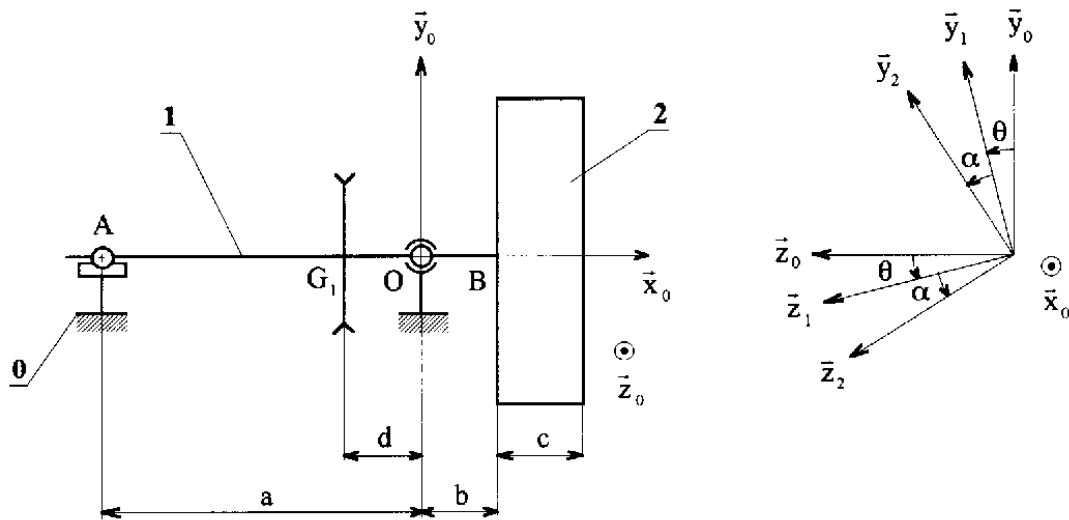


Équilibreuse de roue de voiture

L'équilibreuse étudiée permet l'équilibrage des roues démontées. Elle est constituée d'une arbre **1** guidé en rotation par deux paliers à roulement en O et A. Ces paliers en liaison élastique avec le bâti **0**, dans une seule direction à l'aide de deux lames flexibles, permettent l'enregistrement des composantes horizontales des résultantes d'action mécanique dans les paliers à roulement, par l'intermédiaire de deux capteurs couplés à un repérage de la position angulaire de l'arbre **1**.

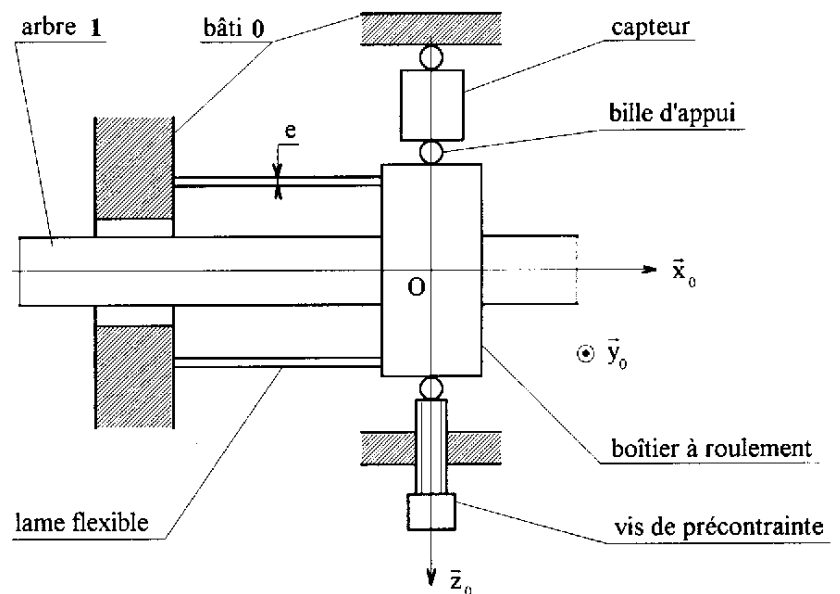


Le repère $R_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au bâti **0** ($\vec{y}_0$ vertical ascendant).

