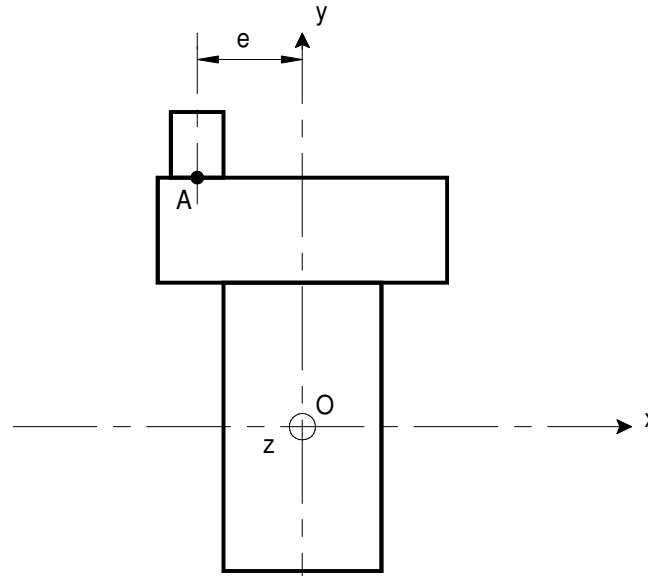


**Exercice 1 :**

Un vilebrequin est formé de 3 cylindres de hauteurs  $h_1, h_2, h_3$ , de rayons  $R_1, R_2, R_3$  et de masse  $m_1, m_2, m_3$ . Ils sont numéroté 1, 2 et 3 de bas en haut. Le repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est lié au vilebrequin.  $O$  est le centre de gravité du cylindre 1.  $\vec{OA} \cdot \vec{x} = e$  est appelée excentrique.

**Fig. 2**

1. Déterminer la position dans  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  du centre de gravité  $G$  du vilebrequin.  
Par la suite, on dira que  $\vec{OG} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$  pour alléger les calculs.
2. Déterminer le moment d'inertie du vilebrequin par rapport à l'axe  $(O, \vec{y})$ .
3. Déterminer le moment d'inertie du vilebrequin par rapport à l'axe  $(G, \vec{y})$ .

Correction :

$$(m_1 + m_2 + m_3)\vec{OG} = m_1\vec{OG}_1 + m_2\vec{OG}_2 + m_3\vec{OG}_3$$

$$m_1 = \rho\pi R_1^2 h_1$$

$$1. \quad \vec{OG}_1 = \vec{0}$$

$$m_2 = \rho\pi R_2^2 h_2$$

$$\vec{OG}_2 = \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}\right)\vec{y}$$

$$m_3 = \rho\pi R_3^2 h_3$$

$$\vec{OG}_3 = \left(\frac{h_1}{2} + h_2 + \frac{h_3}{2}\right)\vec{y} - e\vec{x} = H\vec{y} - e\vec{x}$$

$$\vec{OG} = \frac{\pi R_2^2 h_2 \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}\right)\vec{y} + \pi R_3^2 h_3 [H\vec{y} - e\vec{x}]}{(\pi R_1^2 h_1 + \pi R_2^2 h_2 + \pi R_3^2 h_3)}$$

2. On le note  $Joy$  et on note pour chaque cylindre  $Joy_i$  avec  $i$  variant de 1 à 3 . on peut donc dire  $Joy = Joy_1 + Joy_2 + Joy_3$  . Calculons les  $Joy_i$  avec  $i$  variant de 1 à 3.

$$Joy_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$$

$$Joy_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \quad \text{d'après Huygens pour 3}$$

$$Joy_3 = \frac{1}{2} m_3 R_3^2 + m_3 (e)^2$$

$$\text{D'où } Joy = Joy_1 + Joy_2 + Joy_3 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 + \frac{1}{2} m_2 R_2^2 + \frac{1}{2} m_3 R_3^2 + m_3 e^2$$

3. On le note  $JGy$  et on note pour chaque cylindre  $JGy_i$  avec  $i$  variant de 1 à 3 . on peut donc dire  $JGy = JGy_1 + JGy_2 + JGy_3$  . Calculons les  $JGy_i$  avec  $i$  variant de 1 à 3.

