

CORRECTION DS3

Téléchirurgie robotisée au contact d'organes mobiles

II. Modélisation du manipulateur maître

II.2.1 Mesure de l'écart entre les performances géométriques souhaitées et simulées

Q1. Fermeture géométrique

En s'appuyant sur la figure 5, la fermeture géométrique donne : $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$.

D'où, en tenant compte du paramétrage du sujet : $L_0 \cdot \vec{x}_0 + L_1 \cdot \vec{x}_1 - L_2 \cdot \vec{x}_3 - L_2 \cdot \vec{x}_2 = \vec{0}$

Or on a pour $i=1,2,3$: $\vec{x}_i = \cos(\theta_i) \cdot \vec{x}_0 + \sin(\theta_i) \cdot \vec{y}_0$

D'où les relations en projection dans le plan $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$:

$$\text{sur } \vec{x}_0 : L_0 + L_1 \cdot \cos(\theta_1) - L_2 \cdot \cos(\theta_3) - L_2 \cdot \cos(\theta_2) = 0 \quad (1.1)$$

$$\text{sur } \vec{y}_0 : 0 + L_1 \cdot \sin(\theta_1) - L_2 \cdot \sin(\theta_3) - L_2 \cdot \sin(\theta_2) = 0 \quad (1.2)$$

Pour obtenir la relation demandée, il faut isoler θ_2 puis le faire « disparaître » :

$$(1.1) : L_0 + L_1 \cdot \cos(\theta_1) - L_2 \cdot \cos(\theta_3) = L_2 \cdot \cos(\theta_2)$$

$$(1.2) : 0 + L_1 \cdot \sin(\theta_1) - L_2 \cdot \sin(\theta_3) = L_2 \cdot \sin(\theta_2)$$

Ainsi la somme des carrés des relations (1.1) et (1.2) donne :

$$L_2^2 \cdot (\cos(\theta_2)^2 + \sin(\theta_2)^2) = (L_0 + L_1 \cdot \cos(\theta_1) - L_2 \cdot \cos(\theta_3))^2 + (L_1 \cdot \sin(\theta_1) - L_2 \cdot \sin(\theta_3))^2$$

D'où finalement : $L_2 = \sqrt{(L_0 + L_1 \cdot \cos(\theta_1) - L_2 \cdot \cos(\theta_3))^2 + (L_1 \cdot \sin(\theta_1) - L_2 \cdot \sin(\theta_3))^2}$ car $L_2 > 0$.

Q2. Position du point E

$$\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CE} \quad \text{avec} \quad \vec{CE} = 2 \cdot \vec{CD} = -2 \cdot L_2 \cdot \vec{x}_3$$

$$\text{D'où } \vec{AE} = L_0 \cdot \vec{x}_0 + L_1 \cdot \vec{x}_1 - 2 \cdot L_2 \cdot \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} L_0 + L_1 \cdot \cos(\theta_1) - 2 \cdot L_2 \cdot \cos(\theta_3) \\ L_1 \cdot \sin(\theta_1) - 2 \cdot L_2 \cdot \sin(\theta_3) \\ 0 \end{pmatrix}_{(B_0)}$$

Q3. Vérification des exigences (id 1.2.1.1) et (id 1.2.1.2) sur l'intervalle [-60 mm, 40 mm].

Sur l'intervalle considéré :

- Sur la figure 6.(a) on relève que XE varie de 100 mm, ce qui est supérieur à 50 mm la valeur exigée pour l'amplitude de déplacement (id 1.2.1.1) ;
- Sur la figure 6.(b) on relève que l'amplitude en Y est $Y_E \max - Y_E \min = -100,00 \text{ mm} + 100,25 \text{ mm} = 0,25 \text{ mm}$ ce qui est inférieur à 0,5 mm la valeur maximale admissible par l'exigence de mouvement rectiligne (id 1.2.1.2) ;
- Sur la figure 6.(b) on relève le taux de variation $-2\% < \frac{dY_E}{dX_E} \leq 2\%$ ce qui vérifie

l'exigence de mouvement rectiligne (id 1.2.1.2).

Ainsi le déplacement du point E est compatibles avec les exigences (id 1.2.1.1) et (id 1.2.1.2) sur l'intervalle [-60 mm, 40 mm].

Q4. Vérification de l'exigence (id 1.2.1.3) sur l'intervalle [-60 mm, 40 mm].

L'exigence considérée spécifie que la relation entre des déplacements doit être linéaire à 99%.

Si la grandeur associée au déplacement du bouton de commande est clairement identifiable (c'est XE), celle associée au capteur de position est plus floue. En supposant que le capteur de position soit un capteur angulaire intercalé entre le bâti (0) et la barre (1), il s'agit alors de θ_1 . Ce choix est conforté par la figure 8 donnant les évolutions de XE en fonction de θ_1 .

Pour vérifier l'exigence sur l'intervalle [-60 mm, 40 mm], on propose d'exploiter les valeurs visibles sur le zoom donné figure 8(b) pour tracer une courbe avec un tableur. Le coefficient de corrélation de la régression linéaire devra être supérieur à 0,99 pour vérifier l'exigence.

II.2.2 Mesure de l'écart entre les performances statiques souhaitées et simulées

Q5. Equations permettant d'exprimer le couple moteur en fonction de l'action exercée par l'opérateur.

5.1 - TMS à (1) en B sur $\underline{z_0}$:

$$\underbrace{\overrightarrow{M_B} \left(\begin{matrix} L_{01} \\ 0 \rightarrow 1 \end{matrix} \right)}_{=0 \text{ car pivot parfaite}} \cdot \overrightarrow{z_0} + M_B (3 \rightarrow 1) \cdot \overrightarrow{z_0} + \underbrace{M_B \left(\begin{matrix} \text{Moteur} \\ 0 \rightarrow 1 \end{matrix} \right)}_{Cm} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$$

Il reste à déterminer $\overrightarrow{M_B}(3 \rightarrow 1) \cdot \overrightarrow{z_0}$, avec $\{T(3 \rightarrow 1)\}_C = \begin{Bmatrix} X_{31} & L_{31} \\ Y_{31} & M_{31} \\ Z_{31} & 0 \end{Bmatrix}_{(B_0)}$.

$$\overrightarrow{M_B}(3 \rightarrow 1) \cdot \overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{M_C}(3 \rightarrow 1) \cdot \overrightarrow{z_0} + (\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{R}(3 \rightarrow 1)) \cdot \overrightarrow{z_0}$$

$$\overrightarrow{M_B}(3 \rightarrow 1) \cdot \overrightarrow{z_0} = 0 + (L_1 \cdot \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{R}(3 \rightarrow 1)) \cdot \overrightarrow{z_0}$$

Or l'énoncé nous impose l'expression de $\overrightarrow{R}(3 \rightarrow 1)$ dans la base (B0).

On reprend alors $\overrightarrow{x_1} = \cos(\theta_1) \cdot \overrightarrow{x_0} + \sin(\theta_1) \cdot \overrightarrow{y_0}$, ce qui donne :

$$\overrightarrow{M_B}(3 \rightarrow 1) \cdot \overrightarrow{z_0} = 0 + \left(L_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_{31} \\ Y_{31} \\ Z_{31} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = L_1 \cdot (\cos \theta_1 \cdot Y_{31} - \sin \theta_1 \cdot X_{31})$$

D'où la relation (5.1) : $\boxed{L_1 \cdot (\cos \theta_1 \cdot Y_{31} - \sin \theta_1 \cdot X_{31}) + Cm = 0}$.