Le repère $R_1 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié à l'arbre **1**.
On pose $\theta = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ avec $\dot{\theta} = \text{constante}$.

L'arbre **1** est entraîné en rotation par une courroie sur une poulie fixée au centre d'inertie G_1 de l'arbre **1**. Le torseur d'action mécanique de la courroie sur la poulie est de la forme:

$$\vec{T} (\text{courroie} \rightarrow \text{poulie}) = \begin{Bmatrix} -T \vec{y}_0 \\ C_m \vec{x}_0 \end{Bmatrix}_{G_1}$$



L'arbre **1** (avec la poulie), de masse m_1 , a pour moment d'inertie I_1 par rapport à l'axe $(O, \vec{x}_0)$ et est équilibré en rotation.

La roue **2**, à équilibrer, est fixée sur **1**. Le repère $R_2 (B, \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est lié à la roue **2** avec $\alpha = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$, angle constant mais a priori inconnu. La roue **2**, de masse m_2 , a pour centre d'inertie G_2 dont la position est donnée par $\vec{BG}_2 = h \vec{x}_0 + \rho \vec{z}_2$, h et ρ étant des inconnues. La matrice d'inertie en B de la roue **2** dans la base

$$(\vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2) \text{ est de la forme : } \mathcal{J}_B(2) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$\text{On note } \vec{T} (0 \rightarrow 1) = \begin{Bmatrix} X_O & 0 \\ Y_O & 0 \\ Z_O & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} \text{ et } \vec{T}' (0 \rightarrow 1) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} \text{ les torseurs d'actions mécaniques de } \mathbf{0} \text{ sur } \mathbf{1}.$$

1 – En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'ensemble $1 \cup 2$ en O , déterminer les composantes Z_O et Z_A des résultantes d'actions mécaniques du bâti 0 sur l'arbre 1 en fonction des données.

On utilise deux capteurs d'efforts, en O et A , situés dans un plan horizontal et couplés à un capteur angulaire de l'arbre 1 , pour mesurer les composantes suivant $\vec{z}_0$ des résultantes d'action mécanique $Z_O(\theta)$ et $Z_A(\theta)$ du bâti 0 sur l'arbre 1 .

2 – Déterminer, en fonction de $Z_O(0)$, $Z_O(\pi/2)$, $Z_A(0)$ et $Z_A(\pi/2)$, les coordonnées ρ et α du centre d'inertie G_2 de la roue 2 , ainsi que les produits d'inertie E et F .

On donne:

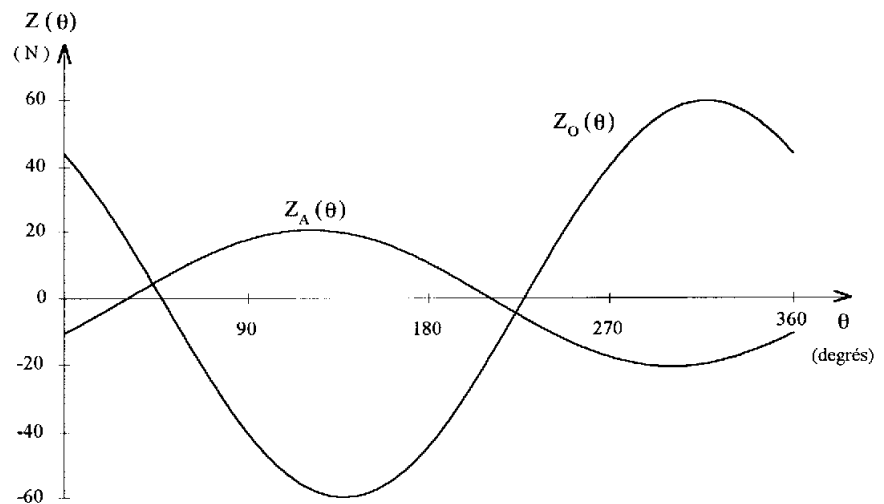
$$m_2 = 18 \text{ kg}$$

$$a = 460 \text{ mm}$$

$$b = 80 \text{ mm}$$

$$\dot{\theta} = 60 \text{ rad/s}$$

Les capteurs fournissent les courbes ci-contre et les valeurs ci-dessous:



θ en degrés	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
$Z_O(\theta)$ en N	44,05	18,00	-12,86	-40,29	-56,92	-58,29	-44,05	-18,00	12,86	40,29	56,92	58,29
$Z_A(\theta)$ en N	-10,53	-0,28	10,04	17,68	20,57	17,96	10,53	0,28	-10,04	-17,68	-20,57	-17,96

3 – En déduire les valeurs numériques de ρ , α , E et F .

