

EXERCICE 3. Calcul de dynamique sans PFD (formulaire de SI autorisé)

La vitesse de rotation du régulateur, liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse. Ce régulateur est représenté sur la figure 1 et modélisé sur la figure 2.

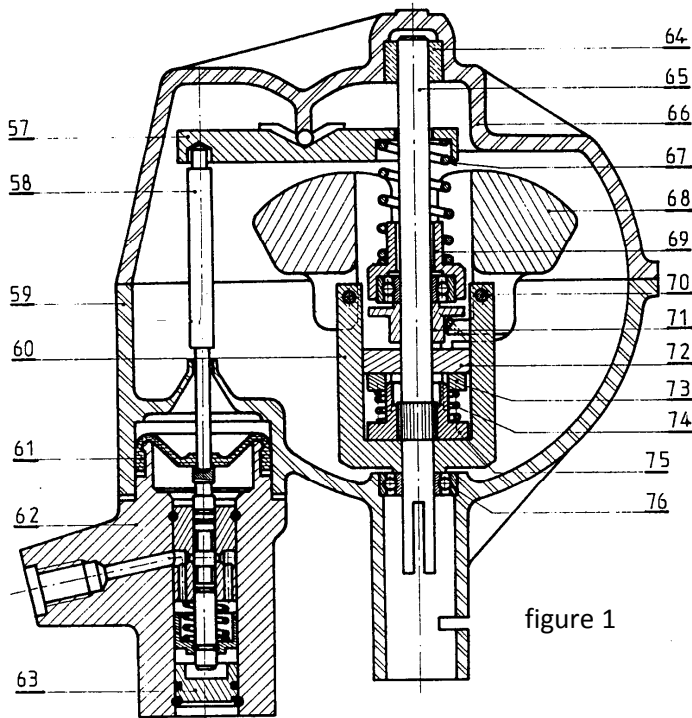


figure 1

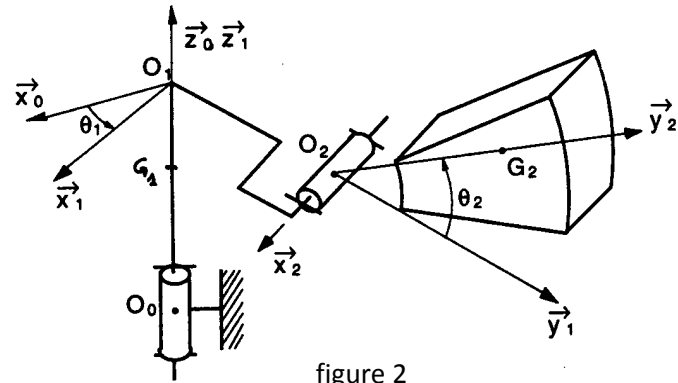


figure 2

Le repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au bâti 59.

Le repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié à l'arbre 65 = S_1 .

Le repère $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est lié à la masselotte 68 = S_2

Données :

$$\vec{z}_0 = \vec{z}_1 \text{ et } (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_1 \text{ avec } \dot{\theta}_1 = \text{Cte}$$

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_2 \text{ et } (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta_2 \text{ avec } \dot{\theta}_2 = \text{Cte}$$

$$S_1 : \text{masse } m_1, \text{ centre de gravité } G_1, \text{ matrice d'inertie } \mathbb{I}(O_1, S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

$$S_2 : \text{masse } m_2, \text{ centre de gravité } G_2, \text{ matrice d'inertie } \mathbb{I}(G_2, S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

$$\overrightarrow{O_0 G_1} = l_1 \vec{z}_0$$

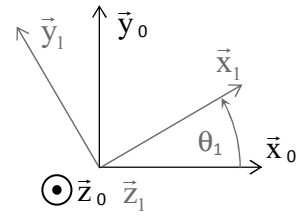
$$\overrightarrow{O_0 O_2} = d_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1$$

$$\overrightarrow{O_2 G_2} = l_2 \vec{y}_2$$

Q1. Justifier l'allure des matrices d'inertie de S_1 et S_2 .

Q2. Déterminer le torseur dynamique de S_1 en O_1 dans son mouvement par rapport à R_0 .