$$\overrightarrow{OG} = a\vec{x} + b\vec{y}$$

$$\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{GG_1} = -b\vec{y} - a\vec{x}$$

$$\overrightarrow{OG_2} = \left( \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} \right) \vec{y} \rightarrow \overrightarrow{GG_2} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OG_2} = -\left( b + \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} \right) \vec{y} - a\vec{x}$$

$$\overrightarrow{OG_3} = \left( \frac{h_1}{2} + h_2 + \frac{h_3}{2} \right) \vec{y} - e\vec{x} = H\vec{y} - e\vec{x} \rightarrow \overrightarrow{GG_3} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OG_3} = (H - b)\vec{y} - (e + a)\vec{x}$$

$$JGy_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 + m_1 a^2$$

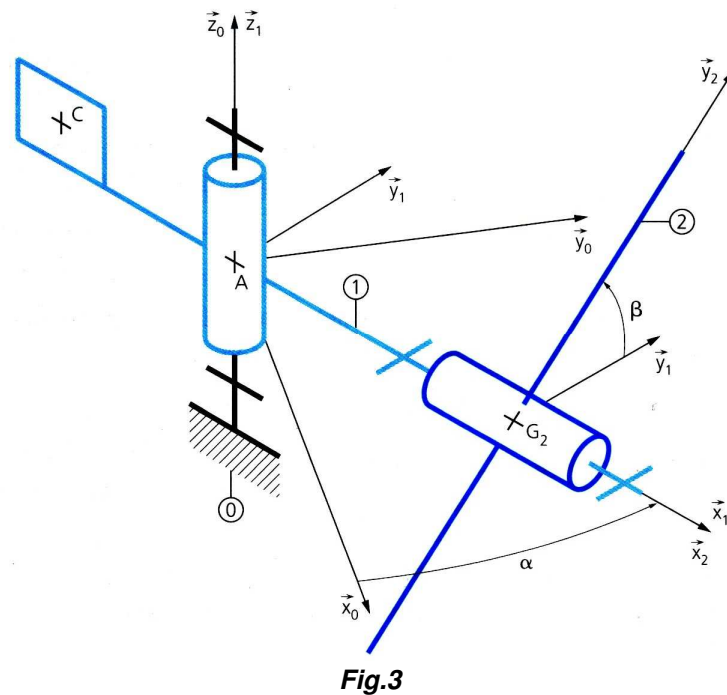
$$JGy_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 + m_2 a^2$$

$$JGy_3 = \frac{1}{2} m_3 R_3^2 + m_3 (e + a)^2$$

$$JGy = JGy_1 + JGy_2 + JGy_3 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 + m_1 a^2 + \frac{1}{2} m_2 R_2^2 + m_2 a^2 + \frac{1}{2} m_3 R_3^2 + m_3 (e + a)^2$$

**Exercice 2 :**

Une éolienne bipale est représentée figure 3. Elle est constituée d'un bâti 0, de l'arbre de la génératrice 1 en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  avec le bâti, d'une hélice bipale 2 en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x}_1)$  avec l'arbre 1.

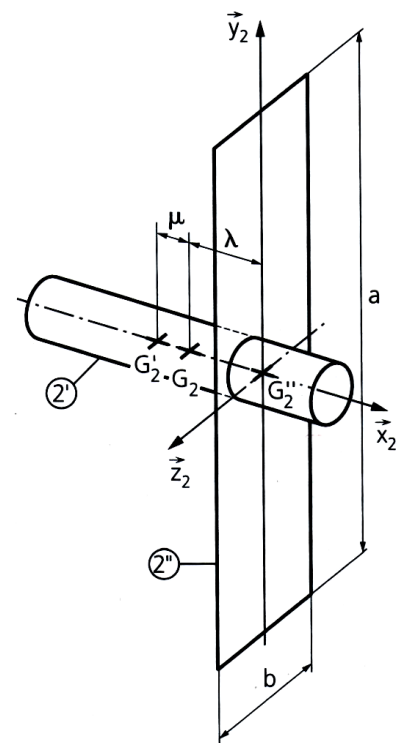
**Fig.3**

Solide 1 : de masse  $m$ , de centre de gravité  $A$ , admettant le plan  $(A, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$  comme plan de symétrie matérielle.

Solide 2 (hélice) : de masse  $m_2$ , de centre d'inertie  $G_2$ .

L'hélice est constituée :

- d'un cylindre plein (rotor) 2' d'axe  $(A, \vec{x}_2)$  de masse  $m'_2$ , de centre de gravité  $G'_2$  tel que  $\vec{G'_2 G_2} = \mu \cdot \vec{x}_2$ , de hauteur  $H$  et de rayon  $R$ .
- d'une plaque rectangulaire (pales) 2'' de masse  $m''_2$ , de centre de gravité  $G''_2$  tel que  $\vec{G'_2 G''_2} = \lambda \cdot \vec{x}_2$ , de largeur  $b$ , de hauteur  $a$  et d'épaisseur négligeable.