La roue sera équilibrée avec deux masselottes 3 et 4 , assimilables à des points matériels M_3 et M_4 de masse m_3 et m_4 , situées de part et d'autre de la jante, de telle sorte que:

$$\overrightarrow{BM_3} = r \vec{u}_3 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BM_4} = c \vec{x}_0 + r \vec{u}_4 \quad \text{avec} \quad \beta_i = (\vec{z}_2, \vec{u}_i)$$

r étant le rayon de la jante et c son épaisseur.

4 – Ecrire les conditions d'équilibrage de la roue 2 .

5 – Déterminer les masses m_3 et m_4 des masselottes ainsi que leur position β_3 et β_4 sur la jante en fonction des caractéristiques de la roue.

On donne: $r = 190 \text{ mm}$ $c = 180 \text{ mm}$

6 – En déduire les valeurs numériques de m_3 , m_4 , β_3 et β_4 .

Equilibre de roue de voiture (corrigé)

1 – Bilan des actions mécaniques extérieures sur l'ensemble $E = \{1+2 + \text{poulie}\}$:

$$T \text{ (0} \rightarrow 1) \quad T' \text{ (0} \rightarrow 1) \quad T \text{ (courroie} \rightarrow \text{poulie)}$$

$$T \text{ (pesanteur} \rightarrow 1) = \begin{Bmatrix} -m_1 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_1} \quad T \text{ (pesanteur} \rightarrow 2) = \begin{Bmatrix} -m_2 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_2}$$

* Théorème de la résultante dynamique appliqué à E en mouvement par rapport à R_0 (galiléen) :

$$m_1 \vec{\Gamma}(G_1 \in 1/R_0) + m_2 \vec{\Gamma}(G_2 \in 2/R_0) = \vec{R} \text{ (ext} \rightarrow E) \quad (1)$$

1 étant équilibré en rotation, G_1 appartient à l'axe $(O, \vec{x}_0)$ et est donc fixe dans $R_0 \Rightarrow \vec{\Gamma}(G_1 \in 1/R_0) = \vec{0}$

$$\vec{OG}_2 = (b+h) \vec{x}_0 + \rho \vec{z}_2 \Rightarrow \vec{V}(G_2 \in 2/R_0) = -\rho \dot{\theta} \vec{y}_2 \text{ (car } \alpha = \text{Cte)} \Rightarrow \vec{\Gamma}(G_2 \in 2/R_0) = -\rho \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 \text{ (car } \dot{\theta} = \text{Cte)}$$

(1) en projection sur R_0 :

$$X_O = 0$$

$$Y_O + Y_A - (m_1 + m_2)g - T = m_2 \rho \dot{\theta}^2 \sin(\alpha + \theta)$$

$$Z_O + Z_A = -m_2 \rho \dot{\theta}^2 \cos(\alpha + \theta)$$

* Théorème du moment dynamique en O appliqué à E en mouvement par rapport à R_0 (galiléen) :

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_O(1/R_0) + \vec{\delta}_O(2/R_0) &= \vec{OA} \wedge (Y_A \vec{y}_0 + Z_A \vec{z}_0) + C_m \vec{x}_0 + \vec{OG}_1 \wedge (-T \vec{y}_0 - m_1 g \vec{y}_0) + \vec{OG}_2 \wedge (-m_2 g \vec{y}_0) \\ &= -a \vec{x}_0 \wedge (Y_A \vec{y}_0 + Z_A \vec{z}_0) + C_m \vec{x}_0 - d \vec{x}_0 \wedge (-T \vec{y}_0 - m_1 g \vec{y}_0) + [(b+h) \vec{x}_0 + \rho \vec{z}_2] \wedge (-m_2 g \vec{y}_0) \\ &= [-a Y_A + d T + m_1 d g - (b+h) m_2 g] \vec{z}_0 + a Z_A \vec{y}_0 + [C_m + \rho m_2 g \cos(\theta + \alpha)] \vec{x}_0 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\vec{\delta}_O(1/R_0) = \left[\frac{d\vec{\delta}_O(1/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \text{ et } \vec{\sigma}_O(1/R_0) = \mathcal{J}_O(1) \cdot \vec{\Omega}(1/R_0) \text{ car O fixe dans } R_0 \text{ avec } \vec{\Omega}(1/R_0) = \dot{\theta} \vec{x}_0 \text{ car } \alpha = \text{Cte}$$