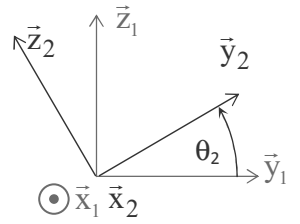
Q3. Déterminer le moment dynamique de S_2 en O_2 dans son mouvement par rapport à R_0 en projection sur $\vec{x}_2$.



Q1 – Allure des matrices d’inertie :

$(O_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est plan de symétrie pour S_1 donc $(O_1, \vec{x}_1)$ est principal d’inertie.

$(G_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est plan de symétrie pour S_2 donc $(G_2, \vec{x}_2)$ est principal d’inertie.



$$\mathbf{Q2} - D_{(S_1/R_0)} = \left. \begin{matrix} m_1 \vec{\Gamma}(G_1 \in S_1 / R_0) \\ \vec{\delta}_{O_1}(S_1 / R_0) \end{matrix} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \left[\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(S_1 / R_0)}{dt} \right]_{R_0} \end{matrix} \right\} \text{ car } G_1 \text{ et } O_1 \text{ fixes dans } R_0$$

$$\vec{\sigma}_{O_1}(S_1 / R_0) = \mathbb{I}(O_1, S_1) \cdot \vec{\Omega}(S_1 / R_0) \quad \text{car } O_1 \text{ fixe dans } R_0 \text{ avec } \vec{\Omega}(S_1 / R_0) = \dot{\theta}_1 \vec{z}_0$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} = (-D_1 \vec{y}_1 + C_1 \vec{z}_1) \dot{\theta}_1$$

$$\text{d'où, avec } \left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_{R_0} = -\dot{\theta}_1 \vec{x}_1 \quad \text{et} \quad \vec{z}_1 \text{ fixe dans } R_0, \quad \boxed{D_{(S_1/R_0)} = \left. \begin{matrix} \vec{0} \\ D_1 \dot{\theta}_1^2 \vec{x}_1 \end{matrix} \right\}_{O_1}}$$

$$\mathbf{Q3} - \vec{\delta}_{O_2}(S_2 / R_0) \cdot \vec{x}_2 = \vec{\delta}_{G_2}(S_2 / R_0) \cdot \vec{x}_2 + [\overrightarrow{O_2 G_2} \wedge m_2 \vec{\Gamma}(G_2 \in S_2 / R_0)] \cdot \vec{x}_2 \quad \text{car on donne } \mathbb{I}(G_2, S_2)$$

$$\text{avec } \vec{\delta}_{G_2}(S_2 / R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_{G_2}(S_2 / R_0)}{dt} \right]_{R_0} \quad \text{car } G_2 \text{ est le centre de gravité de } S_2$$

$$\text{soit } \vec{\delta}_{O_2}(S_2 / R_0) \cdot \vec{x}_2 = \frac{d[\vec{\sigma}_{G_2}(S_2 / R_0) \cdot \vec{x}_2]}{dt} - \vec{\sigma}_{G_2}(S_2 / R_0) \cdot \left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{R_0} + \underbrace{[\vec{x}_2 \wedge \overrightarrow{O_2 G_2}] \cdot m_2 \left[\frac{d\vec{V}(G_2 \in S_2 / R_0)}{dt} \right]_{R_0}}_{\vec{X}}$$

$\vec{X}$

$$\vec{\sigma}_{G_2}(S_2/R_0) = \mathbf{I}(G_2, S_2) \cdot \vec{\Omega}(S_2/R_0) \text{ avec } \vec{\Omega}(S_2/R_0) = \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 + \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 = \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 + \dot{\theta}_1 (\sin\theta_2 \vec{y}_2 + \cos\theta_2 \vec{z}_2)$$

$$\vec{\sigma}_{G_2}(S_2/R_0) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \sin\theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

$$\text{d'où } \vec{\sigma}_{G_2}(S_2/R_0) = A_2 \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 + \dot{\theta}_1 (B_2 \sin\theta_2 - D_2 \cos\theta_2) \vec{y}_2 + \dot{\theta}_1 (-D_2 \sin\theta_2 + C_2 \cos\theta_2) \vec{z}_2$$

$$\text{donc } \frac{d[\vec{\sigma}_{G_2}(S_2/R_0) \cdot \vec{x}_2]}{dt} = 0$$

$$\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{R_0} = \dot{\theta}_1 \vec{y}_1$$