5.2 - TMS à (2) en A sur $\underline{z_0}$:

$$\underbrace{\overrightarrow{M_A} \left(\begin{matrix} L \\ 0 \rightarrow 2 \end{matrix} \right)}_{=0 \text{ car pivot parfaite}} \cdot \overrightarrow{z_0} + \overrightarrow{M_A}(3 \rightarrow 2) \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$$

Il reste à déterminer $\overrightarrow{M_A}(3 \rightarrow 2) \cdot \overrightarrow{z_0}$, avec $\{T(3 \rightarrow 2)\}_D = \begin{Bmatrix} X_{32} & L_{32} \\ Y_{32} & M_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{(B_0)}$.

De même que précédemment on obtient : $\overrightarrow{M_A}(3 \rightarrow 2) \cdot \overrightarrow{z_0} = L_2 \cdot (\cos \theta_2 \cdot Y_{32} - \sin \theta_2 \cdot X_{32})$,

Ce qui donne la relation (5.2) : $\boxed{L_2 \cdot (\cos \theta_2 \cdot Y_{32} - \sin \theta_2 \cdot X_{32}) = 0} \Leftrightarrow \boxed{\cos \theta_2 \cdot Y_{32} - \sin \theta_2 \cdot X_{32} = 0}$.

Variante : l'écriture du TMS donne $\vec{R}(3 \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_2 = 0$ d'où $\vec{R}(3 \rightarrow 2) // \vec{x}_2$ avec l'hypothèse du problème plan qui aurait été judicieuse.

5.3 - TMS à (3) en D sur \vec{z}_0 :

$$\vec{M}_D(1 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 + \underbrace{\vec{M}_D(2 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0}_{=0 \text{ car pivot parfaite}} + \vec{M}_D(Op. \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = 0$$

$$\triangleright \vec{M}_D(1 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}_C(1 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 + (\overline{DC} \wedge \vec{R}(1 \rightarrow 3)) \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{M}_B(1 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = 0 + (L_2 \cdot \vec{x}_3 \wedge \vec{R}(1 \rightarrow 3)) \cdot \vec{z}_0$$

$$\text{Or } \vec{x}_3 = \cos(\theta_3) \cdot \vec{x}_0 + \sin(\theta_3) \cdot \vec{y}_0$$

$$\vec{M}_B(1 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = 0 + \left(L_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -X_{31} \\ -Y_{31} \\ -Z_{31} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -L_2 \cdot (\cos \theta_3 \cdot Y_{31} - \sin \theta_3 \cdot X_{31})$$

$$\triangleright \vec{M}_D(Op. \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = \left(\underbrace{\vec{M}_E(Op. \rightarrow 3)}_0 + (\overline{DE} \wedge \vec{R}(Op. \rightarrow 3)) \right) \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{M}_D(Op. \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = (-L_2 \cdot \vec{x}_3 \wedge F \cdot \vec{x}_0) \cdot \vec{z}_0 = (-L_2 \cdot F) (\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_0) \cdot \vec{z}_0 = (-L_2 \cdot F) (\vec{x}_0 \wedge \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_3$$

$$\vec{M}_D(Op. \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = (+L_2 \cdot F) (\vec{y}_0 \cdot \vec{x}_3) = L_2 \cdot F \cdot \sin(\theta_3)$$

$$\text{D'où la relation (5.3) : } \boxed{-L_2 \cdot (\cos \theta_3 \cdot Y_{31} - \sin \theta_3 \cdot X_{31}) + L_2 \cdot F \cdot \sin \theta_3 = 0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{F \cdot \sin \theta_3 + \sin \theta_3 \cdot X_{31} - \cos \theta_3 \cdot Y_{31} = 0}$$

5.4 - TRS à (3) sur \vec{y}_2 :

$$\vec{R}(1 \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_2 + \vec{R}(2 \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_2 + \vec{R}(Op. \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_2 = 0$$

$$\text{Or on a } \vec{R}(2 \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_2 = 0 \text{ d'après (5.2)}$$

$$\triangleright \vec{R}(1 \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -X_{31} \\ -Y_{31} \\ -Z_{31} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \\ 0 \end{pmatrix} = X_{31} \cdot \sin \theta_2 - Y_{31} \cdot \cos \theta_2$$

$$\triangleright \vec{R}(Op. \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_2 = F \cdot \vec{x}_0 \cdot \vec{y}_2 = F \cdot (\vec{x}_0 \cdot \vec{y}_2) = -F \cdot \sin \theta_2$$

$$\text{D'où la relation (5.4) : } \boxed{-F \cdot \sin \theta_2 + \sin \theta_2 \cdot X_{31} - \cos \theta_2 \cdot Y_{31} = 0}$$

Remarque : les relations (5.3) et (5.4) sont identiques pour θ_3 et θ_2 respectivement. Interprétation ?

Q6. Validité de l'exigence « Linéarité couple/effort » (id 1.3.2.2)

L'exigence « Linéarité couple/effort » (id 1.3.2.2) impose d'avoir le ratio couple/effort constant à +/-1%.

Le zoom de la figure 9(b) donne $\left(\frac{C}{F}\right)_{\max} = 33,375 \text{ mm}$

Cette valeur max doit correspondre à la valeur moyenne plus 1%,

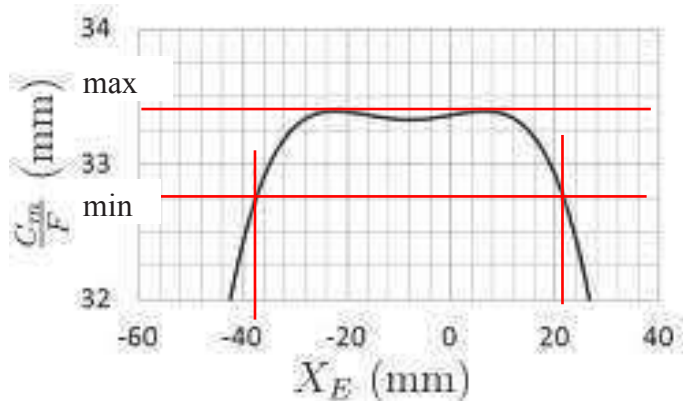
$$\text{d'où } \left(\frac{C}{F}\right)_{\max} = 1,01 \times \left(\frac{C}{F}\right)_{\text{moy}} \Leftrightarrow 1\% = \left(\frac{C}{F}\right)_{\max} \times \frac{1}{101} = \frac{33,375 \text{ mm}}{101} = 0,330 \text{ mm} .$$

Par suite on doit avoir $\left(\frac{C}{F}\right)_{\min} = \left(\frac{C}{F}\right)_{\max} - 2\% = 33,375 - 0,66 = 32,715 \text{ mm} .$

Cette condition est vérifiée pour XE dans l'intervalle $[-38 \text{ mm}, +22 \text{ mm}]$ (voir construction sur la figure 9.b ci-contre).

Alors la course est de 60 mm et supérieure aux 50 mm exigés par l'exigence amplitude de déplacement (id 1.2.1.1).

De plus, cet intervalle étant compris dans l'intervalle $[-60 \text{ mm}, +40 \text{ mm}]$, les exigences déjà vérifiées sur cet intervalle restent valables.



II.3 Modélisation du codeur optique

Q7. Satisfaction de l'exigence « Résolution mesure consigne » (id : 1.2.2.1)

Ce codeur délivre 4000 impulsions par tour (2 impulsions par fente et par capteur). Il a donc une résolution de $360^\circ/4000 = 0,09^\circ/\text{pt}$ de mesure.