$$1, \text{ en rotation / axe } (O, \vec{x}_0), \text{ étant équilibré dynamiquement, } \mathcal{J}_O(1) = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{R_0} \Rightarrow \vec{\sigma}_O(1/R_0) = \dot{\theta} I_1 \vec{x}_0$$

$$d'où \vec{\delta}_O(1/R_0) = I_1 \ddot{\theta} \vec{x}_0 = \vec{0} \text{ car } \dot{\theta} = \text{Cte}$$

$$\vec{\delta}_O(2/R_0) = \vec{\delta}_B(2/R_0) + m_2 \vec{OB} \wedge \vec{\Gamma}(G_2 \in 2/R_0) = \left[\frac{d\vec{\delta}_B(2/R_0)}{dt} \right]_{R_0} + m_2 b \vec{x}_0 \wedge (-\rho \dot{\theta}^2 \vec{z}_2) \text{ car B fixe dans } R_0$$

$$\vec{\sigma}_B(2/R_0) = \mathcal{J}_B(2) \cdot \vec{\Omega}(2/R_0) \text{ car B fixe dans } R_0 \Rightarrow \vec{\sigma}_B(2/R_0) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{R_2} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2} = \dot{\theta} (A \vec{x}_0 - F \vec{y}_2 - E \vec{z}_2)$$

$$\vec{\delta}_B(2/R_0) = \dot{\theta}^2 (-F \vec{z}_2 + E \vec{y}_2) \Rightarrow \vec{\delta}_O(2/R_0) = \dot{\theta}^2 [-F \vec{z}_2 + (E + m_2 \rho b) \vec{y}_2]$$

(2) en projection sur R_0 :

$$m_2 g \rho \cos(\alpha + \theta) + C_m = 0$$

$$a Z_A = \dot{\theta}^2 [F \sin(\alpha + \theta) + (E + m_2 \rho b) \cos(\alpha + \theta)]$$

$$-a Y_A - m_2 g (b+h) + m_1 g d + T d = \dot{\theta}^2 [-F \cos(\alpha + \theta) + (E + m_2 \rho b) \sin(\alpha + \theta)]$$

$$Z_A = \frac{\dot{\theta}^2}{a} [F \sin(\alpha + \theta) + (E + m_2 \rho b) \cos(\alpha + \theta)]$$

$$Z_O = -\frac{\dot{\theta}^2}{a} [F \sin(\alpha + \theta) + \{E + m_2 \rho(a + b)\} \cos(\alpha + \theta)]$$

$$Y_A = \frac{\dot{\theta}^2}{a} [F \cos(\alpha + \theta) - (E + m_2 \rho b) \sin(\alpha + \theta)] + \frac{d}{a} (T + m_1 g) - \frac{m_2 g}{a} (b + h)$$

$$Y_O = -\frac{\dot{\theta}^2}{a} [F \cos(\alpha + \theta) - \{E + m_2 \rho(a + b)\} \sin(\alpha + \theta)] + \frac{a-d}{a} (T + m_1 g) + \frac{m_2 g}{a} (a + b + h)$$

$$X_O = 0$$

2 – pour $\theta = 0$: $Z_A(0) = \frac{\dot{\theta}^2}{a} [F \sin \alpha + (E + m_2 \rho b) \cos \alpha]$ (1)

$$Z_O(0) = -\frac{\dot{\theta}^2}{a} [F \sin \alpha + \{E + m_2 \rho(a + b)\} \cos \alpha]$$
 (2)

$$\Rightarrow Z_A(0) + Z_O(0) = -m_2 \rho \dot{\theta}^2 \cos \alpha$$
 (3)

