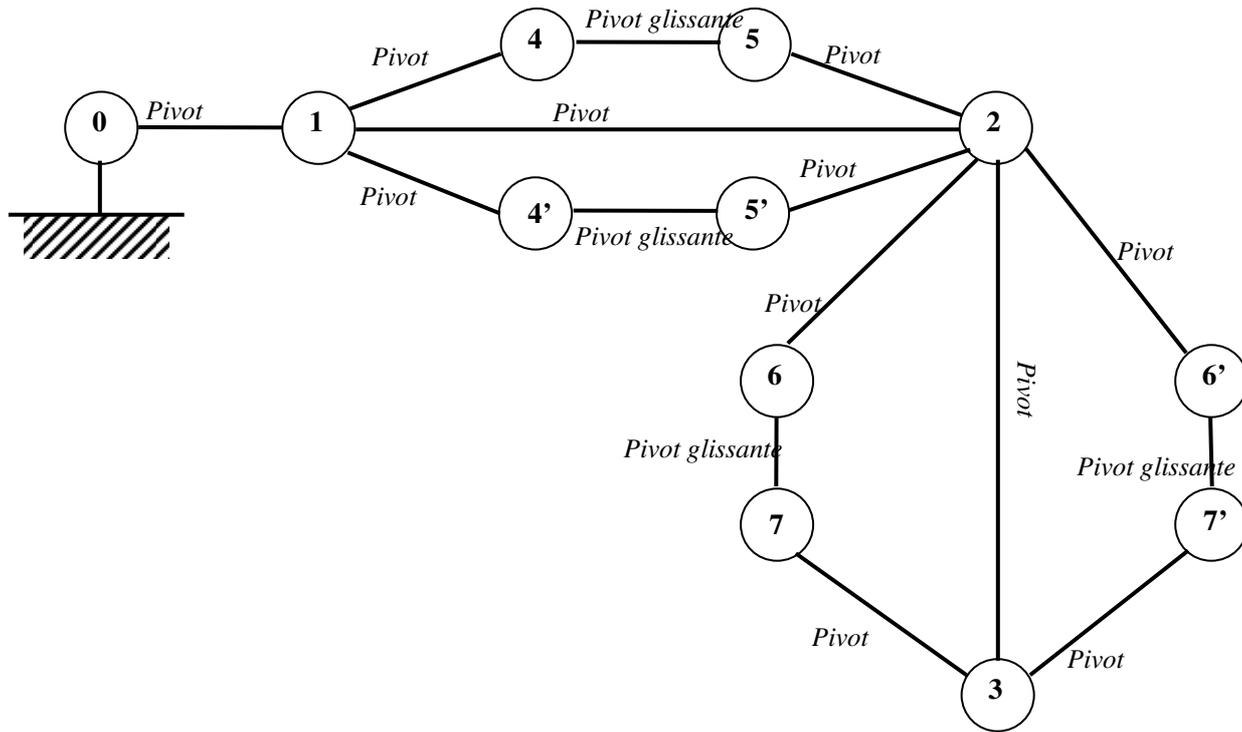


QUESTION 1
 QUESTION 2 cf. poly de cours
 QUESTION 3

QUESTION 4

Grphe des liaisons du mcanisme à tudier :



Hyperstatisme :

$$h = m_u + m_i + 6\gamma - N_C$$

Le mcanisme comporte :

- 4 boucles indpendantes : $\gamma = 4$
- 19 inconnues cinmatiques : 11 pivots + 4 pivots glissantes : $N_C = 11 + 4 \times 2 = 19$
- Pas de mobilités internes $m_i = 0$ et 3 mobilités utiles : les mobilités des liaisons pivots (0-1), (1-2) et (2-3), $m_u = 3$

D'où un degré d'hyperstatisme : $h = 3 + 0 + 6 \times 4 - 19$, soit **$h = 8$**

Isostatisme :

On change les pivots situés aux l'extrémités des vérins (pivots glissantes) par des sphériques, soient les liaisons (1-4), (1-4'), (2-5), (2-5'), (2-6), (2-6'), (3-7) et (3-7').

Le mcanisme comporte désormais:

- Toujours 4 boucles indpendantes : $\gamma = 4$
- 35 inconnues cinmatiques : 3 pivots + 4 pivots glissantes et 8 sphériques:
 $N_C = 3 + 4 \times 2 + 8 \times 3 = 35$

- Toujours 3 mobilités utiles : les mobilités des liaisons pivots (0-1), (1-2) et (2-3), $m_u = 3$, mais des mobilités internes : rotation du corps et de la tige autour de leur axe (2 mobilités internes) pour chacun des 4 vérins: $m_i = 4 \times 2 = 8$

D'où un degré d'hyperstatisme : $h = 3 + 8 + 6 \times 4 - 35$, soit $h = 0$, le mécanisme est bien isostatique. On peut aussi remplacer ces mêmes liaisons par des sphériques à doigts (la rotation éliminée sera celle de la mobilité interne de la solution à sphérique), ainsi il n'y aura pas de mobilité interne.

QUESTION 5 et 6

Réponse à la question 5

MISE EN EVIDENCE DU PROBLEME.

Echelle : 10 mm = 2,5 mm/s

Angle de dressage maximum.

Explication :

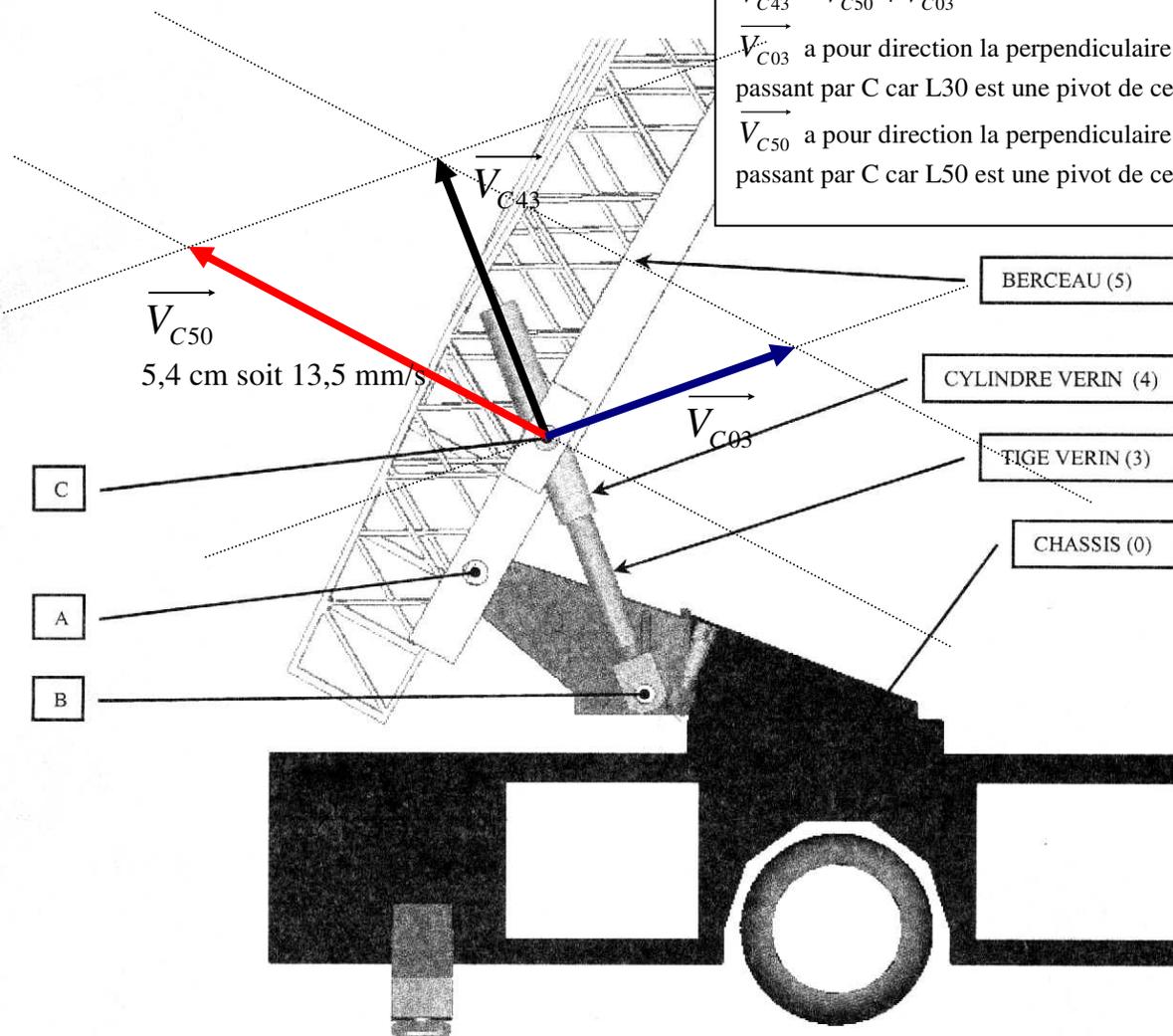
\vec{V}_{C43} est la vitesse de sortie des vérins : vers le haut, aligné avec (BC), 10mm/s soit 4cm

$$\vec{V}_{C50} = \underbrace{\vec{V}_{C54}}_0 + \vec{V}_{C40} = \vec{V}_{C43} + \vec{V}_{C30}, \text{ soit aussi :}$$

$$\vec{V}_{C43} = \vec{V}_{C50} + \vec{V}_{C03}$$

\vec{V}_{C03} a pour direction la perpendiculaire à (BC) passant par C car L30 est une pivot de centre B

\vec{V}_{C50} a pour direction la perpendiculaire à (AC) passant par C car L50 est une pivot de centre A