La figure 8(b) nous donne le coefficient de proportionnalité :

$$\frac{\Delta X_E (\text{mm})}{\Delta \theta_1 (^\circ)} = \frac{38 - (-55)}{260 - 100} = \frac{93}{160} = 0,581 \text{ mm}/^\circ$$

Pour une rotation de $0,09^\circ$ du moteur correspond un déplacement du point E de :

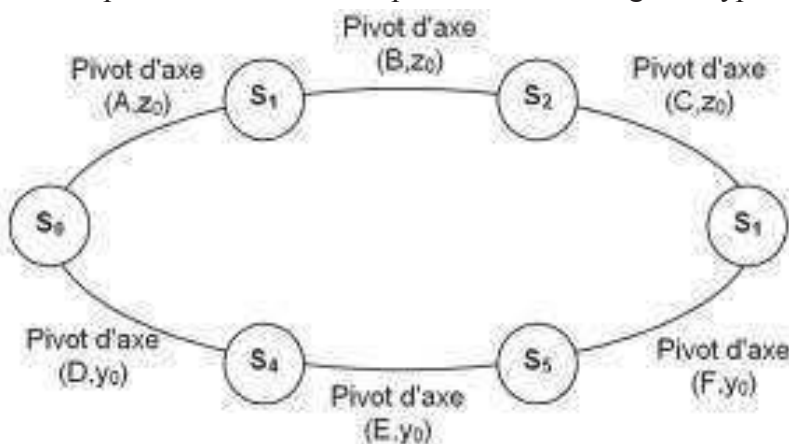
$$\Delta X_E (\text{mm}) = 0,581 \text{ mm}/^\circ \times 0,09^\circ = 0,052 \text{ mm}$$

Cette valeur est inférieure à 0,1 mm imposée par l'exigence (id : 1.2.2.1) qui est donc satisfaite.

III. Modélisation du manipulateur esclave

III.2 Modélisation de l'interface esclave

Q8. Graphe des liaisons du dispositif esclave. Degré d'hyperstatisme du mécanisme.



Formule de mobilité : $m-h = I_c - E_c$

$I_c = 6$ (6 pivots)

$E_c = 6 \times 1$ cycle = 6

Mobilité globale : $m = 1$

D'où $h = 1$

Q9. Modification simple pour rendre le mécanisme isostatique

Pour obtenir $h=0$ à partir de $h=1$, il faut ajouter un degré de liberté sans augmenter la mobilité.

La solution la plus naturelle est de remplacer un pivot par un pivot glissant. Seulement ce n'est pas la bonne car cela rajoute une mobilité.

La subtilité de ce mécanisme n'est pas évidente à voir avec un schéma 2D. Un schéma 3D aurait été préférable.

Ceci fait on s'aperçoit qu'il faut alors modifier une liaison en ajoutant une rotation ne modifiant pas la mobilité globale. Par exemple on peut ajouter à L_{12} pivot d'axe (B, \vec{z}_0) la rotation d'axe (B, \vec{x}_0) , ce qui la transforme en une sphérique à doigt.

Q10. Montrer que le mouvement de S3 / S0 ne peut être qu'une translation de direction \vec{x}_0 .

En considérant la chaîne de solides (0-1-2-3), on a :

$$\vec{\Omega}(3/0) = \omega_{30} \vec{z}_0, \text{ et par suite } \vec{V}(C,3/0) \in \text{plan}(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$$

En considérant la chaîne de solides (0-4-5-3), on a :

$$\vec{\Omega}(3/0) = \omega_{30} \vec{y}_0, \text{ et par suite } \vec{V}(C,3/0) \in \text{plan}(A, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$$

Pour le mécanisme dans son ensemble, les mobilités doivent être compatibles :

$$\vec{\Omega}(3/0) = \omega_{30} \vec{z}_0 = \omega_{30} \vec{y}_0 \Rightarrow \vec{\Omega}(3/0) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(C,3/0) \in \text{plan}(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0) \text{ et } \vec{V}(C,3/0) \in \text{plan}(A, \vec{x}_0, \vec{z}_0) \Rightarrow \vec{V}(C,3/0) // \vec{x}_0$$

$$\text{Finalement } \{V(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(3/0) = \vec{0} \\ \vec{V}(C,3/0) = v(C,3/0) \vec{x}_0 \end{array} \right\} \text{ donc } M(3/0) \text{ est une translation selon } \vec{x}_0.$$

Q11. Equation de mouvement par le TEC

On applique le théorème de l'énergie cinétique au dispositif esclave :

$$\frac{d}{dt} Ec(\Sigma / Rg) = P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / Rg) + P \text{int}(\Sigma)$$

Les parties mobiles sont :

$$\text{L'organe terminal 3 en translation} \Rightarrow Ec(3 / Rg) = \frac{M_3}{2} \dot{x}_s^2$$

$$\text{La barre AB en rotation avec le rotor} \Rightarrow Ec(1 / Rg) = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}_1^2$$

Les puissances externes se réduisent à celle du moteur $\Rightarrow P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / Rg) = Cm \dot{\theta}_1$

Les puissances internes se réduisent aux frottements fluides $\Rightarrow P \text{int}(\Sigma) = -f \dot{\theta}_1^2$

$$\text{Par suite le TEC donne : } \boxed{M_3 \dot{x}_s \ddot{x}_s + I_1 \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_1 = Cm \dot{\theta}_1 - f \dot{\theta}_1^2}$$

Q12. Equation différentielle liant les paramètres.

$$\theta_1 \approx \alpha x_s \text{ donne } \dot{\theta}_1 \approx \alpha \dot{x}_s \text{ et } \ddot{\theta}_1 \approx \alpha \ddot{x}_s.$$

Par suite la relation issue du TEC s'écrit : $M_3 \dot{x}_s \ddot{x}_s + I_1 \alpha^2 \dot{x}_s \ddot{x}_s = Cm \alpha \dot{x}_s - f (\alpha \dot{x}_s)^2$

$$\text{Pour } \dot{x}_s \neq 0 \text{ cela donne } \boxed{(M_3 + I_1 \alpha^2) \ddot{x}_s + f \alpha^2 \dot{x}_s = Cm \alpha}$$

Q13. Fonction de transfert modélisant le comportement dynamique du manipulateur esclave

Dans les conditions de Heaviside, la transformée de Laplace de l'équation différentielle obtenue est : $\boxed{\left[(M_3 + I_1 \cdot \alpha^2) p^2 + f \cdot \alpha^2 \cdot p \right] X_s(p) = Cm(p) \cdot \alpha}$

D'où la fonction de transfert demandée : $H(p) = \frac{X_s(p)}{Cm(p)} = \frac{\alpha}{(M_3 + I_1 \cdot \alpha^2) p^2 + f \cdot \alpha^2 \cdot p}$

Ecrivons cette FT sous forme canonique :

$$H(p) = \frac{\alpha}{p \cdot \left((M_3 + I_1 \cdot \alpha^2) p + f \cdot \alpha^2 \right)} = \frac{\alpha}{p \cdot f \cdot \alpha^2 \cdot \left(\frac{(M_3 + I_1 \cdot \alpha^2)}{f \cdot \alpha^2} \cdot p + 1 \right)}$$

Finalement $\boxed{H(p) = \frac{\frac{1}{f \cdot \alpha}}{p \cdot \left(\frac{(M_3 + I_1 \cdot \alpha^2)}{f \cdot \alpha^2} \cdot p + 1 \right)}}$. AN : $\boxed{H(p) = \frac{20,8}{p \cdot (0,1 \cdot p + 1)}}$

IV. Réalisation de la commande de l'esclave

IV.1 Modélisation de l'environnement

Q14. Modèle de l'effort de pénétration d'une aiguille dans un tissu.

