DS 3 : Exercice

Etude dynamique d'un robot 5 axes

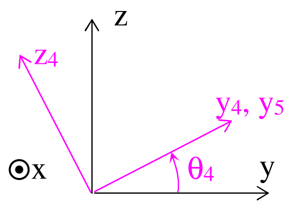
Calculatrice autorisée

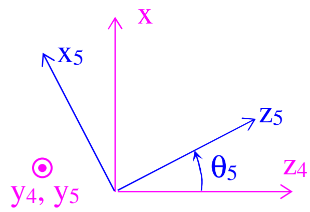
Les résultats doivent être encadrés et mis sous forme simplifiée !

Les copies seront numérotées !

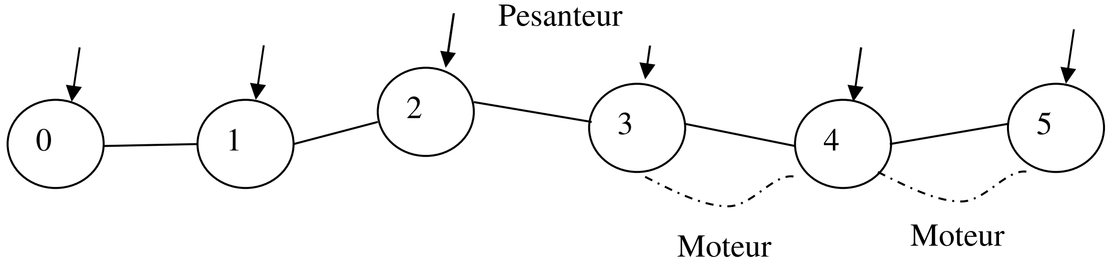
Robot cinq axes (corrigé)

7-





8-



9 – Détermination de C_{m5}

Bilan des actions mécaniques extérieures sur **5** :

$$T(4\to5) = {}_{O}\begin{Bmatrix} X_{45} & L_{45} \\ Y_{45} & 0 \\ Z_{45} & N_{45} \end{Bmatrix}_{(-,\vec{y}_4,-)} + {}_{O}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{m5} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(-,\vec{y}_4,-)} \quad \text{et} \quad T(pes\to5) = {}_{G_5}\begin{Bmatrix} -m_5\,g\,\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

On applique le théorème du moment dynamique à **5** en O en projection sur $\vec{y}_5$ (axe de la liaison pivot).

$$\vec{\delta}_0(5/R).\vec{y}_5 = C_{m5} + (\overrightarrow{OG_5} \wedge -m_5\,g\,\vec{z}).\vec{y}_5 = C_{m5} \quad \text{car } \overrightarrow{OG_5} = l_5\,\vec{y}_5$$

$$\vec{\delta}_O(5/R).\vec{y}_5 = \left[\frac{d\vec{\sigma}_O(5/R)}{dt}\right]_R.\vec{y}_5 = \frac{d\left[\vec{\sigma}_O(5/R).\vec{y}_5\right]}{dt} - \vec{\sigma}_O(5/R).\left[\frac{d\vec{y}_5}{dt}\right]_R \quad \text{car O fixe dans R}$$

$\vec{\sigma}_O(5/R) = I_O(5)\ \vec{\Omega}(5/R)$ car O fixe dans R avec $\vec{\Omega}(5/R) = \dot{\theta}_5\ \vec{y}_5 + \dot{\theta}_4\ \vec{x} =$
$\dot{\theta}_4 \cos\theta_5\ \vec{x}_5 + \dot{\theta}_5\ \vec{y}_5 + \dot{\theta}_4 \sin\theta_5\ \vec{z}_5$

$$\vec{\sigma}_O(5/R).\vec{y}_5 = \begin{pmatrix} A_5 & -F_5 & -E_5 \\ -F_5 & B_5 & -D_5 \\ -E_5 & -D_5 & C_5 \end{pmatrix}_{R_5} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_4\cos\theta_5 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_4\sin\theta_5 \end{pmatrix}.\vec{y}_5 = -F_5\ \dot{\theta}_4\cos\theta_5 + B_5\ \dot{\theta}_5 - D_5\ \dot{\theta}_4\sin\theta_5$$

$$\left[\frac{d\vec{y}_5}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\vec{y}_5}{dt}\right]_{R_5} + \vec{\Omega}(5/R)\wedge\vec{y}_5 = (\dot{\theta}_5\ \vec{y}_5 + \dot{\theta}_4\ \vec{x})\wedge\vec{y}_5 = \dot{\theta}_4\ \vec{z}_4$$

$\vec{\sigma}_O(5/R).\ \dot{\theta}_4\ \vec{z}_4 =$

$(A_5\ \dot{\theta}_4\cos\theta_5 - F_5\ \dot{\theta}_5 - E_5\ \dot{\theta}_4\sin\theta_5)\ \vec{x}_5.\dot{\theta}_4\ \vec{z}_4 + (-E_5\ \dot{\theta}_4\cos\theta_5 - D_5\dot{\theta}_5 + C_5\dot{\theta}_4\sin\theta_5)\vec{z}_5.\ \dot{\theta}_4\ \vec{z}_4$

$=$

$-(A_5\ \dot{\theta}_4\cos\theta_5 - F_5\ \dot{\theta}_5 - E_5\ \dot{\theta}_4\sin\theta_5)\ \dot{\theta}_4\ \sin\theta_5 + (-E_5\ \dot{\theta}_4\cos\theta_5 - D_5\dot{\theta}_5 + C_5\dot{\theta}_4\sin\theta_5)\ \dot{\theta}_4\ \cos\theta_5$

$\dot{\theta}_4$ et $\dot{\theta}_5$ étant constants :