**Solide 2****Fig. 4**

1. Donner la forme de la matrice d'inertie en  $A$  du solide 1 dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .
2. Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la pale 2  $G_2$ . En déduire une relation entre  $\lambda$  et  $\mu$ .
3. Déterminer la matrice d'inertie en  $G'_2$  du rotor 2' dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en fonction de  $m'_2$ ,  $H$  et  $R$ .

4. Déterminer la matrice d'inertie en  $G_2$  des pales 2 dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en fonction de  $m_2, a$  et  $b$ .
5. Déterminer la matrice d'inertie en  $G_2$  de l'hélice 2 dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ .
- Le solide 1 de centre d'inertie A et de matrice d'inertie en A :  $I(A,1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{R1}$  ;
- Le solide 2 (l'hélice), de masse  $m_2$ , de centre d'inertie  $G_2$  tel que  $\vec{AG}_2 = L\vec{x}_1$  et de matrice d'inertie en  $G_2$  :
 
$$I(G_2,2) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{R2} .$$
- $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$  ;  $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \alpha$  ;
- $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$  ;  $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \beta$ .
6. Déterminer le moment cinétique  $\vec{\sigma}(A,1/0)$ .
7. Déterminer la projection du moment dynamique  $\vec{\delta}(A,1/0) \cdot \vec{z}_0$ .
8. Déterminer le moment cinétique  $\vec{\sigma}(G_2,2/0)$ .
9. Déterminer la projection du moment dynamique  $\vec{\delta}(G_2,2/0) \cdot \vec{x}_1$ .
10. Déterminer la projection du moment dynamique  $\vec{\delta}(A,2/0) \cdot \vec{z}_0$ .

Correction :

1.

$$I(A, S1) = \begin{bmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{bmatrix}_{A, B1}$$

2.

$$m_2 \overrightarrow{AG_2} = m'_2 \overrightarrow{AG'_2} + m''_2 \overrightarrow{AG''_2}$$

$$m_2 \overrightarrow{G_2 G_2} = m'_2 \overrightarrow{G_2 G'_2} + m''_2 \overrightarrow{G_2 G''_2}$$

$$\Rightarrow m'_2 \mu = m''_2 \lambda$$

3.

$$I(G'_2, S'_2) = m'_2 \begin{bmatrix} \left(\frac{R^2}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) \end{bmatrix}_{G'_2, B2}$$

4.

$$I(G''_2, S''_2) = m''_2 \begin{bmatrix} \frac{(b^2 + a^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{12} \end{bmatrix}_{G''_2, B2}$$

5.

$$I(G_2, S_2) = \begin{bmatrix} \frac{m''_2(b^2 + a^2)}{12} + m'_2 \left(\frac{R^2}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m''_2 \left(\frac{b^2}{12} + \lambda^2\right) + m'_2 \left(\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) + \mu^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & m''_2 \left(\frac{a^2}{12} + \lambda^2\right) + m'_2 \left(\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) + \mu^2\right) \end{bmatrix}_{G_2, B2}$$

6.

$$\vec{\sigma}(A,1/0) = I(A,1).\vec{\Omega}(1/0) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{R1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}_{R1} = \begin{pmatrix} -E_1\dot{\alpha} \\ 0 \\ C_1\dot{\alpha} \end{pmatrix}_{R1}$$

7

$$\vec{\delta}(A,1/0) = \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}(A,1/0))_{R0} = \begin{pmatrix} -E_1\ddot{\alpha} \\ E_1\dot{\alpha}^2 \\ C_1\ddot{\alpha} \end{pmatrix}_{R1}$$

$$\vec{\delta}(A,1/0).\vec{z}_0 = C_1\ddot{\alpha}$$

8.

$$\vec{\sigma}(G_2,2/0) = I(G_2,2).\vec{\Omega}(2/0) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{R2} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{R2} = \begin{pmatrix} A_2\dot{\beta} \\ B_2\dot{\alpha} \sin \beta \\ C_2\dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{R2}$$

9.