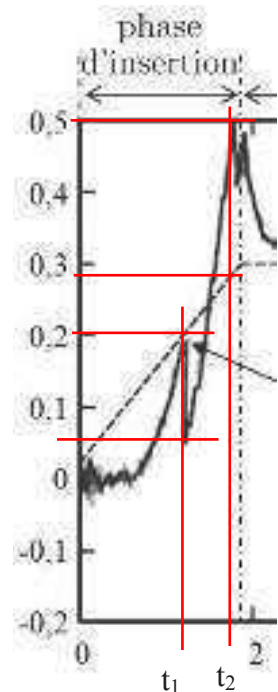
Il faut considérer la figure 15, et la fin de la phase d'insertion. Compte-tenu de ce qui est demandé (relation linéaire), on va retenir la phase entre les instants t_1 et t_2 sur l'extrait de la figure 15 ci-contre.

Durant cette phase, les grandeurs f_e et x_e ont toutes deux une évolution linéaire. De plus $x_e=0$ quand $f_e=0$.

Par suite on peut écrire : $f_e(t) = k_e \times x_e(t)$.

Évaluons k_e sur la phase considérée : $k_e = \frac{\Delta f_e(t)}{\Delta x_e(t)} = \frac{f_e(t_2) - f_e(t_1)}{x_e(t_2) - x_e(t_1)}$

AN : $k_e = \frac{0,5 - 0,05}{0,028 - 0,02} = \frac{0,45}{0,008} = 56 \text{ N/m}$.



Q15. Modélisation du déplacement par une fonction sinus à partir de la figure 16.

L'évolution de $x_e(t)$ est périodique et apparemment sans discontinuité de tangente. On peut donc la modéliser par une sinusoïde. On relève sa période $T = 4,25s$ environ.

Son amplitude est $\Delta x_e = 0 \text{ mm} - (-10) \text{ mm} = +10 \text{ mm}$

Sa valeur moyenne est non nulle et on relève $x_{e0} = -5 \text{ mm}$.

Enfin $x_e(0) \neq x_{e0}$ donc la fonction sinus possède une phase non nulle à l'origine.

D'où l'expression de la fonction $x_e(t) = x_{e0} + \frac{\Delta x_e}{2} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

En remplaçant par les valeurs numériques de déplacement, et $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ il vient :

$x_e(t) = -5 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(2\pi f \cdot t + \varphi) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot [-1 + \sin(2\pi f \cdot t + \varphi)]$. CQFD.

On identifie $A = 5 \text{ mm}$ et $f = \frac{1}{T} \approx 0,24 \text{ Hz}$.

NB : il y a une erreur d'énoncé pour la formulation de $x_e(t)$.

Finalement $f_e(t) = k_e \times x_e(t) = 0,28 \cdot \left[-1 + \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{4,25} + \varphi\right) \right]$.

Q16. Réglage de la valeur du produit RC du filtre passe-bas.

Le filtre passe-bas RC a pour constante de temps $\tau = RC$.

Sa pulsation propre est $\omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$, d'où la fréquence propre $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \cdot RC}$.

On impose $f_0 = \frac{f_{ech}}{2}$ d'où finalement $\frac{f_{ech}}{2} = \frac{1}{2\pi \cdot RC} \Leftrightarrow RC = \frac{1}{\pi \cdot f_{ech}}$. AN : $RC = \frac{1}{50 \cdot \pi} = 6,37 \text{ ms}$.

Q17. Nombre de bits N nécessaires pour avoir la précision demandée.

Le codage numérique d'une grandeur analogique génère une erreur potentielle majorée par la précision du codage, c'est-à-dire sa résolution : $erreur \leq \frac{\text{Amplitude de mesure}}{\text{Nombre de points de codage}}$.

Ainsi avec une amplitude $A=5V$ et un codage sur N bits on aura : $erreur \leq \frac{A}{2^N}$.

En imposant une erreur maximale de 0,005 V cela donne : $0,005 \geq \frac{5}{2^N} \Leftrightarrow 2^N \geq \frac{5}{0,005} = 1000$

D'où finalement $N \geq \frac{\ln(1000)}{\ln(2)} = 9,96$ soit $N = 10$ bits.

IV.2 Modélisation et étude des performances du système sans correction

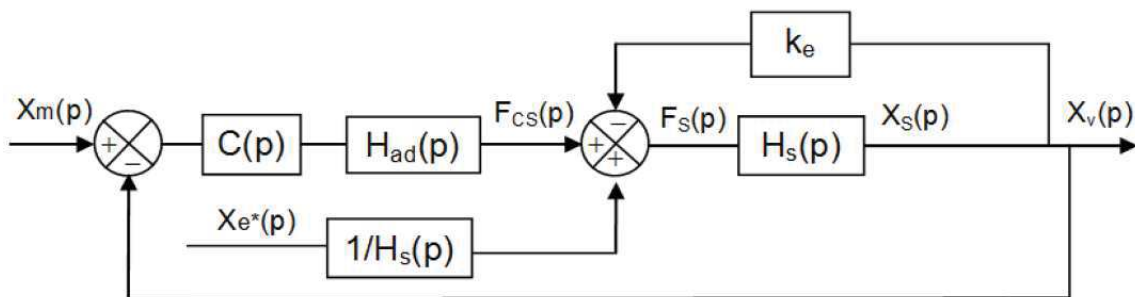
Q18. Simplification du schéma-bloc de la figure 19.

Il est possible d'utiliser une méthode algébrique s'appuyant sur les relations issues des schémas-bloc initial (figure 19) et final (figure 20).

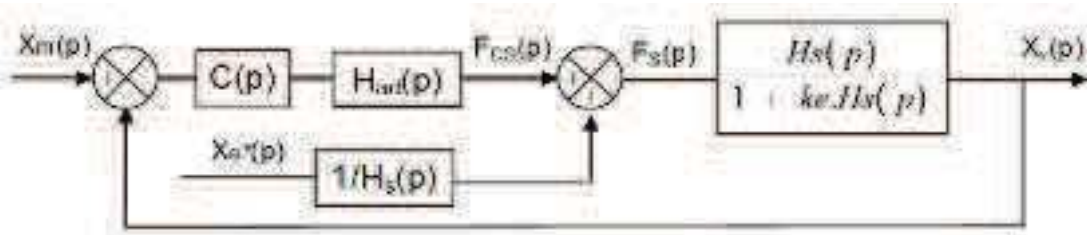
Nous présentons ici une méthode s'appuyant sur l'algèbre des schéma-bloc.

Les schémas ci-dessous sont les différentes étapes des modifications conduisant du schéma de la figure 19 à celui de la figure 20.

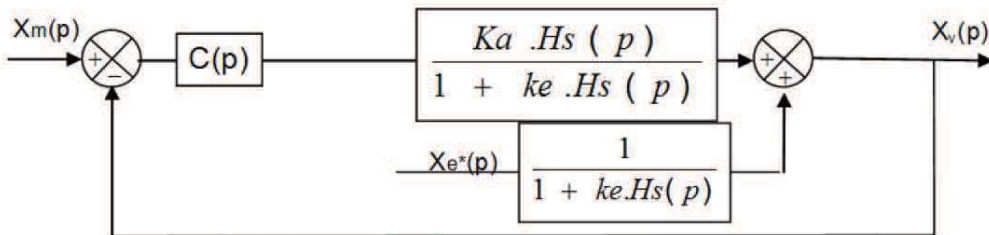
Tout d'abord on décale l'intervention de $X_e(p)$ en amont pour le sortir de la boucle interne.