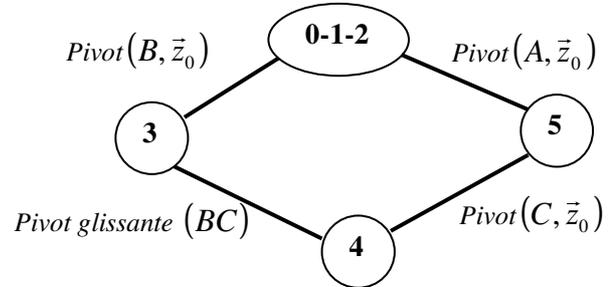


QUESTION 7

$$\vec{V}(D,5/0) = \underbrace{\vec{V}(A,5/0)}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{\Omega}(5/0) = -H \vec{x}_5 \wedge \dot{\theta} \vec{z}_0 = H \dot{\theta} \vec{y}_5$$

QUESTION 8

Graphe des liaisons :



Ecriture de la fermeture cinématique :

$${}_c\{V(5/0)\} + {}_c\{V(0/3)\} + {}_c\{V(3/4)\} + {}_c\{V(4/5)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Expression en fonction du paramétrage :

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ c \dot{\theta} \vec{y}_5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\dot{\beta} \vec{z}_0 \\ r \dot{\beta} \vec{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -v \vec{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (\dot{\beta} - \dot{\theta}) \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

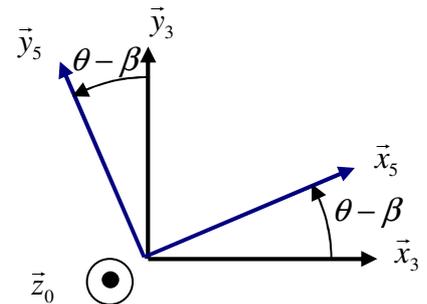
Détails du calcul des vecteurs vitesse :

- $\vec{V}(C,5/0) = \underbrace{\vec{V}(A,5/0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega}(5/0) = -c \vec{x}_5 \wedge \dot{\theta} \vec{z}_0 = c \dot{\theta} \vec{y}_5$
- $\vec{V}(C,0/3) = \underbrace{\vec{V}(B,0/3)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega}(0/3) = -r \vec{y}_3 \wedge -\dot{\beta} \vec{z}_0 = r \dot{\beta} \vec{x}_3$

D'où : $c \dot{\theta} \vec{y}_5 + r \dot{\beta} \vec{x}_3 - v \vec{y}_3 = \vec{0}$, soit le résultat demandé en projetant sur \vec{y}_3 :

$$v = c \dot{\theta} \underbrace{(\vec{y}_5 \cdot \vec{y}_3)}_{\cos(\theta - \beta)}$$

$$v = c \dot{\theta} \cos(\theta - \beta)$$



QUESTION 9

Fermeture géométrique :

$\overrightarrow{O_0B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AO_0} = \vec{0}$, ce qui s'exprime en fonction du paramétrage :

$$b \vec{x}_0 + r \vec{y}_3 - c \vec{x}_5 - a \vec{y}_0 = \vec{0}$$

En projection respectivement sur \vec{x}_0 et sur \vec{y}_0 :

$$\begin{cases} b - r \sin \beta - c \cos \theta = 0 \\ r \cos \beta - c \sin \theta - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r \sin \beta = b - c \cos \theta \\ r \cos \beta = a + c \sin \theta \end{cases}, \text{ d'où } \tan \beta = \frac{b - c \cos \theta}{a + c \sin \theta}$$

En projection sur \vec{x}_3 : $a \cdot \sin \beta + c \cdot \cos(\theta - \beta) - b \cdot \cos \beta = 0$, soit en développant le cos et en refactorisant :

$$(a + c \cdot \sin \theta) \cdot \sin \beta - (b - c \cdot \cos \theta) \cdot \cos \beta = 0. \text{ On en déduit la même relation demandée: } \tan \beta = \frac{b - c \cdot \cos \theta}{a + c \cdot \sin \theta}$$

QUESTION 10

1^{ère} méthode : dans la suite logique de l'énoncé !!!

$$v = c \dot{\theta} \cos(\theta - \beta) = c \dot{\theta} [\cos \beta \cos \theta + \sin \beta \sin \theta] = c \dot{\theta} \cos \beta [\cos \theta + \tan \beta \sin \theta]$$

Or $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}}$, d'où l'expression de la vitesse en fonction de $\tan \beta$:

$$v = \frac{c \dot{\theta}}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} [\cos \theta + \tan \beta \sin \theta], \text{ soit}$$

$$v = \frac{c \dot{\theta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b - c \cos \theta}{a + c \sin \theta}\right)^2}} \left[\cos \theta + \frac{b - c \cos \theta}{a + c \sin \theta} \sin \theta \right] = \frac{c \dot{\theta} (\cos \theta (a + c \sin \theta) + \sin \theta (b - c \cos \theta))}{\sqrt{(a + c \sin \theta)^2 + (b - c \cos \theta)^2}}$$

$$v = \frac{c \dot{\theta} (a \cos \theta + b \sin \theta)}{\sqrt{(a + c \sin \theta)^2 + (b - c \cos \theta)^2}}$$

Or la vitesse des points de la plate-forme étant considéré constante, on a

$$\|\vec{V}(D,5/0)\| = H \dot{\theta} = \text{constante d'où } c \dot{\theta} = \frac{c \|\vec{V}(D,5/0)\|}{H} = \frac{c V_{\text{plate-forme}}}{H}.$$

Soit le résultat :
$$v = \frac{c \|\vec{V}(D,5/0)\| (a \cos \theta + b \sin \theta)}{H \sqrt{(a + c \sin \theta)^2 + (b - c \cos \theta)^2}}$$

2^{ème} méthode : à partir de la fermeture géométrique :

Il suffit de remarquer que $v = \dot{r}$. Or, d'après la fermeture géométrique projetée sur \vec{y}_3 , on trouve

$$r = \sqrt{(b - c \cos \theta)^2 + (a + c \sin \theta)^2}, \text{ d'où}$$

$$v = \dot{r} = \frac{2c \dot{\theta} \sin \theta (b - c \cos \theta) + 2c \dot{\theta} \cos \theta (a + c \sin \theta)}{2\sqrt{(b - c \cos \theta)^2 + (a + c \sin \theta)^2}} = \frac{c \dot{\theta} [\sin \theta (b - c \cos \theta) + \cos \theta (a + c \sin \theta)]}{\sqrt{(b - c \cos \theta)^2 + (a + c \sin \theta)^2}}$$

$$v = \dot{r} = \frac{c \dot{\theta} [b \sin \theta + a \cos \theta]}{\sqrt{(b - c \cos \theta)^2 + (a + c \sin \theta)^2}}, \text{ soit le même résultat.}$$

3^{ème} méthode :

$$\vec{V}(D,5/0) = H \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_5 = H \cdot \frac{v}{c \cdot \cos(\theta - \beta)} \cdot \vec{y}_5 = \frac{H \cdot v}{c \cdot \cos \left[\theta - \arctan \left(\frac{b - c \cdot \cos \theta}{a + c \cdot \sin \theta} \right) \right]} \cdot \vec{y}_5$$

pour avoir $\|\vec{V}(D,5/0)\|$ constante, il faut :
$$\frac{H \cdot v}{c \cdot \cos \left[\theta - \arctan \left(\frac{b - c \cdot \cos \theta}{a + c \cdot \sin \theta} \right) \right]} = cste$$

$$\Rightarrow v = \frac{cste}{H} \cdot c \cdot \cos \left[\theta - \arctan \left(\frac{b - c \cdot \cos \theta}{a + c \cdot \sin \theta} \right) \right]$$

QUESTION 11

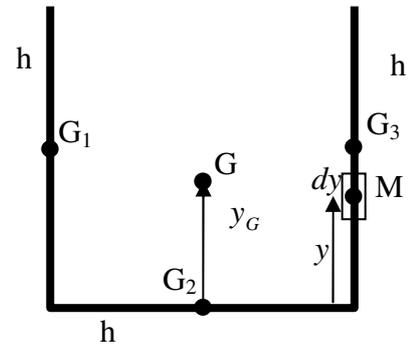
En posant $\vec{OG} = \begin{matrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{matrix}$, on peut, par raison de symétrie, prendre : $\vec{OG} = \begin{matrix} L/2 \\ y_G \\ 0 \end{matrix}$. Il ne reste alors plus qu'à

déterminer y_G , qui est le même que pour une section de la poutre :

$$m y_G = \int_{\text{morceau de gauche}} y dm + \underbrace{\int_{\text{morceau du bas}} y dm}_{0 \text{ car } y=0} + \int_{\text{morceau de droite}} y dm = 2 \int_{\text{morceau de droite}} y dm$$

$$m y_G = 2 \int_0^h y \frac{m}{3h} dy = \frac{2m}{3h} \int_0^h y dy = \frac{2m}{3h} \frac{h^2}{2} = \frac{h}{3}$$

Soit $\vec{OG} = \begin{matrix} L/2 \\ h/3 \\ 0 \end{matrix}$



Ou plus simplement, en cherchant le centre de gravité des trois masses ponctuelles (m, G_1) ,

(m, G_2) et (m, G_3) : $3m y_G = m y_{G1} + m y_{G2} + m y_{G3} = m \frac{h}{2} + m \cdot 0 + m \frac{h}{2} = mh$, d'où le résultat : $y_G = \frac{h}{3}$