$$\text{d'où } -\vec{\sigma}_{G_2}(S_2/R_0) \cdot \left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{R_0} = [(C_2 - B_2) \sin\theta_2 \cos\theta_2 + D_2 (\cos^2\theta_2 - \sin^2\theta_2)] \dot{\theta}_1^2$$

$$\vec{V}(G_2 \in S_2/R_0) = \left[\frac{d(\vec{O_0 G_2})}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d(d_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1 + l_2 \vec{y}_2)}{dt} \right]_{R_0} = -\dot{\theta}_1 L_1 \vec{x}_1 + l_2 \left[\frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_{R_0}$$

$$\text{avec } \left[\frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_{R_0} = \cancel{\left[\frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_{R_2}} + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{y}_2 = (\dot{\theta}_2 \vec{x}_2 + \dot{\theta}_1 \vec{z}_0) \wedge \vec{y}_2 = \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \vec{x}_1$$

$$\text{d'où } \vec{V}(G_2 \in S_2/R_0) = -(L_1 + l_2 \cos\theta_2) \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2$$

$$\vec{X} = [\vec{x}_2 \wedge l_2 \vec{y}_2] \cdot m_2 \left[\frac{d\vec{V}(G_2 \in S_2/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = m_2 l_2 \vec{z}_2 \cdot \left[\frac{d\vec{V}(G_2 \in S_2/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$$

$$\vec{X} = m_2 l_2 \left[\cancel{\frac{d\vec{V}(G_2 \in S_2/R_0) \cdot \vec{z}_2}{dt}} - \vec{V}(G_2 \in S_2/R_0) \cdot \left[\frac{d\vec{z}_2}{dt} \right]_{R_0} \right]$$

$$\left[\frac{d\vec{z}_2}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{z}_2}{dt} \right]_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{z}_2 = (\dot{\theta}_2 \vec{x}_2 + \dot{\theta}_1 \vec{z}_0) \wedge \vec{z}_2 = -\dot{\theta}_2 \vec{y}_2 + \dot{\theta}_1 \sin\theta_2 \vec{x}_1$$

$$\vec{X} = -m_2 l_2 [-(L_1 + l_2 \cos\theta_2) \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2] \cdot [-\dot{\theta}_2 \vec{y}_2 + \dot{\theta}_1 \sin\theta_2 \vec{x}_1] = l_2 m_2 (L_1 + l_2 \cos\theta_2) \dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2$$

$$\boxed{\vec{\delta}_{O_2}(S_2 / R_0) \cdot \vec{x}_2 = \dot{\theta}_1^2 [(-B_2 + C_2 + m_2 l_2^2) \sin\theta_2 \cos\theta_2 - D_2 (\sin^2\theta_2 - \cos^2\theta_2) + m_2 l_2 L_1 \sin\theta_2]}$$

Remarque : $\vec{\Gamma}(G_2 \in S_2 / R_0) = l_2 \sin\theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 - (L_1 + l_2 \cos\theta_2) \dot{\theta}_1^2 \vec{y}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 (-\dot{\theta}_2 \vec{y}_2 + \dot{\theta}_1 \sin\theta_2 \vec{x}_1)$