La FTBF de la boucle interne est alors : $\frac{X_v(p)}{F_{cs}(p)} = \frac{H_s(p)}{1 + k_e \cdot H_s(p)}$, d'où le schéma-bloc suivant.



On décale ensuite l'intervention en aval de la FT calculée pour obtenir le schéma-bloc final identique à la forme demandée.



On identifie finalement : $H(p) = \frac{K_a H_s(p)}{1 + k_e H_s(p)}$ et $H_t(p) = \frac{1}{1 + k_e H_s(p)}$.

IV.3 Vérification des exigences sans correction : C(p) = 1

Q19. FTBF sans perturbation

$$F_{BF1}(p) = \frac{X_v(p)}{X_m(p)} = \frac{C(p).H(p)}{1 + C(p).H(p)} = \frac{1}{\frac{1}{C(p).H(p)} + 1} \text{ avec } C(p)=1 \text{ et } H(p) = \frac{1}{m_s.p^2 + b_s.p + k_e} ;$$

$$F_{BF1}(p) = \frac{1}{m_s.p^2 + b_s.p + k_e + 1} \text{ On reconnaît une FT du 2}^{\text{ème}} \text{ ordre.}$$

Ecrivons cette FT sous forme canonique :

$$F_{BF1}(p) = \frac{\frac{1}{1+k_e}}{\frac{m_s}{1+k_e}.p^2 + \frac{b_s}{1+k_e}.p + 1}$$

D'où ses paramètres caractéristiques : gain statique $K = \frac{1}{1+k_e} = 0,005 \text{ su}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{m_s}{1+k_e} \\ \frac{2z}{\omega_0} = \frac{b_s}{1+k_e} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \sqrt{\frac{1+k_e}{m_s}} = 36,4 \text{ rad / s} \\ z = \frac{\omega_0}{2} \frac{b_s}{1+k_e} = \frac{b_s}{2 \cdot \sqrt{m_s \cdot (1+k_e)}} = 0,13 \text{ su} \end{array} \right. \text{ . NB : « su » pour sans unité ;}$$

Q20. Vérification des exigences stabilité (amortissement), rapidité et précision.

- La FT a un coefficient d'amortissement $z=0,13 < 1$, donc la réponse indicielle présentera un dépassement transitoire. L'exigence de stabilité (amortissement) n'est donc pas vérifiée.
- L'exigence rapidité impose un temps de réponse à 5% max pour un échelon de 0,1 s. Pour $z=0,13$ l'abaque du temps de réponse réduit figure 21.a donne $tr_{5\%} \cdot \omega_0 > 20$.

Ainsi $tr_{5\%} > \frac{20}{\omega_0}$, or $\omega_0 = 36,4 \text{ rad/s}$ d'où $tr_{5\%} > 0,55 \text{ s}$.

L'exigence de rapidité n'est donc pas vérifiée.

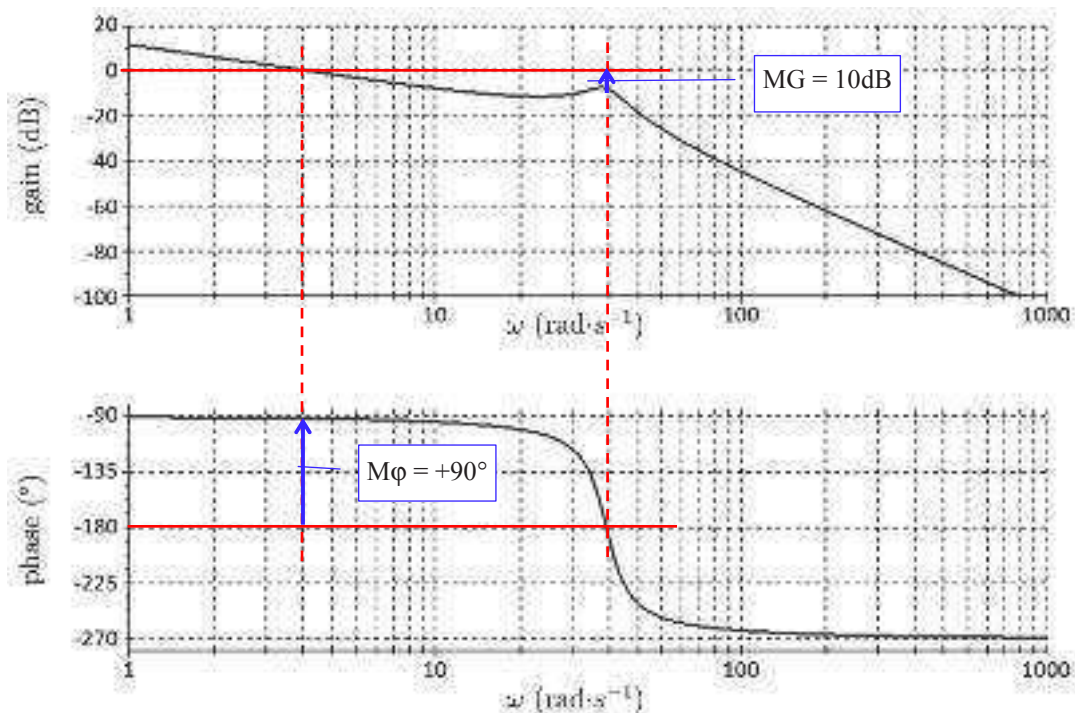
- L'exigence de précision impose une erreur statique max relative à un échelon de 1%. La FT ayant un gain statique K on aura en régime permanent (statique) : $\Delta s = K \cdot \Delta e$, d'où une erreur statique relative : $\frac{\Delta e - \Delta s}{\Delta e} = 1 - \frac{\Delta s}{\Delta e} = 1 - K$.

Avec $K=0,005$ on obtient une erreur de 0,995 bien supérieur à $1\%=0,01$. L'exigence de précision n'est donc pas vérifiée.

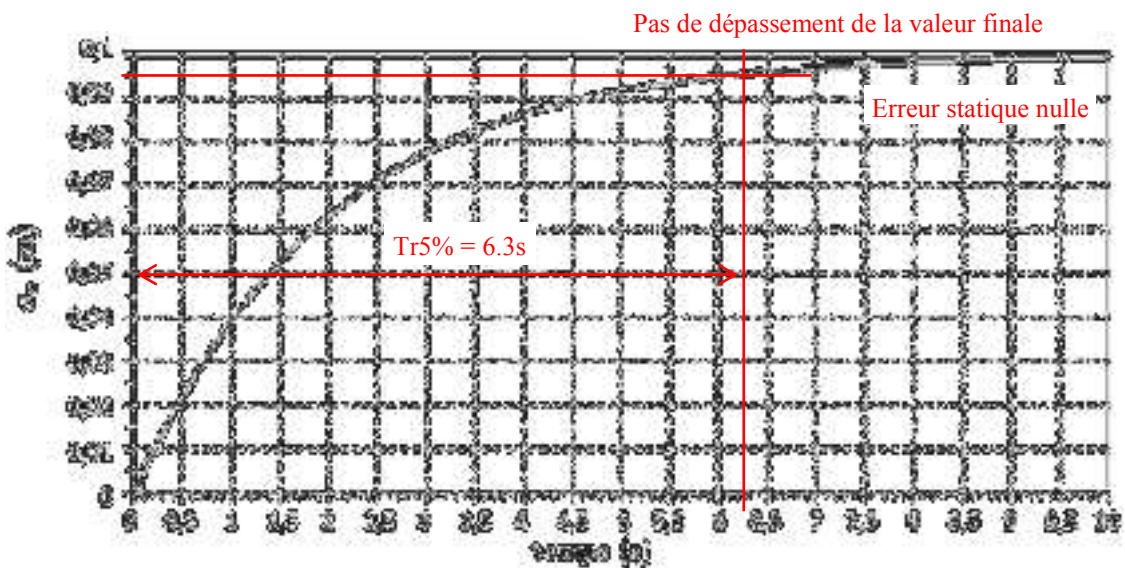
IV.4 Modélisation et étude des performances du système avec correction intégrale

Q21. Vérification des exigences « stabilité », « rapidité », « précision » (erreur statique).