QUESTION 12

- G centre de gravité de 5 donc, $\vec{\sigma}_{G,50} = [I(5)] \vec{\Omega}_{50} = \begin{bmatrix} I_{Gx} \\ I_{Gy} \\ I_{Gz} \end{bmatrix}_{b_5} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = I_{Gz} \dot{\theta} \vec{z}_0$

$$\vec{\sigma}_{A,50} = \vec{\sigma}_{G,50} + \vec{AG} \wedge 3m \vec{V}_{G,50} = \vec{\sigma}_{G,50} + \vec{AG} \wedge 3m [\vec{GA} \wedge \vec{\Omega}_{50}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{Gz} \dot{\theta} \end{bmatrix}_{b_5} + 3m \begin{bmatrix} \frac{L}{2} - d \\ \frac{h}{3} \\ 0 \end{bmatrix}_{b_5} \wedge - \begin{bmatrix} \frac{L}{2} - d \\ \frac{h}{3} \\ 0 \end{bmatrix}_{b_5} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_{b_5}$$

$$\vec{\sigma}_{A,50} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{Gz} \dot{\theta} \end{bmatrix}_{b_5} + 3m \begin{bmatrix} \frac{L}{2} - d \\ \frac{h}{3} \\ 0 \end{bmatrix}_{b_5} \wedge - \begin{bmatrix} \frac{L}{2} - d \\ \frac{h}{3} \\ 0 \end{bmatrix}_{b_5} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_{b_5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{Gz} \dot{\theta} \end{bmatrix}_{b_5} + 3m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left[\left(\frac{L}{2} - d \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right] \dot{\theta} \end{bmatrix}_{b_5}$$

$$\vec{\sigma}_{A,50} = \left[I_{Gz} + 3m \left[\left(\frac{L}{2} - d \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right] \right] \dot{\theta} \vec{z}_0. \text{ Or A est fixe dans le mouvement de 5/0, donc :}$$

$$\vec{\delta}_{A,50} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_{A,50}}{dt} \right]_0 = \left[I_{Gz} + 3m \left[\left(\frac{L}{2} - d \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right] \right] \ddot{\theta} \vec{z}_0$$

- Ce que l'on retrouve bien sur, en utilisant Huygens :

$$\vec{\delta}(A,5/0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}(A,5/0)}{dt} \right]_{R_0}$$

$$\vec{\sigma}(A,5/0) = I(A,5) \cdot \vec{\Omega}(5/0) = \begin{bmatrix} I_{Ax} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Az} \end{bmatrix}_{(\vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_0)} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = I_{Az} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0$$

$$\text{avec } I_{Az} = I_{Gz} + 3 \cdot m \cdot \left[\left(\frac{L}{2} - d \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right]$$

$$\vec{\sigma}(A,5/0) = \left[I_{Gz} + 3 \cdot m \cdot \left[\left(\frac{L}{2} - d \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right] \right] \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \quad \text{D'où } \vec{\delta}(A,5/0) = \left[I_{Gz} + 3 \cdot m \cdot \left[\left(\frac{L}{2} - d \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right] \right] \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z}_0$$

QUESTION 13

La plate-forme restant toujours horizontale, elle est animée d'un mouvement de translation (circulaire), on en déduit donc $\vec{\delta}_{G_p,60} = \vec{0}$.

$$\vec{\delta}_{A,60} = \vec{\delta}_{G_p,60} + \overrightarrow{AG_p} \wedge M \vec{a}_{G_p,60}$$

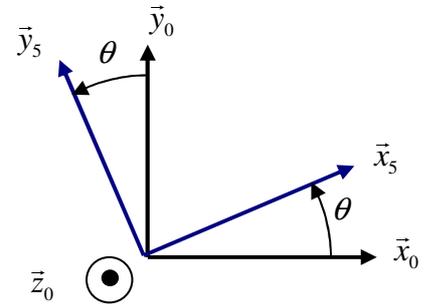
Or $\overrightarrow{AG_p} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG_p} = H \vec{x}_5 + \lambda \vec{x}_0 + \mu \vec{y}_0$, d'où,

$$\vec{V}_{G_p,60} = \left[\frac{d\overrightarrow{AG_p}}{dt} \right]_0 = H\dot{\theta} \vec{y}_5, \text{ et } \vec{a}_{G_p,60} = \left[\frac{d\vec{V}_{G_p,60}}{dt} \right]_0 = H\ddot{\theta} \vec{y}_5 - H\dot{\theta}^2 \vec{x}_5$$

Soit en effectuant le calcul dans la base 5 :

$$\vec{\delta}_{A,60} = M \begin{vmatrix} H + \lambda \cos \theta + \mu \sin \theta & -H\dot{\theta}^2 \\ -\lambda \sin \theta + \mu \cos \theta & H\ddot{\theta} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge = M [H\ddot{\theta}(H + \lambda \cos \theta + \mu \sin \theta) + H\dot{\theta}^2(-\lambda \sin \theta + \mu \cos \theta)] \vec{z}_0$$

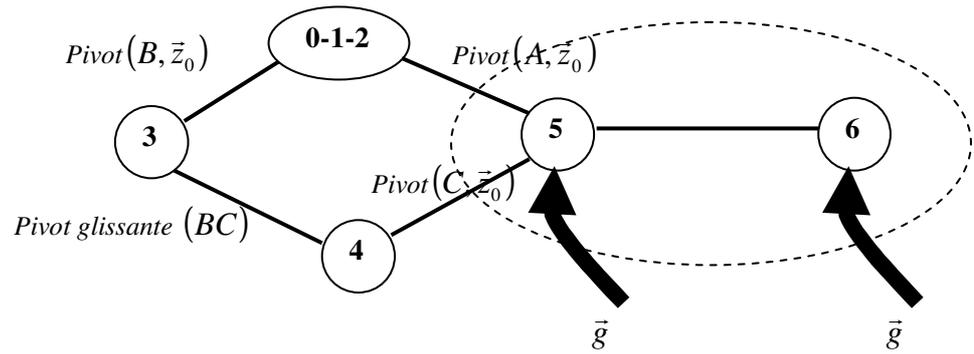
$$\vec{\delta}_{A,60} = M [H\ddot{\theta}(H + \lambda \cos \theta + \mu \sin \theta) + H\dot{\theta}^2(-\lambda \sin \theta + \mu \cos \theta)] \vec{z}_0$$



QUESTION 14

Les deux questions précédentes invitent clairement à isoler l'ensemble {5+6} et à appliquer le théorème du moment dynamique en A !!!

Le graphe des liaisons complété des actions mécaniques extérieures représentées ci-dessous, permettait de s'en rendre compte.



Inventaire des actions
mécaniques extérieures :

- 0 sur 5 :
 $\vec{M}_A(0 \rightarrow 5) \cdot \vec{z}_0 = 0$, c'est pour cela qu'il faut écrire le théorème du moment en A (pas d'inconnues de liaisons dans l'expression)
- Vérin 4 sur 5 :
d'après l'énoncé c'est un glisseur de résultante $\vec{R} = R \vec{y}_3$. Le point d'application n'étant pas donné on peut le justifier par l'isolement de 3+4 et le fait que leurs masses sont négligées (donc pas d'effet inertie). Ensemble soumis à 2 forces idem qu'en statique, opposées alignées donc avec (BC). On a donc

$$\vec{M}_A(0 \rightarrow 5) \cdot \vec{z}_0 = \underbrace{\vec{M}_C(0 \rightarrow 5)}_0 \cdot \vec{z}_0 + (\vec{AC} \wedge R \vec{y}_3) \cdot \vec{z}_0 = cR(\vec{x}_5 \wedge \vec{y}_3) \cdot \vec{z}_0 = cR(\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_5) \cdot \vec{y}_3 = cR(\vec{y}_5 \cdot \vec{y}_3) = cR \cos(\theta - \beta)$$

- \vec{g} sur 5 :
 $\vec{M}_A(\vec{g} \rightarrow 5) \cdot \vec{z}_0 = \underbrace{\vec{M}_G(\vec{g} \rightarrow 5)}_0 \cdot \vec{z}_0 + (\vec{AG} \wedge -3mg \vec{y}_0) \cdot \vec{z}_0 = -3mg(\vec{y}_0 \wedge \vec{z}_0) \cdot \vec{AG}$

$$\vec{M}_A(\vec{g} \rightarrow 5) \cdot \vec{z}_0 = -3mg \vec{x}_0 \cdot \vec{AG} = -3mg \left[\left(\frac{L}{2} - d \right) \cos \theta + \frac{h}{3} \sin \theta \right]$$

- \vec{g} sur 6 :
 $\vec{M}_A(\vec{g} \rightarrow 6) \cdot \vec{z}_0 = \underbrace{\vec{M}_{G_P}(\vec{g} \rightarrow 6)}_0 \cdot \vec{z}_0 + (\vec{AG}_P \wedge -Mg \vec{y}_0) \cdot \vec{z}_0 = -Mg(\vec{y}_0 \wedge \vec{z}_0) \cdot \vec{AG}_P$

$$\vec{M}_A(\vec{g} \rightarrow 6) \cdot \vec{z}_0 = -Mg \vec{x}_0 \cdot \vec{AG}_P = -Mg[H \cos \theta + \lambda]$$

Théorème du moment dynamique à l'ensemble (5+6) en projection sur (A, \vec{z}_0) :

$$\left[I_{Gz} + 3m \left[\left(\frac{L}{2} - d \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right] \right] \ddot{\theta} + M[H\ddot{\theta}(H + \lambda \cos \theta + \mu \sin \theta) + H\dot{\theta}^2(-\lambda \sin \theta + \mu \cos \theta)] =$$

$$cR \cos(\theta - \beta) - 3mg \left[\left(\frac{L}{2} - d \right) \cos \theta + \frac{h}{3} \sin \theta \right] - Mg[H \cos \theta + \lambda]$$

Soit l'expression de l'effort des vérins :

$$R = \frac{\left[I_{Gz} + 3m \left[\left(\frac{L}{2} - d \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right] \right] \ddot{\theta} + M \left[H \ddot{\theta} (H + \lambda \cos \theta + \mu \sin \theta) + H \dot{\theta}^2 (-\lambda \sin \theta + \mu \cos \theta) \right] + 3mg \left[\left(\frac{L}{2} - d \right) \cos \theta + \frac{h}{3} \sin \theta \right] + Mg [H \cos \theta + \lambda]}{c \cos(\theta - \beta)}$$