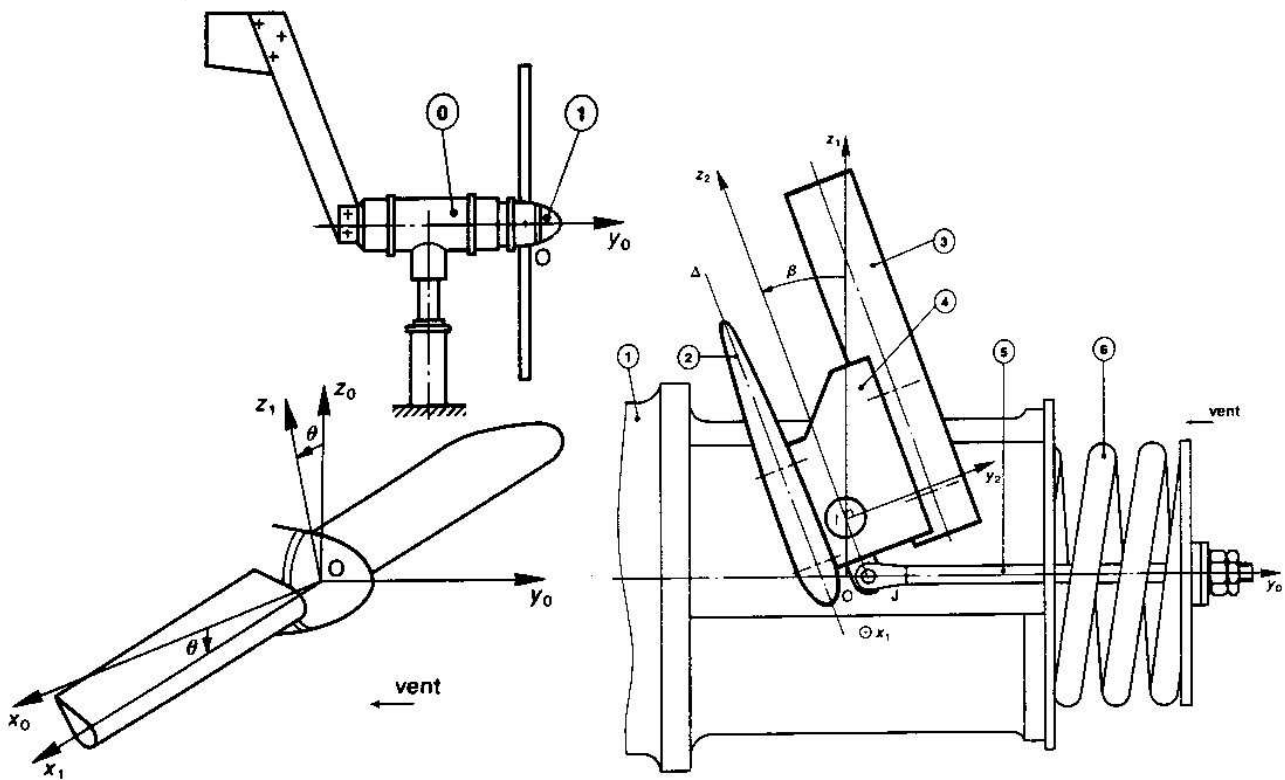
soit $\vec{\Gamma}(G_2 \in S_2 / R_0) = 2 l_2 \sin\theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 - (L_1 + l_2 \cos\theta_2) \dot{\theta}_1^2 \vec{y}_1 - l_2 \dot{\theta}_2^2 \vec{y}_2$

EXERCICE 5. PFD 3D (formulaire de SI autorisé)

L'aérogénérateur présenté ci-dessous est utilisé pour répondre aux besoins en énergie électrique d'installations isolées : milieux désertiques, milieux maritimes. Son rôle est de transformer l'énergie éolienne en énergie électrique. Celle-ci, utilisée directement ou stockée dans des batteries d'accumulation.

L'aérogénérateur est constitué :

- d'une hélice bipale d'axe horizontal ;
- d'un dispositif d'orientation (safran et liaison pivot d'axe vertical) ;
- d'un générateur électrique.



Etudions l'aérogénérateur par vent stable :

Soit $R_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère galiléen lié au corps **0** de l'aérogénérateur tel que l'axe $(O, \vec{y}_0)$ soit confondu avec l'axe de l'hélice.

Le vent souffle à la vitesse $\vec{V} = -V\vec{y}_0$ (V : constante positive).

L'arbre **1** de l'hélice est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{y}_0)$ avec **0**. Soit $R_1 (O, \vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)$ un repère lié à **1** tel que l'axe $(O, \vec{x}_1)$ soit parallèle à l'axe des pales. On pose $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ avec $\theta' = \text{Cste} = \omega$ ($\omega > 0$).

Le fonctionnement optimal de l'aérogénérateur est obtenu avec les conditions suivantes :

- $V = 7 \text{ m/s}$
- $\omega = 120 \text{ rad/s}$

Un système de régulation modifiant l'angle de calage β permet de rester au voisinage de ce point de fonctionnement. Il existe un système de régulation par pale. Pour la pale **2**, celui-ci est constitué par un ensemble **S** de pièces cinématiquement équivalente : {**2** : pale ; **3** : barre de régulation ; **4** : support} et par un ressort **6** pris entre l'arbre **1** et la tige de rappel **5**.

Cet ensemble **S** est en liaison pivot sans frottement d'axe $(I, \vec{x}_1)$ avec l'arbre **1**, telle que $\overrightarrow{OI} = d\vec{z}_1$ ($d > 0$).