DR Q21a : Diagramme de Bode de la FTBO ouverte pour $K_i = 100$.



DR Q21b : Réponse temporelle de la FTBF pour un échelon de 10 cm et $K_i = 100$.



Les résultats issus de relevés sur les DR21a et 21b sont portés dans le tableau DR1 reproduit ci-contre. Ils permettent de vérifier les exigences demandées. Nous proposons un DR1 enrichi qui aurait permis d'apporter une réponse plus synthétique.

Temps de réponse à 5%	6.3s
Amplitude du 1 ^{er} dépassement	0
Erreur statique	0
Marge de phase	+90°
Marge de Gain	+10dB

Exigence	Critère	Niveau relevé	Niveau demandé	Satisfaction
Stabilité	Marge de phase	+90°	≥ 45°	OUI
Stabilité	Marge de Gain	+10dB	≥ 7,5dB	OUI
Stabilité	Amplitude du 1 ^{er} dépassement	0	Aucun	OUI
Précision	Erreur statique	0	≤ 1%	OUI
Rapidité	Temps de réponse à 5%	6,3s	≤ 0,1s	NON

On peut conclure que les exigences de stabilité et précision sont satisfaites, mais qu'il faut améliorer la rapidité du système. C'est justement l'objet des questions suivantes.

Q22. Valeur maximale de Ki qui permet de respecter les marges de stabilité.

Avec $K_i=100$ on a relevé $MG = +10dB$

On cherche $K_{i\max}$ tel que $MG = +7,5dB$

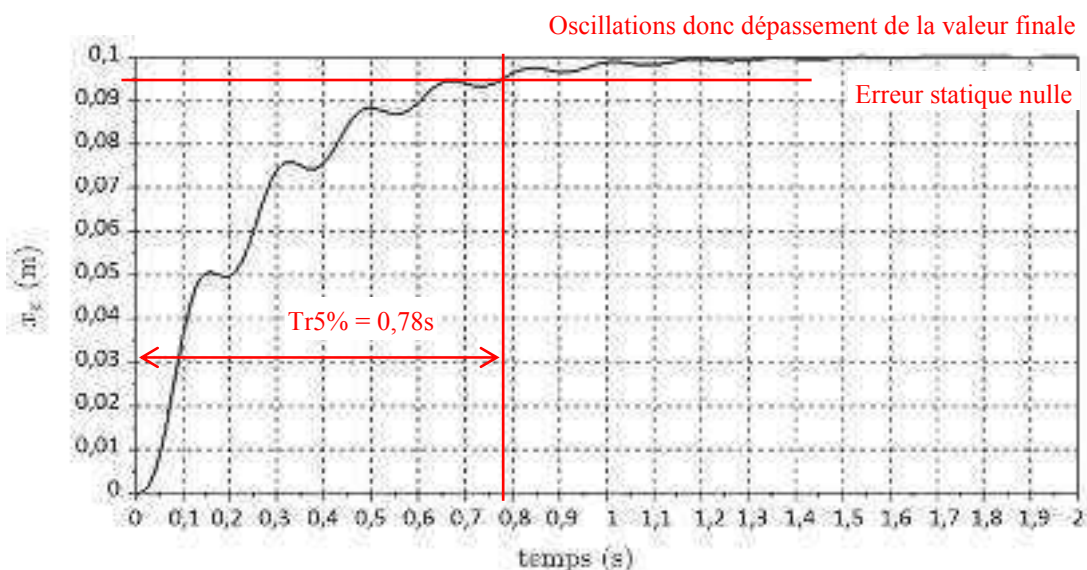
Passer de $K_i=100$ à $K_{i\max}$ doit donc remonter le gain de 2,5 dB.

Posons $K_i \max = a.K_i$, alors on aura $20\log(a)=2,5dB$ soit $a = 10^{\frac{2,5}{20}} = 1,33$.

Ainsi on obtient $K_i \max = 133$.

Q23. Capacité du correcteur à valider simultanément les exigences « stabilité » et « rapidité »

DR23 : Réponse temporelle de la FTBF pour un échelon de 10 cm avec le réglage $K_i \max$.



Les résultats issus de relevés sur le DR32 ci-dessus sont portés dans le tableau DR2 reproduit ci-contre.

Temps de réponse à 5%	0,78s
Amplitude du 1 ^{er} dépassement	0+
Erreur statique	0

Conclusion pour K_i max :

- $Tr_{5\%} = 0,78s > 0,1s$ donc la rapidité n'est pas satisfaite.
- la réponse temporelle devient oscillante, donc il y aura dépassement de la valeur finale ; la stabilité n'est pas satisfaisante.
- L'erreur statique est bien nulle.

Ce correcteur ne permet pas de vérifier simultanément la nécessaire stabilité et la rapidité demandée.

Q24. Validation de l'exigence « précision » pour le critère d'atténuation avec $K_{i\max}$.

Le gain $G(\omega) = |H(j\omega)|$ est le rapport des amplitudes des signaux sortie/entrée.

$$GdB(\omega) = 20 \cdot \text{Log}[G(\omega)]$$

Un gain de $0,7 = 70\%$ correspond à une atténuation du signal de sortie/entrée de 30% .

L'atténuation est donc minimale quand le gain est maximal.

Sur l'intervalle de pulsation considéré, le gain maximal est $GdB_{\max} = -30dB$.

Or on exige une atténuation minimale telle que $G(\omega) \leq \frac{1}{100}$ soit $GdB(\omega) \leq -20 \cdot \text{Log}[100] = -40dB$.

$GdB_{\max} = -30dB \geq -40dB$ donc le critère de l'atténuation n'est pas vérifié.

IV.5 Modélisation et étude des performances du système avec correction IMC

Q25. Valeur limite de T permettant de satisfaire l'exigence de « rapidité ».

On considère $A(p)$ la fonction de transfert relative à l'entrée (ou transmittance pour les puristes).

C'est un FT du 2^{ème} ordre dont le $tr_{5\%}$ est lié à la pulsation propre ω_0 et au coefficient d'amortissement z par l'abaque du temps de réponse réduit donné figure 21.a.

$$A(p) = \frac{1}{(1+T.p)^2} = \frac{1}{1+2.T.p+(T.p)^2}$$

On peut donc identifier :

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_0^2} = T^2 \\ \frac{2z}{\omega_0} = 2T \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{T} \\ z = \frac{\omega_0}{2} \cdot 2T = \frac{2T}{2T} = 1 \text{ su} \end{cases}}$$

Pour $z=1$ l'abaque du temps de réponse réduit figure 21.a donne $tr_{5\%} \cdot \omega_0 \approx 5$, c'est-à-dire $tr_{5\%} \approx 5.T$ Ainsi il faut diminuer T pour diminuer le $tr_{5\%}$.