QUESTION 15

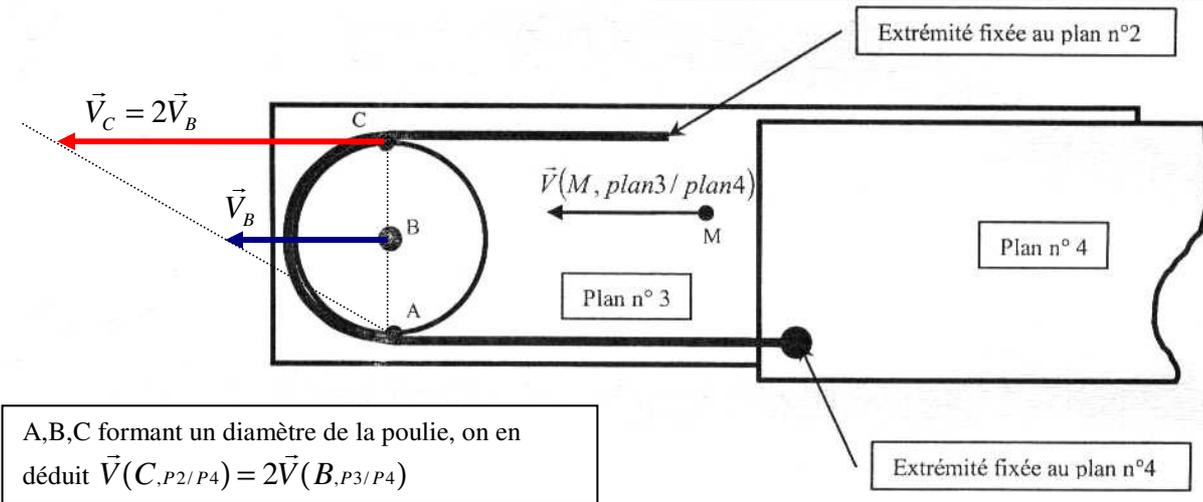
$v = R\omega = R \frac{2\pi N}{60}$, soit numériquement $v = 0,2\pi = 0,628 \text{ m.s}^{-1}$

QUESTION 16

Réponse à la question 16

PRINCIPE DU SYSTEME DE DEPLOIEMENT.

$\vec{V}(B, P3/P4) = \vec{V}(M, P3/P4)$ puisque P3 est en translation / P4.
 D'autre part : $\vec{V}(B, P3/P4) = \vec{V}(B, Treuil/P4)$ et $\vec{V}(A, Treuil/P4) = \vec{0}$ (pas de glissement en A). Or $\vec{V}(C, Treuil/P4) = \vec{V}(C, P2/P4)$ (pas de glissement en C). On en déduit $\vec{V}(C, P2/P4)$ par « le triangle des vitesses », du treuil / P4.



QUESTION 17

Les vitesses des plans étant multipliées par 2 entre chaque plan, on en déduit les vitesses des plans par rapport au bâti, puis par rapport au plan précédents :

$V_{P3/0} = V_{P3/P4} = v = 0,628 \text{ m.s}^{-1}$

$V_{P2/0} = V_{P2/P4} = 2v \Rightarrow V_{P2/P3} = v = 0,628 \text{ m.s}^{-1}$

$V_{P1/0} = V_{P1/P4} = 4v \Rightarrow V_{P1/P2} = 2v = 1,26 \text{ m.s}^{-1}$

Le temps de déploiement est donc celui des deux plus « lents », c'est-à-dire de P3/P4 et P2/P3, soit :

$$t_{\text{déploiement}} = \frac{9-2}{v} = \frac{7}{0,2\pi} = \frac{35}{\pi} \approx 11,2 \text{ s}$$

QUESTION 18

Tous les solides sont en translation puisque l'angle de dressage est ici considéré constant, donc leurs énergies cinétiques sont de la forme $E_C = \frac{1}{2} mV^2$

- Plate-forme : $E_{CPf} = \frac{1}{2} mV^2$
- Plan 1 : $E_{CP1} = \frac{1}{2} MV^2$
- Plan 2 : $E_{CP2} = \frac{1}{2} M \frac{V^2}{4}$
- Plan 3 : $E_{CP3} = \frac{1}{2} M \frac{V^2}{16}$
- Plan 4, fixe : $E_{CP4} = 0$

D'où l'énergie cinétique totale de l'ensemble (plate-forme + plans) :

$$E_{C(Pf+P1+P2+P3+P4)} = \frac{1}{2} \left(m + M \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right) \right) V^2, \text{ soit : } \boxed{E_{C(Pf+P1+P2+P3+P4)} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{21}{16} M \right) V^2}$$

QUESTION 19

Solide en rotation autour d'un axe fixe : $E_{CT} = \frac{1}{2} I\omega^2$, or $V_{P3/0} = V_{P3/P4} = v = \frac{V}{4} = R\omega$, donc

$$E_{CT} = \frac{1}{2} I \frac{V^2}{16R^2}, \text{ soit } \boxed{E_{CT} = \frac{1}{2} \frac{I}{16R^2} V^2}$$

QUESTION 20

$$P_{ext} = P_{\vec{g} \rightarrow Pf} + P_{\vec{g} \rightarrow P1} + P_{\vec{g} \rightarrow P2} + P_{\vec{g} \rightarrow P3} + \underbrace{P_{\vec{g} \rightarrow P4}}_{0, P4 \text{ immobile}} + P_{m \rightarrow Treuil}$$

$$P_{\vec{g} \rightarrow Pf} = \{T(\vec{g} \rightarrow Pf)\} \otimes \{V(Pf/0)\} = \left\{ \begin{matrix} -mg\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_p} \otimes \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ V\vec{x}_1 \end{matrix} \right\} = -mgV(\vec{y}_0 \cdot \vec{x}_1) = -mgV \sin \theta$$

De la même façon,

$$P_{\vec{g} \rightarrow P1} = -MgV \sin \theta$$

$$P_{\vec{g} \rightarrow P2} = -Mg \frac{V}{2} \sin \theta$$

$$P_{\vec{g} \rightarrow P3} = -Mg \frac{V}{4} \sin \theta$$

$$\text{Et : } P_{m \rightarrow Treuil} = C\omega = \frac{CV}{4R}$$

D'où l'expression des puissances extérieures : $P_{ext} = \frac{CV}{4R} - gV \sin \theta \left[m + M \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \right]$, soit :

$$\boxed{P_{ext} = V \left[\frac{C}{4R} - g \left(m + \frac{7}{4} M \right) \sin \theta \right]}$$

QUESTION 21

$$P_{\text{int}} = P_{P3 \leftrightarrow P4} + P_{P2 \leftrightarrow P3} + P_{P1 \leftrightarrow P2}$$

$$P_{P2 \leftrightarrow P1} = \{T(P2 \rightarrow P1)\} \otimes \{V(P1/P2)\} = \begin{Bmatrix} -F \vec{x}_1 \\ ? \end{Bmatrix}_P \otimes \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \frac{V}{2} \vec{x}_1 \end{Bmatrix}_{\forall P} = -F \frac{V}{2} (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1) = -F \frac{V}{2}$$

De la même façon,

$$P_{P3 \leftrightarrow P2} = \{T(P3 \rightarrow P2)\} \otimes \{V(P2/P3)\} = \begin{Bmatrix} -F \vec{x}_1 \\ ? \end{Bmatrix}_P \otimes \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \left(\frac{V}{2} - \frac{V}{4}\right) \vec{x}_1 \end{Bmatrix}_{\forall P} = -F \frac{V}{4} (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1) = -F \frac{V}{4}$$

$$P_{P4 \leftrightarrow P3} = \{T(P4 \rightarrow P3)\} \otimes \{V(P3/P4)\} = \begin{Bmatrix} -F \vec{x}_1 \\ ? \end{Bmatrix}_P \otimes \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \left(\frac{V}{4}\right) \vec{x}_1 \end{Bmatrix}_{\forall P} = -F \frac{V}{4} (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1) = -F \frac{V}{4}$$

D'où l'expression des puissances intérieures : $P_{\text{int}} = -FV \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right]$, soit :

$$\boxed{P_{\text{int}} = -FV}$$

QUESTION 22

Théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble (Treuil + parc échelle + plate-forme) :

$$\frac{dE_C}{dt} = P_{\text{int}} + P_{\text{ext}}, \text{ soit :}$$

$$\frac{d \left[\frac{1}{2} \left(m + \frac{21}{16} M \right) V^2 + \frac{1}{2} \frac{I}{16R^2} V^2 \right]}{dt} = -FV + V \left[\frac{C}{4R} - g \left(m + \frac{7}{4} M \right) \sin \theta \right]$$

$$\left[m + \frac{21}{16} M + \frac{I}{16R^2} \right] V \dot{V} = -FV + V \left[\frac{C}{4R} - g \left(m + \frac{7}{4} M \right) \sin \theta \right]$$

D'où : $\left[m + \frac{21}{16} M + \frac{I}{16R^2} \right] \dot{V} = -F + \frac{C}{4R} - g \left(m + \frac{7}{4} M \right) \sin \theta$, dont on déduit le couple moteur, avec $\dot{V} = \Gamma_0$

$$\boxed{C = 4R \left[\left(m + \frac{21}{16} M + \frac{I}{16R^2} \right) \Gamma_0 + F + g \left(m + \frac{7}{4} M \right) \sin \theta \right]}$$

QUESTION 23

La condition de non basculement de l'ensemble est que la réaction normale du contact avec le sol en M soit positive : $\boxed{Y_M > 0}$

Remarque :

La position limite demandée (calcul de statique) provoquera le basculement dès lors que les effets dynamiques (rentrée ou sortie du parc échelle) rentreront en compte !!!