$\vec{\delta}_0(5/R).\vec{y}_5 = \cancel{F_5\, \dot{\theta}_4\, \dot{\theta}_5 \sin\theta_5} - \cancel{D_5\, \dot{\theta}_4\, \dot{\theta}_5 \cos\theta_5} + A_5 \dot{\theta}_4^{\,2} \cos\theta_5 \sin\theta_5 - \cancel{F_5\, \dot{\theta}_5\, \dot{\theta}_4 \sin\theta_5} - E_5\, \dot{\theta}_4^{\,2} \sin^2\theta_5 + E_5$
$\dot{\theta}_4^{\,2} \cos^2\theta_5 + \cancel{D_5 \dot{\theta}_5\, \dot{\theta}_4 \cos\theta_5} - C_5 \dot{\theta}_4^{\,2} \sin\theta_5 \cos\theta_5$

soit $\boxed{C_{m5} = [(A_5 - C_5) \sin\theta_5 \cos\theta_5 + E_5 (\cos^2\theta_5 - \sin^2\theta_5)]\, \dot{\theta}_4^{\,2}}$

<u>Remarque</u> : $\dot{\theta}_5$ n'intervient pas car , à vitesse constante et liaisons parfaites, pas besoin de couple moteur.

10 – Détermination de C_{m4}

Bilan des actions mécaniques extérieures sur **4+5** :

$T(3\to4) = {}_O\begin{Bmatrix} X_{34} & 0 \\ Y_{34} & M_{34} \\ Z_{34} & N_{34} \end{Bmatrix}_{R_4} + {}_O\begin{Bmatrix} 0 & C_{m4} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_4}$ T(pes→4) = ${}_{G_4}\begin{Bmatrix} -m_4\, g\, \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$ T(pes→5) = ${}_{G_5}\begin{Bmatrix} -m_5\, g\, \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

On applique le théorème du moment dynamique à l'ensemble **4+5** en O en projection sur $\vec{x}$ (axe de la liaison pivot).

$\vec{\delta}_0(4+5/R).\vec{x} = C_{m4} + (\overrightarrow{OG_5} \wedge -m_5\, g\, \vec{z}).\vec{x} + (\overrightarrow{OG_5} \wedge -m_5\, g\, \vec{z}).\vec{x} = C_{m4} - g(m_4\, l_4 + m_5\, l_5) \cos\theta_4$

$\vec{\delta}_0(4+5/R).\vec{x} = \vec{\delta}_0(4/R).\vec{x} + \vec{\delta}_0(5/R).\vec{x}$

$\vec{\delta}_0(4/R).\vec{x} = I_{Ox}(4)\ \ddot{\theta}_4$ car **4** est en rotation autour de l'axe fixe $(O, \vec{x}) \Rightarrow \vec{\delta}_0(4/R).\vec{x} = 0$ car $\dot{\theta}_4 = Cte$

$\vec{\delta}_O(5/R).\vec{x} = \left[\dfrac{d\vec{\sigma}_O(5/R)}{dt}\right]_R .\vec{x} = \dfrac{d\left[\vec{\sigma}_O(5/R).\vec{x}\right]}{dt}$ car O fixe dans R et $\vec{x}$ fixe dans R

$$\vec{\sigma}_O(5/R).\ \vec{x} = \begin{pmatrix} A_5 & -F_5 & -E_5 \\ -F_5 & B_5 & -D_5 \\ -E_5 & -D_5 & C_5 \end{pmatrix}_{R_5} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_4 \cos\theta_5 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_4 \sin\theta_5 \end{pmatrix} . \vec{x}$$
$$= (A_5\, \dot{\theta}_4 \cos\theta_5 - F_5\, \dot{\theta}_5 - E_5\, \dot{\theta}_4 \sin\theta_5)\, \vec{x}\,.\,\vec{x}_5 + (-E_5\, \dot{\theta}_4 \cos\theta_5 - D_5\, \dot{\theta}_5 + C_5 \dot{\theta}_4 \sin\theta_5)\, \vec{x}\,.\,\vec{z}_5$$
$$= (A_5\, \dot{\theta}_4 \cos\theta_5 - F_5\, \dot{\theta}_5 - E_5\, \dot{\theta}_4 \sin\theta_5) \cos\theta_5 + (-E_5\, \dot{\theta}_4 \cos\theta_5 - D_5\, \dot{\theta}_5 + C_5 \dot{\theta}_4 \sin\theta_5) \sin\theta_5$$

$$\vec{\delta}_O(5/R).\vec{x} = -(A_5 \sin\theta_5 + E_5 \cos\theta_5)\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5 \cos\theta_5 - (A_5\, \dot{\theta}_4 \cos\theta_5 - F_5\, \dot{\theta}_5 - E_5\, \dot{\theta}_4 \sin\theta_5)\, \dot{\theta}_5 \sin\theta_5$$
$$+ (E_5 \sin\theta_5 + C_5 \cos\theta_5)\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5 \sin\theta_5 + (-E_5\, \dot{\theta}_4 \cos\theta_5 - D_5\, \dot{\theta}_5 + C_5 \dot{\theta}_4 \sin\theta_5)\, \dot{\theta}_5 \cos\theta_5$$

$$\boxed{C_{m4} = g(m_4\, l_4 + m_5\, l_5) \cos\theta_4 + [2(C_5 - A_5) \sin\theta_5 \cos\theta_5 + 2\, E_5 (\sin^2\theta_5 - \cos^2\theta_5)]\, \dot{\theta}_4\, \dot{\theta}_5}$$
$$\boxed{+ (F_5 \sin\theta_5 - D_5 \cos\theta_5)\ \dot{\theta}_5^{\,2}}$$