$$\vec{\delta}(G_2,2/0) = \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}(G_2,2/0))_{R0}$$

$$\vec{\delta}(G_2,2/0).\vec{x}_1 = \vec{\delta}(G_2,2/0).\vec{x}_2 = \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}(G_2,2/0))_{R0}.\vec{x}_2$$

$$\vec{\delta}(G_2,2/0).\vec{x}_1 = \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}(G_2,2/0).\vec{x}_2) - \frac{d}{dt}(\vec{x}_2)_{R0}.\vec{\sigma}(G_2,2/0)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\sigma}(G_2,2/0).\vec{x}_2) = A_2\ddot{\beta}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{x}_2)_{R0} = \frac{d}{dt}(\vec{x}_1)_{R0} = \underbrace{\frac{d}{dt}(\vec{x}_1)_{R1}}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{x}_1 = \dot{\alpha} \vec{y}_1$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{x}_2)_{R0} \cdot \vec{\sigma}(G_2, 2/0) &= \frac{d}{dt}(\vec{x}_1)_{R0} \cdot \vec{\sigma}(G_2, 2/0) = \dot{\alpha} \vec{y}_1 \cdot \vec{\sigma}(G_2, 2/0) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \cos \beta \\ -\dot{\alpha} \sin \beta \end{pmatrix}_{R2} \cdot \begin{pmatrix} A_2 \dot{\beta} \\ B_2 \dot{\alpha} \sin \beta \\ C_2 \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{R2} = B_2 \dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta - C_2 \dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\delta}(G_2, 2/0) \cdot \vec{x}_1 &= A_2 \ddot{\beta} - B_2 \dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta + C_2 \dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta \\ &= A_2 \ddot{\beta} + (C_2 - B_2) \dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta \end{aligned}$$

10.

Soit :

$$\vec{\delta}(A, 2/0) = \vec{\delta}(G_2, 2/0) + \overrightarrow{AG_2} \wedge m_2 \vec{\Gamma}(G_2, 2/0)$$

$$\vec{\delta}(A, 2/0) \cdot \vec{z}_o = \vec{\delta}(A, 2/0) \cdot \vec{z}_1 = \left( \vec{\delta}(G_2, 2/0) + \overrightarrow{AG_2} \wedge m_2 \vec{\Gamma}(G_2, 2/0) \right) \cdot \vec{z}_1$$

Soit :

- Calculs de  $I(A, 2)$ ,  $\vec{\sigma}(A, 2/0)$  et  $\vec{\delta}(A, 2/0) \cdot \vec{z}_o$ 

On utilisera la méthode 2

$$I(A, 2) = I(G_2, 2) + m_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 \end{bmatrix}_{R2} \quad \overrightarrow{AG_2} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R2} \quad I(A, 2) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 + m_2 L^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 + m_2 L^2 \end{bmatrix}_{R2}$$

$$\vec{\sigma}(A, 2/0) = I(A, 2) \cdot \vec{\Omega}(2/0) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 + m_2 L^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 + m_2 L^2 \end{bmatrix}_{R2} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{R2} =$$

$$\begin{pmatrix} A_2 \dot{\beta} \\ (B_2 + m_2 L^2) \dot{\alpha} \sin \beta \\ (C_2 + m_2 L^2) \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{R2}$$

$$\vec{\delta}(A, 2/0) \cdot \vec{z}_1 = \frac{d}{dt} \left( \vec{\sigma}(A, 2/0) \cdot \vec{z}_1 \right)_{R0} - \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \vec{z}_1 \right)_{R0}}_{\vec{0}} \cdot \vec{\sigma}(A, 2/0)$$

$$\vec{\sigma}(A, 2/0) \cdot \vec{z}_1 = \begin{pmatrix} A_2 \dot{\beta} \\ (B_2 + m_2 L^2) \dot{\alpha} \sin \beta \\ (C_2 + m_2 L^2) \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{R2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}_{R2} = \begin{pmatrix} A_2 \dot{\beta} \\ (B_2 + m_2 L^2) \dot{\alpha} \sin^2 \beta \\ (C_2 + m_2 L^2) \dot{\alpha} \cos^2 \beta \end{pmatrix}_{R2}$$

$$\begin{aligned} \vec{\delta}(A, 2/0) \cdot \vec{z}_1 &= (B_2 + m_2 L^2) \ddot{\alpha} \sin^2 \beta + (C_2 + m_2 L^2) \ddot{\alpha} \cos^2 \beta \\ &+ 2(B_2 + m_2 L^2) \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta - 2(C_2 + m_2 L^2) \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta \\ &= B_2 \ddot{\alpha} \sin^2 \beta + C_2 \ddot{\alpha} \cos^2 \beta + m_2 L^2 \ddot{\alpha} + 2(B_2 - C_2) \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta \end{aligned}$$