Calcul de la position limite en statique :

Appliquons le théorème du moment statique à l'ensemble projeté suivant (N, \vec{z}_0) pour éliminer de l'équation les inconnues de liaisons X_N, Y_N, X_M qui ne nous intéressent pas.

$$\vec{M}_N(\vec{g} \rightarrow Pf) \cdot \vec{z}_0 = \underbrace{\vec{M}_{G_P}(\vec{g} \rightarrow Pf)}_{\vec{0}} \cdot \vec{z}_0 + \left(\overrightarrow{NG_P} \wedge -m_P g \vec{y}_0 \right) \cdot \vec{z}_0 = -m_P g (\vec{y}_0 \wedge \vec{z}_0) \cdot \overrightarrow{NG_P} = -m_P g \underbrace{\vec{x}_0 \cdot \overrightarrow{NG_P}}_{L-b} = -m_P g (L-b)$$

De la même manière :

$$\vec{M}_N(\vec{g} \rightarrow \text{Veh} + \text{Charge}) \cdot \vec{z}_0 = \underbrace{\vec{M}_{G_V}(\vec{g} \rightarrow \text{Veh} + \text{Charge})}_{\vec{0}} \cdot \vec{z}_0 + \left(\overrightarrow{NG_V} \wedge -m_V g \vec{y}_0 \right) \cdot \vec{z}_0 = -m_V g \vec{x}_0 \cdot \overrightarrow{NG_V} = m_V g b$$

$$\vec{M}_N(\vec{g} \rightarrow \text{Parc éch}) \cdot \vec{z}_0 = \underbrace{\vec{M}_{G_E}(\vec{g} \rightarrow \text{Parc éch})}_{\vec{0}} \cdot \vec{z}_0 + \left(\overrightarrow{NG_E} \wedge -m_E g \vec{y}_0 \right) \cdot \vec{z}_0 = -m_E g \vec{x}_0 \cdot \overrightarrow{NG_E} = -m_V g \left(\frac{L}{2} - b \right)$$

Pour les réactions du sol sur les stabilisateurs :

$$\vec{M}_N(\text{sol} \rightarrow \text{stabilisateurN}) = \vec{0}$$

$$\vec{M}_N(\text{sol} \rightarrow \text{stabilisateurM}) \cdot \vec{z}_0 = \underbrace{\vec{M}_M(\text{sol} \rightarrow \text{stabilisateurM})}_{\vec{0}} \cdot \vec{z}_0 + \left(\overrightarrow{NM} \wedge \vec{R}_N \right) \cdot \vec{z}_0 = -2bY_M$$

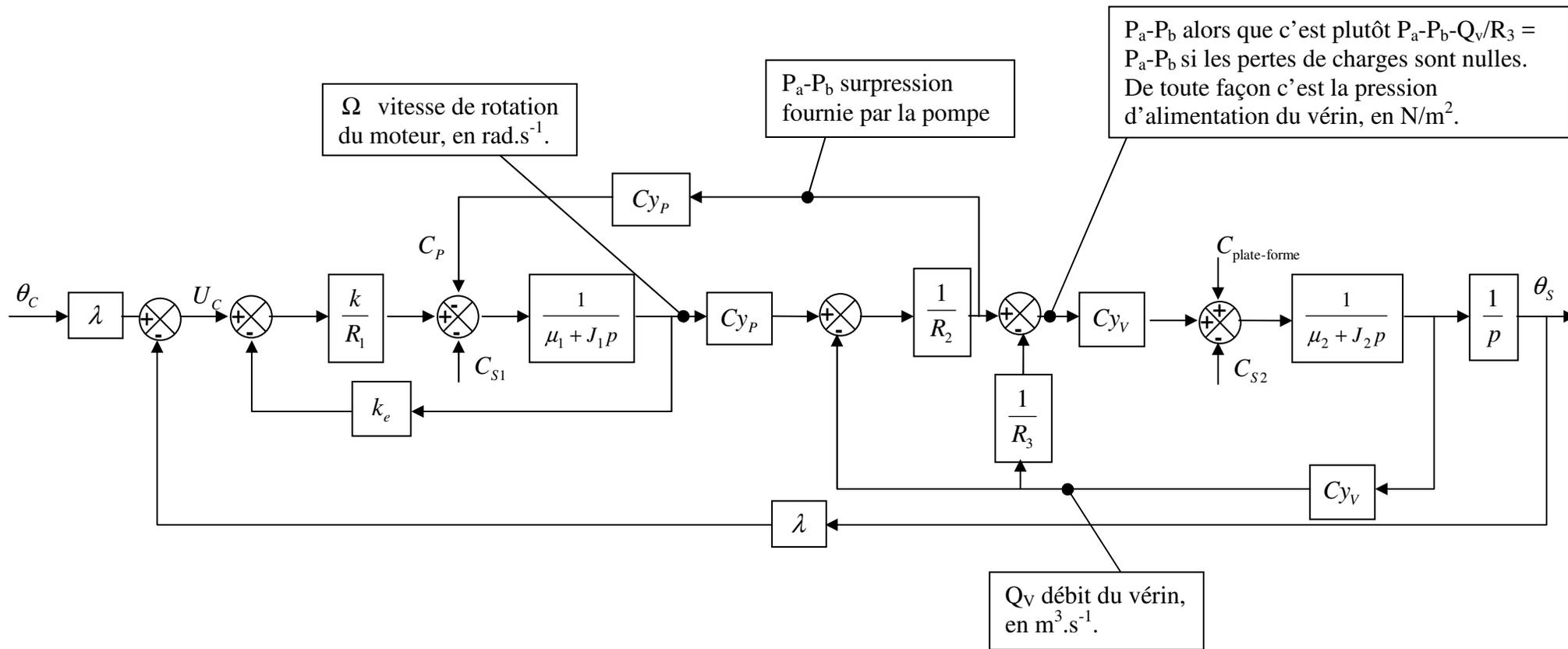
D'où l'équation du moment à l'ensemble projeté suivant (N, \vec{z}_0) :

$$-m_P g (L-b) - m_E g \left(\frac{L}{2} - b \right) + m_V g b - 2bY_M = 0$$

$$L_{\max} = L(Y_M = 0) \Rightarrow -m_P g (L_{\max} - b) - m_E g \left(\frac{L_{\max}}{2} - b \right) + m_V g b = 0, \text{ soit :}$$

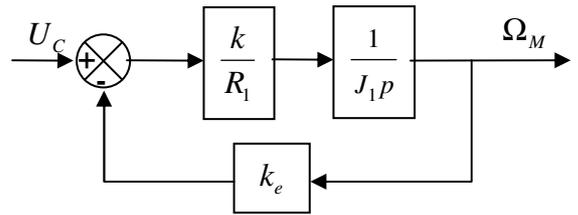
$$L_{\max} = 2b \frac{m_P + m_E + m_V}{2m_P + m_E}$$

QUESTION 24



QUESTION 25

En négligeant les frottements, on obtient le schéma bloc ci-contre :



Soit la fonction de transfert globale :

$$\frac{\Omega_M}{U_C} = \frac{\frac{k}{R_1 J_1 p}}{1 + \frac{k k_e}{R_1 J_1 p}} = \frac{k}{k k_e + R_1 J_1 p}, \text{ ce qui donne une vitesse de}$$

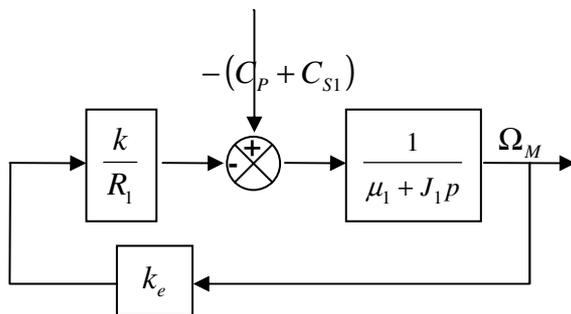
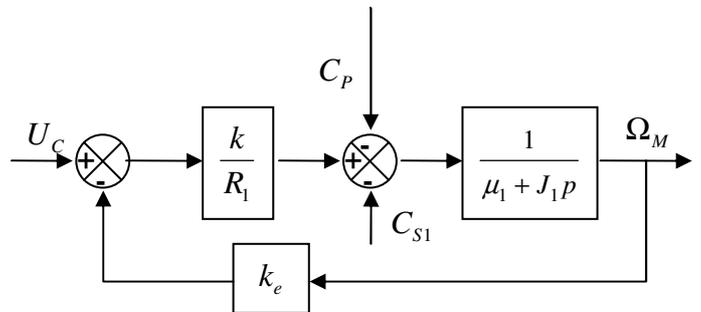
rotation en régime permanent ($p=0$) : $\Omega_M = \frac{1}{k_e} U_C$ à comparer à $\Omega_M = \frac{1}{k} U_C$ du moteur supposé

électriquement parfait de l'énoncé. On a donc : $k_e = k$

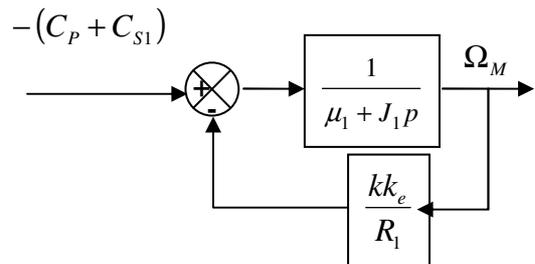
QUESTION 26

On peut « progressivement » se ramener à un schéma bloc « classique » :

On considère que $U_C = 0$, et on regroupe C_P et C_{S1}



Ce qui se présente sous forme « classique » :



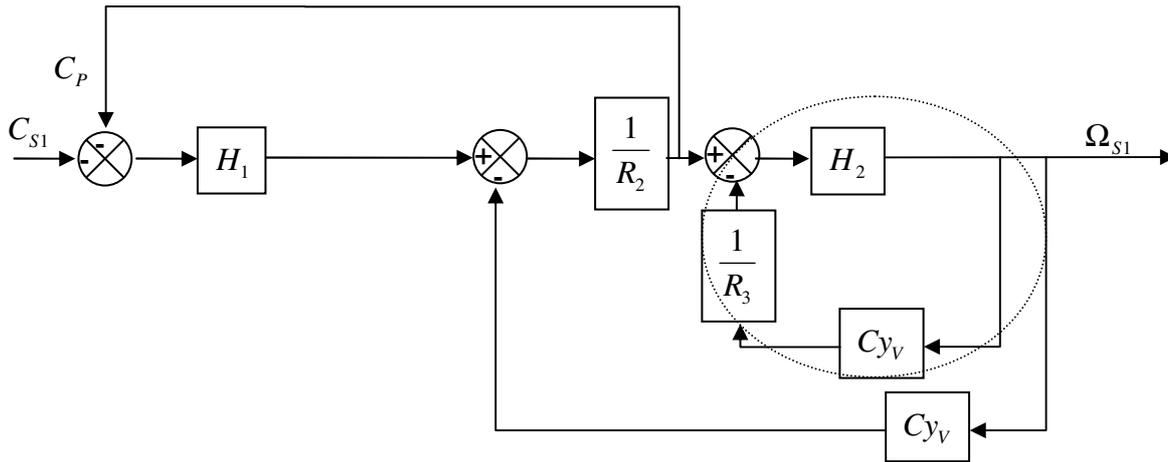
D'où la fonction de transfert ou transmittance en boucle fermée demandée :

$$\frac{\Omega_M}{-(C_P + C_{S1})} = \frac{\frac{1}{\mu_1 + J_1 p}}{1 + \frac{k k_e}{R_1 (\mu_1 + J_1 p)}} = \frac{R_1}{k k_e + R_1 \mu_1 + R_1 J_1 p}, \text{ soit } \boxed{\frac{\Omega_M}{(C_P + C_{S1})} = \frac{-R_1}{k k_e + R_1 \mu_1 + R_1 J_1 p}}$$