Pour avoir $tr_{5\%} \leq 0,1s$ on doit avoir $5T \leq 0,1s$ soit $T \leq 0,02s$

Q26. Valeur limite de T permettant de satisfaire l'atténuation de la perturbation liée à l'exigence de « précision » sur l'intervalle $[1,25 \text{ rad/s} ; 12,5 \text{ rad/s}]$

Pour cela on dispose du DR3 qui donne le diagramme de Bode de $B(p)$ la transmittance relative à la perturbation pour $T=1s$. On donne $B(p) = \frac{T.p.(2+T.p)}{(1+T.p)^2}$.

On observe sur le DR3 deux zones :

Pour $\omega \ll \omega_0 = \frac{1}{T}$ soit $T.\omega \ll 1$, un gain avec une pente de +20dB par décade, et une phase qui tend vers $+90^\circ$, ce qui correspond à un dérivateur et est confirmé par l'équivalent :

$$B(p) = \frac{T.p.(2+T.p)}{(1+T.p)^2} \approx \frac{2.T.p}{1}$$

Pour $\omega \gg \omega_0 = \frac{1}{T}$ soit $T.\omega \gg 1$, un gain nul et une phase qui tend vers 0° , ce qui correspond à un

gain unitaire et est confirmé par l'équivalent : $B(p) = \frac{T.p.(2+T.p)}{(1+T.p)^2} \approx \frac{(T.p)^2}{(T.p)^2} = 1$.

Par suite il ne peut y avoir d'atténuation que pour les pulsations $\omega \ll \omega_0 = \frac{1}{T}$, c'est-à-dire que l'on considère la partie avec un gain de pente +20dB/décade.

On a déjà vu que l'atténuation est minimale quand le gain est maximal.

L'exigence spécifie une atténuation de 1/100, soit $GdB \leq -40dB$.

On doit donc avoir $GdB(12,5rad/s) \leq -40dB$.

Réponse approchée à partir de considérations graphiques sur le DR3 :

Il faut décaler la cassure en $1/T$ vers la droite jusqu'à obtenir $GdB(12,5rad/s) \leq -40dB$.

En approchant 12,5 rad/s à 10 rad/s on aurait $\omega_0 = \frac{1}{T} = 10\,000\,rad/s$ soit $T_{max} = 10^{-4}\,s = 0,1\,ms$.

Réponse à partir du calcul analytique

On doit avoir $|B(j.\omega_2)| \leq \frac{1}{100}$ avec $\omega_2 = 12,5\,rad/s$;

$$|B(j.\omega_2)| = \frac{|T.j.\omega_2| |2+T.j.\omega_2|}{|1+T.j.\omega_2|^2} = \frac{T.\omega_2 \cdot \sqrt{4+(T.\omega_2)^2}}{1+(T.\omega_2)^2}$$

Une résolution numérique donne $T_{max} = 4,00 \cdot 10^{-4}\,s = 0,4\,ms$

Variante analytique

La résolution de $|B(j.\omega_2)| \leq \frac{1}{100}$ pour $\omega_2 = 12,5\,rad/s$ avec la fonction équivalente aux basses fréquences $B(p) \approx 2.T.p$ donne le même résultat, mais plus simplement :

$$2.T \times 12,5 \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow 25.T \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow T \leq \frac{1}{2500} = 0,4\,ms$$

V. Synthèse

Q27. Conclusion sur les écarts à partir du DR4

Il serait trop fastidieux de reprendre une à une toutes les exigences de la figure 2 pour les 3 écarts possibles. Nous allons de nous contenter du plus significatif.

Ecart entre le réel et le simulé (modèle)

Les courbes force et position maître sont identiques.

La courbe de position maître simulée présente des valeurs minimales négatives après l'échelon de déplacement, alors que la courbe réelle ne descend pas sous la position initiale (0 mm).

Ecart entre le demandé et le réel

Le déplacement est conforme à la demande.

L'effort ressenti est bien indépendant de la position (exigence id 1.3.2.2).

La perturbation sinusoïdale est bien annulée sur la position maître et l'effort (id 1.3.1.1).

L'effort ressenti est de $2N$, soit inférieur à la valeur de $5N$ demandée (id. 1.3.2.1)

Malgré l'échelle défavorable, il semble bien que le temps de réponse soit inférieur à $0,1s$ (id. 1.1.2.1).

DS 3 : Exercice

Etude dynamique d'un robot 5 axes

Calculatrice autorisée

Les résultats doivent être encadrés et mis sous forme simplifiée !

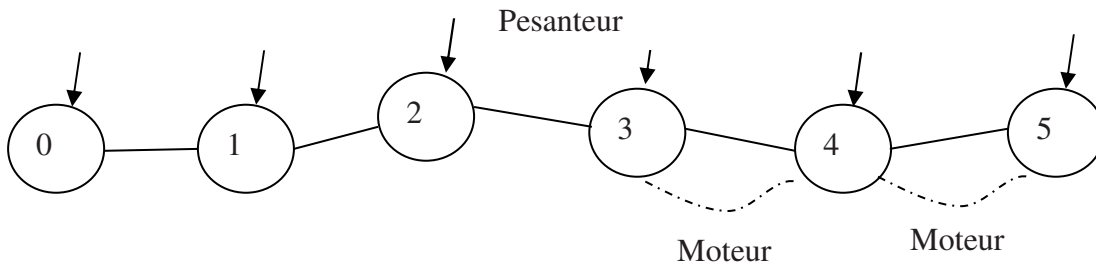
Les copies seront numérotées !

Robot cinq axes (corrigé)

7-



8-



9 – Détermination de C_{m5}

Bilan des actions mécaniques extérieures sur **5** :

$$T(4 \rightarrow 5) = \begin{Bmatrix} X_{45} & L_{45} \\ Y_{45} & 0 \\ Z_{45} & N_{45} \end{Bmatrix}_{(-\vec{y}_4, -)} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{m5} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(-\vec{y}_4, -)} \quad \text{et} \quad T(\text{pes} \rightarrow 5) = \begin{Bmatrix} -m_5 g \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_5}$$

On applique le théorème du moment dynamique à **5** en O en projection sur \vec{y}_5 (axe de la liaison pivot).

$$\bar{\delta}_O(5/R) \cdot \vec{y}_5 = C_{m5} + (\overline{OG_5} \wedge -m_5 g \vec{z}) \cdot \vec{y}_5 = C_{m5} \quad \text{car} \quad \overline{OG_5} = l_5 \vec{y}_5$$

$$\bar{\delta}_O(5/R) \cdot \vec{y}_5 = \left[\frac{d\bar{\sigma}_O(5/R)}{dt} \right]_{\mathbb{R}} \cdot \vec{y}_5 = \frac{d[\bar{\sigma}_O(5/R) \cdot \vec{y}_5]}{dt} - \bar{\sigma}_O(5/R) \cdot \left[\frac{d\vec{y}_5}{dt} \right]_{\mathbb{R}} \quad \text{car O fixe dans R}$$

$$\bar{\sigma}_O(5/R) = I_O(5) \bar{\Omega}(5/R) \quad \text{car O fixe dans R} \quad \text{avec} \quad \bar{\Omega}(5/R) = \dot{\theta}_5 \vec{y}_5 + \dot{\theta}_4 \vec{x} = \dot{\theta}_4 \cos \theta_5 \vec{x}_5 + \dot{\theta}_5 \vec{y}_5 + \dot{\theta}_4 \sin \theta_5 \vec{z}_5$$