pour $\theta = \pi/2$: $Z_A(\pi/2) = \frac{\dot{\theta}^2}{a} [F \cos \alpha - (E + m_2 \rho b) \sin \alpha]$ (4)

$$Z_O(\pi/2) = -\frac{\dot{\theta}^2}{a} [F \cos \alpha - \{E + m_2 \rho(a + b)\} \sin \alpha]$$
 (5)

$$\Rightarrow Z_A(\pi/2) + Z_O(\pi/2) = m_2 \rho \dot{\theta}^2 \sin \alpha$$
 (6)

$$(3)^2 + (6)^2 \Rightarrow \rho = \frac{1}{m_2 \dot{\theta}^2} \sqrt{(Z_A(0) + Z_O(0))^2 + (Z_A(\pi/2) + Z_O(\pi/2))^2}$$

$$(6) / (3) \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{Z_A(\pi/2) + Z_O(\pi/2)}{Z_A(0) + Z_O(0)}$$

$$(1) \sin \alpha + (4) \cos \alpha \Rightarrow F = \frac{a}{\dot{\theta}^2} [Z_A(0) \sin \alpha + Z_A(\pi/2) \cos \alpha]$$

$$(1) \cos \alpha - (4) \sin \alpha \Rightarrow E = \frac{a}{\dot{\theta}^2} [Z_A(0) \cos \alpha - Z_A(\pi/2) \sin \alpha] - m_2 \rho b$$

3 – Application numérique :

$$\rho = 0,62 \text{ mm}$$

α est défini à π près avec $\cos \alpha < 0$ (de (3)) $\Rightarrow \alpha = 214^\circ$

$$F = -1,1 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2 \quad E = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

4 – Conditions d'équilibrage de l'ensemble {2, 3, 4} de centre de gravité G :

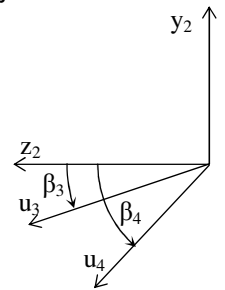
Equilibrage statique : G appartient à l'axe de rotation (B, $\vec{x}_0$)

$$(m_2 + m_3 + m_4) \vec{BG} = m_2 \vec{BG}_2 + m_3 \vec{BM}_3 + m_4 \vec{BM}_4$$

G appartient à l'axe de rotation (B, $\vec{x}_0$) $\Rightarrow$ les projections de $\vec{BG}$ sur $\vec{z}_2$ et $\vec{y}_2$ sont nulles

sur $\vec{y}_2$: $0 = -m_3 r \sin \beta_3 - m_4 r \sin \beta_4$ (7)

sur $\vec{z}_2$: $0 = m_2 \rho + m_3 r \cos \beta_3 + m_4 r \cos \beta_4$ (8)



Equilibrage dynamique : l'axe de rotation est principal d'inertie pour l'ensemble {2, 3, 4} donc les produits d'inertie E' et F' sont nuls

La matrice d'inertie de **2** est donnée en B sur le repère R_2 : il faut donc calculer les produits d'inertie I_{Bxy} et I_{Bxz} des masses ponctuelles **3** et **4** dans le repère R_2

$$\vec{BM}_3 = -r \sin \beta_3 \vec{y}_2 + r \cos \beta_3 \vec{z}_2 \quad \text{et} \quad \vec{BM}_4 = c \vec{x}_0 - r \sin \beta_4 \vec{y}_2 + r \cos \beta_4 \vec{z}_2$$

$$E' = 0 = E + m_4 c r \cos \beta_4 \quad (9) \quad \text{et} \quad F' = 0 = F - m_4 c r \sin \beta_4 \quad (10)$$

5 – Détermination des masselottes :

de (9) et (10) : $m_4 = \frac{1}{c r} \sqrt{E^2 + F^2}$ et $\tan \beta_4 = -\frac{F}{E}$

de (7) et (8) : $m_3 = \frac{1}{c r} \sqrt{F^2 + (E - m_2 \rho c)^2}$ et $\tan \beta_3 = \frac{F}{E - m_2 \rho c}$

6 – A.N. : $m_4 = 54 \text{ g}$ $\beta_4 = -37^\circ$ $m_3 = 36 \text{ g}$ $\beta_3 = 64^\circ$