QUESTION 27

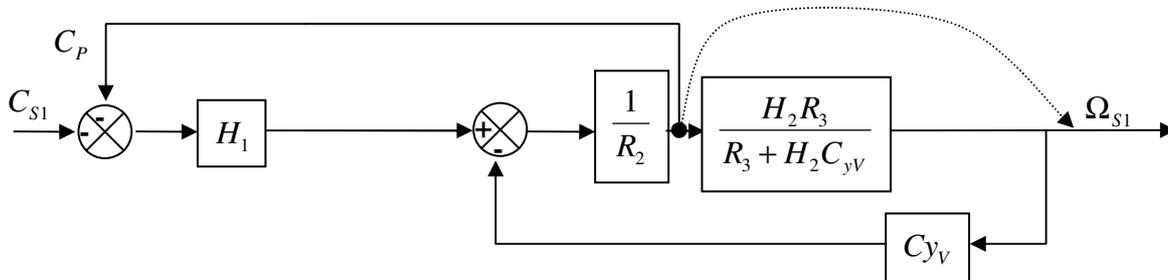
1^{ère} méthode : modification de schéma bloc

Le schéma bloc de l'énoncé peut aussi s'écrire :

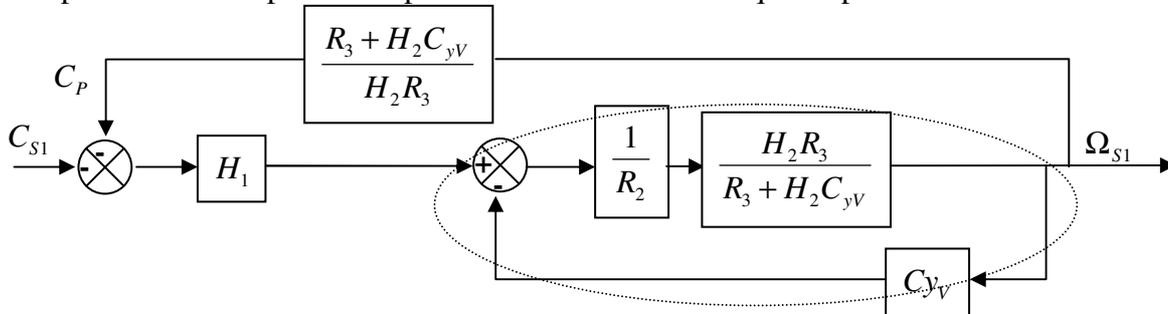


On peut remplacer la boucle entourée ci-dessus par le bloc : $\frac{H_2}{1 + \frac{H_2 C_{yV}}{R_3}} = \frac{H_2 R_3}{R_3 + H_2 C_{yV}}$, ce qui donne le

schéma bloc ci-dessous :

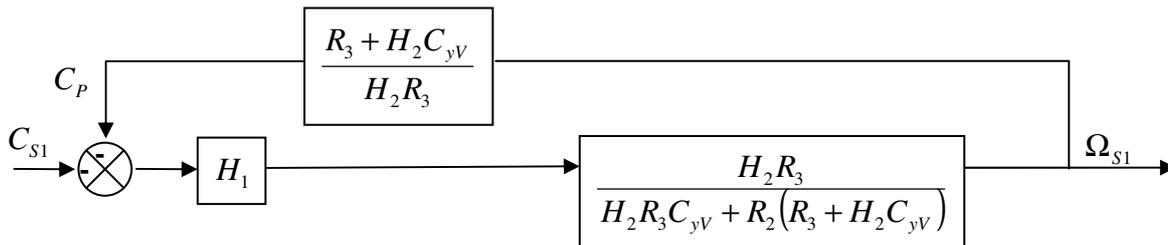


On déplace ensuite le point « de prélèvement » comme indiqué en pointillé ci-dessus :



On peut remplacer la boucle entourée en pointillée par : $\frac{\frac{H_2 R_3}{R_2 (R_3 + H_2 C_{yV})}}{1 + \frac{H_2 R_3 C_{yV}}{R_2 (R_3 + H_2 C_{yV})}} = \frac{H_2 R_3}{H_2 R_3 C_{yV} + R_2 (R_3 + H_2 C_{yV})}$,

soit le schéma bloc :



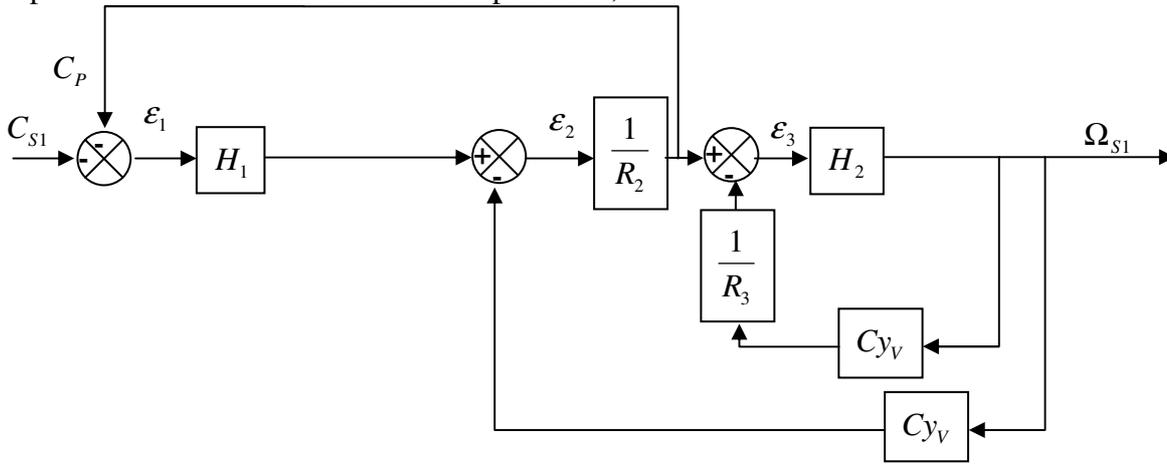
Ce qui donne la fonction de transfert :

$$\frac{\Omega_{S1}}{-C_{S1}} = \frac{\frac{H_1 H_2 R_3}{H_2 R_3 C_{yV} + R_2 (R_3 + H_2 C_{yV})}}{1 + \frac{H_1 H_2 R_3}{H_2 R_3 C_{yV} + R_2 (R_3 + H_2 C_{yV})} \frac{R_3 + H_2 C_{yV}}{H_2 R_3}} = \frac{\frac{H_1 H_2 R_3}{H_2 R_3 C_{yV} + R_2 (R_3 + H_2 C_{yV})}}{1 + \frac{H_1 (R_3 + H_2 C_{yV})}{H_2 R_3 C_{yV} + R_2 (R_3 + H_2 C_{yV})}}$$

$$\boxed{\frac{\Omega_{S1}}{C_{S1}} = \frac{-H_1 H_2 R_3}{H_1 (R_3 + H_2 C_{yV}) + H_2 R_3 C_{yV} + R_2 (R_3 + H_2 C_{yV})}}$$

2^{ème} méthode : analytique :

On pose les fonctions en sortie des comparateurs, définies sur le schéma bloc redessiné ci-dessous :



On écrit le système à 4 équations :

$$\begin{cases} \Omega_{S1} = H_2 \epsilon_3 \\ \epsilon_3 = \frac{1}{R_2} \epsilon_2 - \frac{C_{yV}}{R_3} \Omega_{S1} \\ \epsilon_2 = H_1 \epsilon_1 - C_{yV} \Omega_{S1} \\ \epsilon_1 = -C_{S1} - \frac{1}{R_2} \epsilon_2 \end{cases}$$

les équations (3) et (4) permettent d'écrire : $\epsilon_2 = -H_1 \left(C_{S1} + \frac{1}{R_2} \epsilon_2 \right) - C_{yV} \Omega_{S1}$, soit

$$\left(1 + \frac{H_1}{R_2} \right) \epsilon_2 = -C_{S1} H_1 - C_{yV} \Omega_{S1}, \text{ d'où : } \epsilon_2 = -\frac{R_2}{R_2 + H_1} [C_{S1} H_1 + C_{yV} \Omega_{S1}].$$

En « injectant » ce résultat dans (1)

et (2), on a : $\Omega_{S1} = \frac{H_2}{R_2} \epsilon_2 - \frac{H_2 C_{yV}}{R_3} \Omega_{S1}$, soit l'équation reliant les deux fonctions C_{S1} et Ω_{S1} :

$$\Omega_{S1} = -\frac{H_2}{R_2} \left(\frac{R_2}{R_2 + H_1} [C_{S1} H_1 + C_{yV} \Omega_{S1}] \right) - \frac{H_2 C_{yV}}{R_3} \Omega_{S1}.$$

En factorisant, on obtient :

$$\Omega_{S1} \left[1 + \frac{H_2 C_{yV}}{R_3} + \frac{H_2 C_{yV}}{R_2 + H_1} \right] = -\frac{H_2 H_1}{R_2 + H_1} C_{S1}.$$

On en déduit le rapport souhaité :

$$\boxed{\frac{\Omega_{S1}}{C_{S1}} = -\frac{H_2 H_1 R_3}{R_3 (R_2 + H_1) + H_2 C_{yV} (R_3 + R_2 + H_1)}} \text{ expression identique à la 1^{ère} méthode.}$$

QUESTION 28

Mise sous forme canonique de la fonction sans retard $G(p) = \frac{\theta_s}{\theta_c} = \frac{3,24}{p^2 + 3,24p + 1} = \frac{1}{1 + p + \frac{p^2}{1,8^2}}$.