$$\bar{\sigma}_O(5/R) \cdot \vec{y}_5 = \begin{pmatrix} A_5 & -F_5 & -E_5 \\ -F_5 & B_5 & -D_5 \\ -E_5 & -D_5 & C_5 \end{pmatrix}_{R_5} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_4 \cos \theta_5 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_4 \sin \theta_5 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}_5 = -F_5 \dot{\theta}_4 \cos \theta_5 + B_5 \dot{\theta}_5 - D_5 \dot{\theta}_4 \sin \theta_5$$

$$\left[\frac{d\vec{y}_5}{dt} \right]_{\mathbb{R}} = \left[\frac{d\vec{y}_5}{dt} \right]_{R_5} + \bar{\Omega}(5/R) \wedge \vec{y}_5 = (\dot{\theta}_5 \vec{y}_5 + \dot{\theta}_4 \vec{x}) \wedge \vec{y}_5 = \dot{\theta}_4 \vec{z}_4$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_O(5/R) \cdot \dot{\theta}_4 \vec{z}_4 &= (A_5 \dot{\theta}_4 \cos \theta_5 - F_5 \dot{\theta}_5 - E_5 \dot{\theta}_4 \sin \theta_5) \vec{x}_5 \cdot \dot{\theta}_4 \vec{z}_4 + (-E_5 \dot{\theta}_4 \cos \theta_5 - D_5 \dot{\theta}_5 + C_5 \dot{\theta}_4 \sin \theta_5) \vec{z}_5 \cdot \dot{\theta}_4 \vec{z}_4 \\ &= -(A_5 \dot{\theta}_4 \cos \theta_5 - F_5 \dot{\theta}_5 - E_5 \dot{\theta}_4 \sin \theta_5) \dot{\theta}_4 \sin \theta_5 + (-E_5 \dot{\theta}_4 \cos \theta_5 - D_5 \dot{\theta}_5 + C_5 \dot{\theta}_4 \sin \theta_5) \dot{\theta}_4 \cos \theta_5 \end{aligned}$$

$\dot{\theta}_4$ et $\dot{\theta}_5$ étant constants :

$$\bar{\delta}_0(5/R) \cdot \vec{y}_5 = F_5 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \sin\theta_5 - D_5 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \cos\theta_5 + A_5 \dot{\theta}_4^2 \cos\theta_5 \sin\theta_5 - F_5 \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_4 \sin\theta_5 - E_5 \dot{\theta}_4^2 \sin^2\theta_5 + E_5 \dot{\theta}_4^2 \cos^2\theta_5 + D_5 \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_4 \cos\theta_5 - C_5 \dot{\theta}_4^2 \sin\theta_5 \cos\theta_5$$

soit

$$C_{m5} = [(A_5 - C_5) \sin\theta_5 \cos\theta_5 + E_5 (\cos^2\theta_5 - \sin^2\theta_5)] \dot{\theta}_4^2$$

Remarque : $\dot{\theta}_5$ n'intervient pas car , à vitesse constante et liaisons parfaites, pas besoin de couple moteur.

10 – Détermination de C_{m4}

Bilan des actions mécaniques extérieures sur **4+5** :

$$T(3 \rightarrow 4) = \begin{Bmatrix} X_{34} & 0 \\ Y_{34} & M_{34} \\ Z_{34} & N_{34} \end{Bmatrix}_{R_4} + \begin{Bmatrix} 0 & C_{m4} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_4} \quad T(\text{pes} \rightarrow 4) = \begin{Bmatrix} -m_4 g \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_4} \quad T(\text{pes} \rightarrow 5) = \begin{Bmatrix} -m_5 g \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_5}$$

On applique le théorème du moment dynamique à l'ensemble **4+5** en O en projection sur \vec{x} (axe de la liaison pivot).

$$\bar{\delta}_0(4+5/R) \cdot \vec{x} = C_{m4} + (\overrightarrow{OG_5} \wedge -m_5 g \vec{z}) \cdot \vec{x} + (\overrightarrow{OG_5} \wedge -m_5 g \vec{z}) \cdot \vec{x} = C_{m4} - g(m_4 l_4 + m_5 l_5) \cos\theta_4$$

$$\bar{\delta}_0(4+5/R) \cdot \vec{x} = \bar{\delta}_0(4/R) \cdot \vec{x} + \bar{\delta}_0(5/R) \cdot \vec{x}$$

$$\bar{\delta}_0(4/R) \cdot \vec{x} = I_{Ox}(4) \ddot{\theta}_4 \text{ car } \mathbf{4} \text{ est en rotation autour de l'axe fixe } (O, \vec{x}) \Rightarrow \bar{\delta}_0(4/R) \cdot \vec{x} = 0 \text{ car } \dot{\theta}_4 = \text{Cte}$$

$$\bar{\delta}_0(5/R) \cdot \vec{x} = \left[\frac{d\bar{\sigma}_0(5/R)}{dt} \right]_{R_5} \cdot \vec{x} = \frac{d[\bar{\sigma}_0(5/R) \cdot \vec{x}]}{dt} \text{ car } O \text{ fixe dans } R \text{ et } \vec{x} \text{ fixe dans } R$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_0(5/R) \cdot \vec{x} &= \begin{pmatrix} A_5 & -F_5 & -E_5 \\ -F_5 & B_5 & -D_5 \\ -E_5 & -D_5 & C_5 \end{pmatrix}_{R_5} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_4 \cos\theta_5 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_4 \sin\theta_5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \\ &= (A_5 \dot{\theta}_4 \cos\theta_5 - F_5 \dot{\theta}_5 - E_5 \dot{\theta}_4 \sin\theta_5) \vec{x} \cdot \vec{x}_5 + (-E_5 \dot{\theta}_4 \cos\theta_5 - D_5 \dot{\theta}_5 + C_5 \dot{\theta}_4 \sin\theta_5) \vec{x} \cdot \vec{z}_5 \\ &= (A_5 \dot{\theta}_4 \cos\theta_5 - F_5 \dot{\theta}_5 - E_5 \dot{\theta}_4 \sin\theta_5) \cos\theta_5 + (-E_5 \dot{\theta}_4 \cos\theta_5 - D_5 \dot{\theta}_5 + C_5 \dot{\theta}_4 \sin\theta_5) \sin\theta_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_0(5/R) \cdot \vec{x} &= -(A_5 \sin\theta_5 + E_5 \cos\theta_5) \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \cos\theta_5 - (A_5 \dot{\theta}_4 \cos\theta_5 - F_5 \dot{\theta}_5 - E_5 \dot{\theta}_4 \sin\theta_5) \dot{\theta}_5 \sin\theta_5 \\ &\quad + (E_5 \sin\theta_5 + C_5 \cos\theta_5) \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \sin\theta_5 + (-E_5 \dot{\theta}_4 \cos\theta_5 - D_5 \dot{\theta}_5 + C_5 \dot{\theta}_4 \sin\theta_5) \dot{\theta}_5 \cos\theta_5 \end{aligned}$$

$$C_{m4} = g(m_4 l_4 + m_5 l_5) \cos\theta_4 + [2(C_5 - A_5) \sin\theta_5 \cos\theta_5 + 2 E_5 (\sin^2\theta_5 - \cos^2\theta_5)] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 + (F_5 \sin\theta_5 - D_5 \cos\theta_5) \dot{\theta}_5^2$$