On identifie donc un second ordre de gain unitaire, de pulsation propre $\omega_0 = 1,8 \text{ rad.s}^{-1}$, de facteur d'amortissement tel que $\frac{2\xi}{\omega_0} = 1$, soit $\xi = 0,9$

QUESTION 29

Gain statique unitaire, DONC $\varepsilon_s = 0$

La formulation de la question semble inviter les candidats à redémontrer ce résultat de cours.

Avec un retard considéré nul, on a un système à retour unitaire pour lequel : $H_{BF} = \frac{H_{BO}}{1 + H_{BO}} = G(p)$, d'où,

en inversant la relation :
$$H_{BO} = \frac{H_{BF}}{1 - H_{BF}} = \frac{G}{1 - G} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + p + \frac{p^2}{1,8^2}}} = \frac{1}{p + \frac{p^2}{1,8^2}}$$

Soit : $H_{BO} = \frac{1}{p \left(1 + \frac{p}{3,24} \right)}$

Un intégrateur en boucle ouverte donne bien une erreur statique nulle.

QUESTION 30

Retard de 0,2 s : $e^{-0,2p}$. Donc : $G_R(p) = \frac{H_{BO} e^{-0,2p}}{1 + H_{BO} e^{-0,2p}}$

QUESTION 31

On a la présence d'un intégrateur en Boucle Ouverte, on doit donc trouver une erreur de traînage finie non nulle.

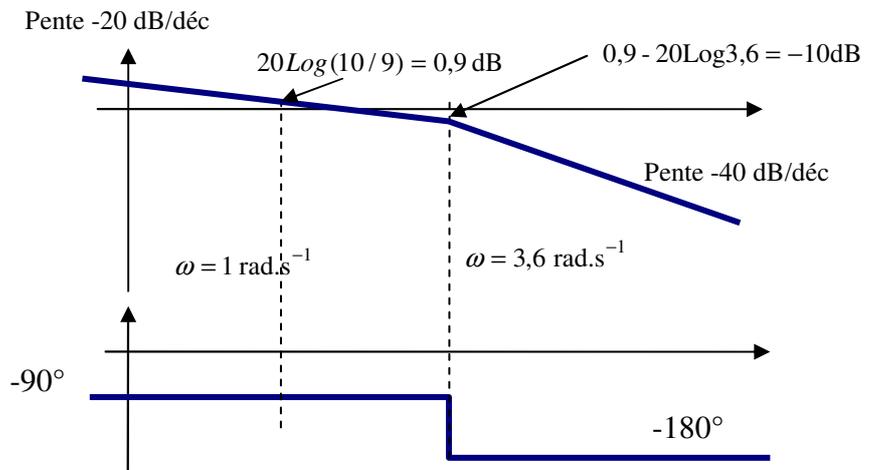
$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{0,1}{p^2} \left[1 - \frac{H_{BO}}{1 + H_{BO}} \right]_{H_{BF} \text{ sans retard}}$$
, soit en explicitant les la fonction de transfert en boucle

ouverte :
$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{0,1}{p} \frac{1}{1 + H_{BO}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{0,1}{p} \frac{p(p+3,6)}{p(p+3,6)+4} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{0,1(p+3,6)}{p(p+3,6)+4} \cdot \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $\varepsilon_t = \frac{0,36}{4} = 0,09 \text{ rad} \approx 5,15^\circ$$$

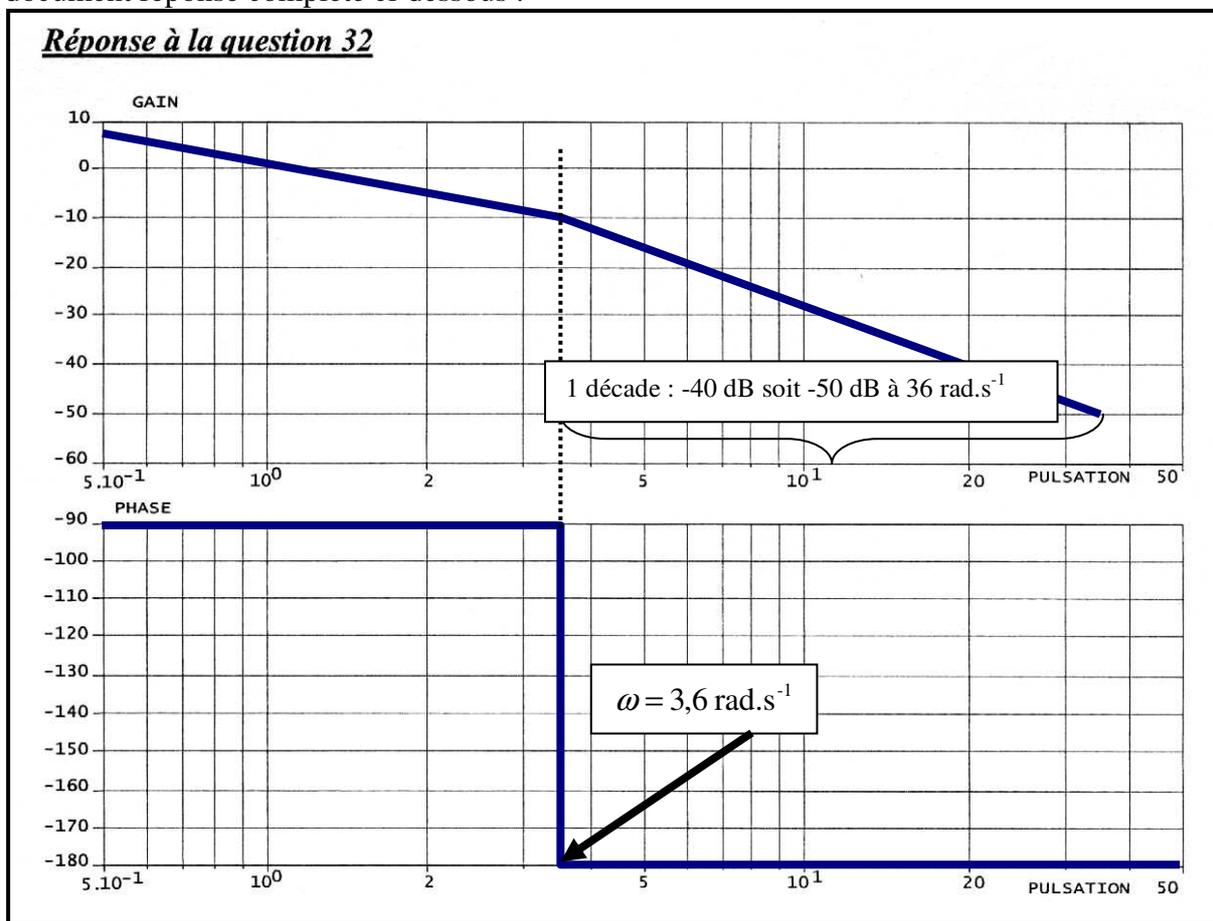
QUESTION 32

$$H_{BO}(p) = \frac{4}{p(p+3,6)} = \frac{10/9}{p(1+p/3,6)}$$

C'est une fonction de transfert correspondant à un premier ordre (gain statique = 10/9, constante de temps = 1/3,6 s) intégré. L'allure des diagrammes asymptotiques de Bode est donc la suivante :



Soit le document réponse complété ci-dessous :

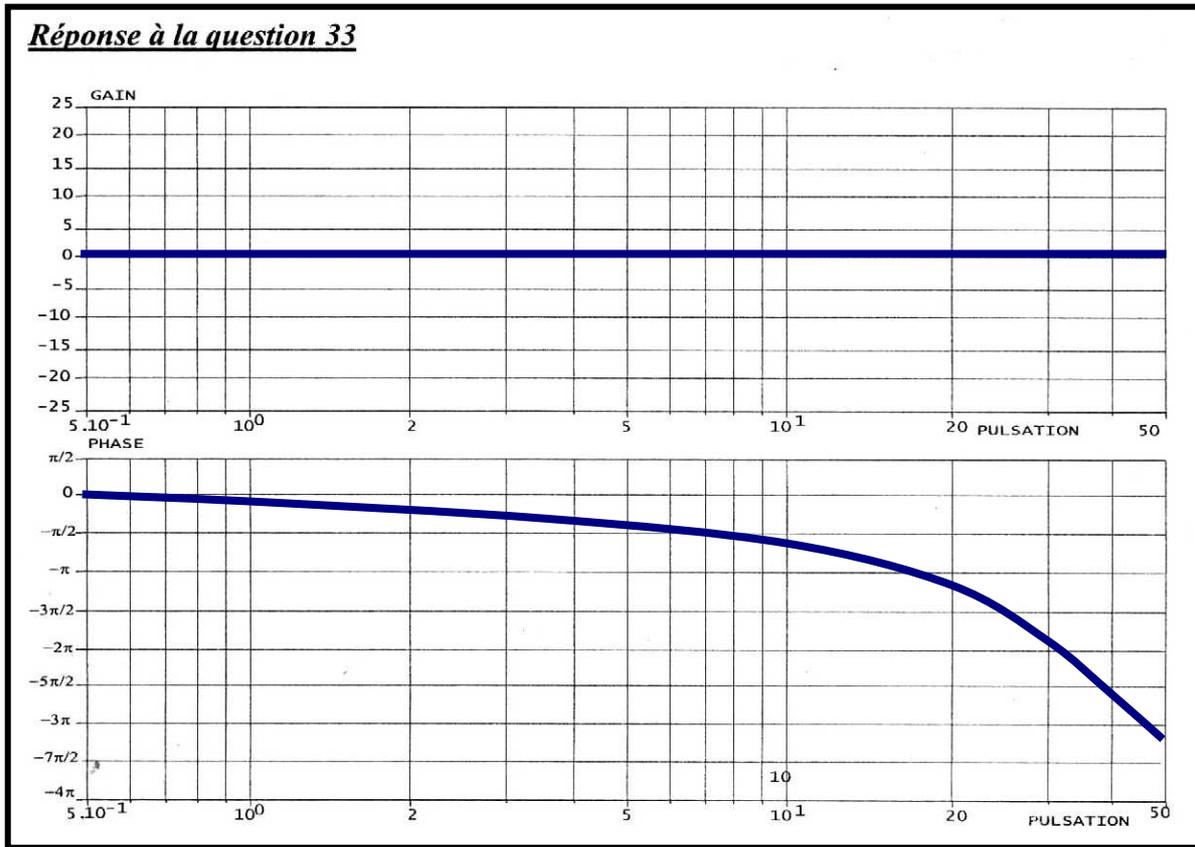


QUESTION 33

$e^{-0,2p} \rightarrow e^{-j0,2\omega}$ soit un module de 1 c'est-à-dire 0dB et un argument de $\varphi(\omega) - 0,2\omega$, ce qui permet de dresser le tableau ci-dessous :

ω	0,5	1	10	20	30	40	50
$\varphi(\omega)$	-5,7°	-11,5°	-114,6°	-229,2°	-343,8°	-458,4°	-573°

D'où le document réponse complété :



QUESTION 34

Le correcteur PI a pour diagrammes de Bode asymptotiques, l'allure ci-contre :

$$C(p) = K_C \frac{1+T_C p}{T_C p} = \frac{K_C}{T_C p} [1+T_C p]$$

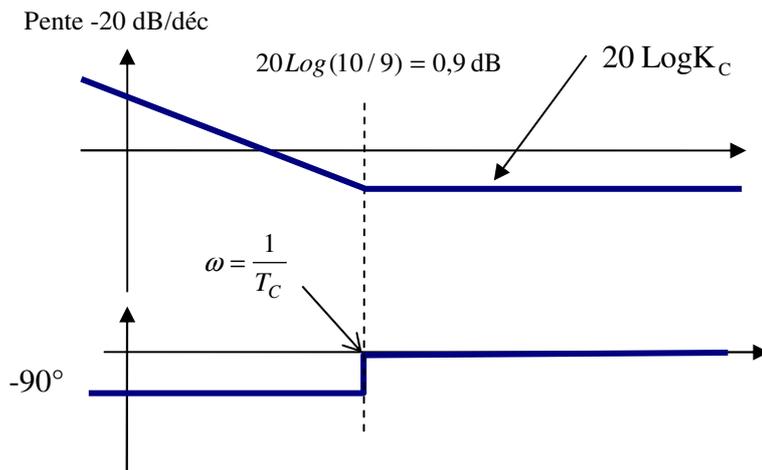
- Donc en choisissant une constante de temps T_C assez grande, la pulsation $\frac{1}{T_C}$ sera

suffisamment petite pour

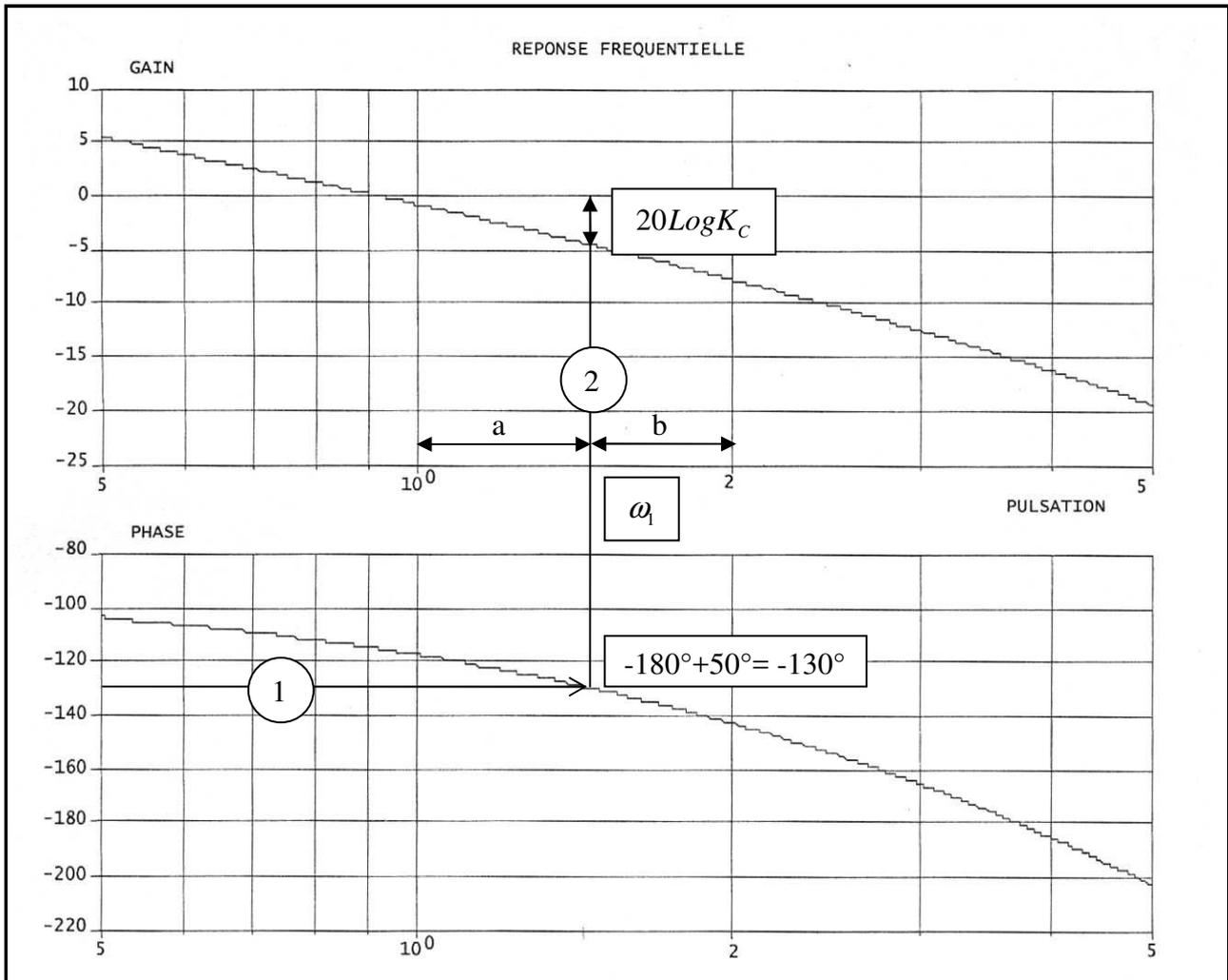
que la marge de phase du système corrigé soit celle de la correction proportionnelle K_C

$\left(\omega_{C0 \text{ non corrigée}} \gg \frac{1}{T_C} \right)$. Dans ce cas, on cherche à déterminer le gain K_C qui permet d'avoir une marge de phase de 50°.

On procède donc au relevé ci-dessous :



On relève par une règle de trois $20\text{Log}K_c = 4,3\text{dB}$, soit $K_c = 1,64$



En relevant les distance a et b, on en déduit ω_1 par la relation $\text{Log}\omega_1 = \text{Log}1 + \frac{a}{a+b} [\text{Log}2 - \text{Log}1]$, soit

$$\text{Log}\omega_1 = \frac{a \text{Log}2}{a+b}, \text{ d'où : } \omega_1 = 1,46 \text{ rad.s}^{-1}$$

Le correcteur serait de type $C(p) = K_c = 1,64$, on aurait donc une marge de phase de 50° .

- On cherche désormais à « dimensionner » T_c , de façon à ce que avec le correcteur

$$C(p) = K_c \frac{1+T_c p}{T_c p} = \frac{K_c}{T_c p} [1+T_c p], \text{ on « conserve » } 45^\circ. \text{ Ce qui signifie que l'on doit vérifier:}$$

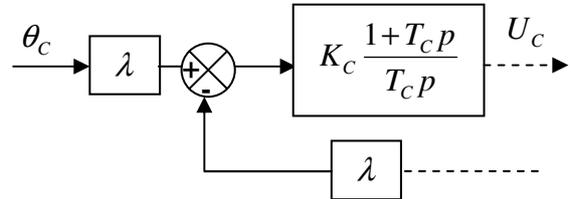
$$\text{Arg} \left[\frac{1+jT_c\omega_1}{jT_c\omega_1} \right] = -5^\circ \text{ et } \left\| \frac{1+jT_c\omega_1}{jT_c\omega_1} \right\|_{dB} \text{ négligeable :}$$

$$\text{Arg} \left[\frac{1+jT_c\omega_1}{jT_c\omega_1} \right] = -90^\circ + \arctan(T_c\omega_1), \text{ d'où : } \arctan(T_c\omega_1) = 85^\circ, \text{ soit } T_c = \frac{\tan 85^\circ}{\omega_1} = 7,8 \text{ s.}$$

$$\text{On vérifie bien : } \left\| \frac{1+jT_c\omega_1}{jT_c\omega_1} \right\|_{dB} = 20\text{Log} \left[\frac{\sqrt{1+(T_c\omega_1)^2}}{T_c\omega_1} \right] \approx 0,03 \text{ dB}$$

QUESTION 35

- On a 2 intégrateurs en Boucle Ouverte, l'erreur de traînage sera donc nulle : $\boxed{\varepsilon_t = 0}$
- En observant le schéma bloc complet page 15 de l'énoncé, on observe que le seul intégrateur de la boucle ouverte non corrigée est placé **après** la perturbation $C_{\text{plate-forme}}$ et ne « gommerait » donc pas ses effets, ce que fera en revanche l'intégrateur du correcteur PI, placé **avant la perturbation**.



-FIN-

ANNEXE :

Diagrammes de Bode et de Black de la correction effectuée Q34 :

On trouve une marge de phase réelle (sans négliger le gain) de 42°