Soit $R_2 (I, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié à **S**, tel que l'axe $(I, \vec{z}_2)$ soit parallèle à la droite de référence Δ de la pale. On pose $\beta = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ avec $\beta = \text{Cste} = 20^\circ$.

La tige **5** est en liaison linéaire annulaire sans frottement d'axe $(J, \vec{x}_1)$ avec **S**, telle que $\overrightarrow{IJ} = -a\vec{z}_2$ ($a > 0$). Le point J est sur l'axe $(O, \vec{y}_0)$ lorsque $\beta = 20^\circ$.

S a pour masse M et la position de son centre d'inertie G est définie par : $\overrightarrow{IG} = \lambda\vec{x}_1 + \mu\vec{z}_2$. La matrice d'inertie de **S** au

point G , dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est la suivante : $\overline{\overline{I}}(G, S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$.

L'action mécanique du vent sur la pale **2** est représentée par le torseur : $\{T_{(\text{vent} \rightarrow 2)}\}_H = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ 0 \end{Bmatrix}$ avec $\vec{R} = -R\vec{y}_2$, $R > 0$

(seule la composante de $\vec{R}$ suivant $\vec{y}_2$ entraîne la pale en rotation) et $\overrightarrow{IH} = p\vec{x}_1 + q\vec{y}_2 + r\vec{z}_2$.

L'action mécanique de **5** sur **S** est représentée par la force $Y\vec{y}_0$ appliquée en J. Le but de cette étude est de déterminer Y . L'action mécanique de la pesanteur est négligée.

Q1. Déterminer le moment cinétique, au point G de **S** dans son mouvement par rapport à R_0 .

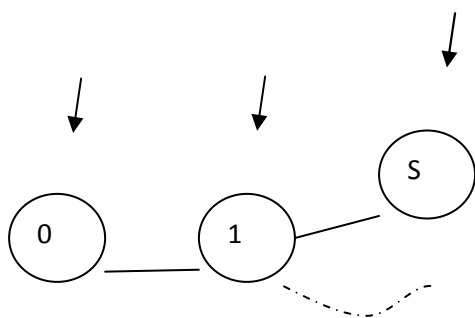
Q2. Déterminer la projection sur $\vec{x}_1$ du moment dynamique, au point I , de **S** dans son mouvement par rapport à R_0 .

Q3. Ecrire, en projection sur $\vec{x}_1$, le théorème du moment dynamique, au point I appliqué à **S** dans son mouvement par rapport à R_0 .

Q4. En déduire l'action mécanique exercée par la tige **5** sur l'ensemble **S**.

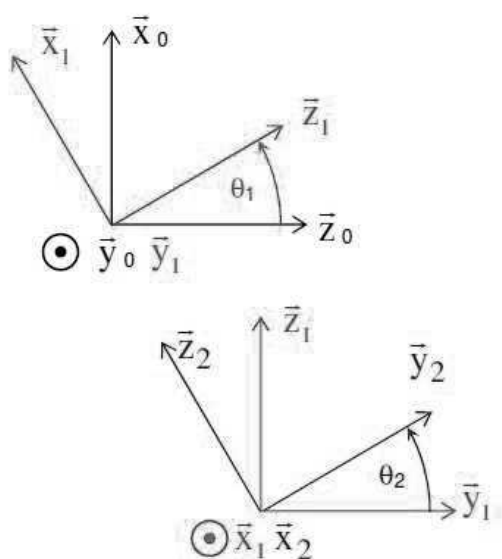
A.N. : $\omega = 120 \text{ rad/s}$; $\beta = 20^\circ$; $d = 14 \text{ mm}$; $\lambda = 159 \text{ mm}$; $\mu = 13 \text{ mm}$; $M = 850 \text{ g}$; $A = 700.10^{-6} \text{ kg.m}^2$; $B = 30650.10^{-6} \text{ kg.m}^2$; $C = 30200.10^{-6} \text{ kg.m}^2$; $D = 180.10^{-6} \text{ kg.m}^2$; $E = -1920.10^{-6} \text{ kg.m}^2$; $F = -1150.10^{-6} \text{ kg.m}^2$; $R = 100 \text{ N}$; $p = 400 \text{ mm}$; $q = -8,5 \text{ mm}$; $r = -6 \text{ mm}$.

1. Pesanteur



Ressort

2.



3.

$$\vec{\Omega}_{S/R_0} = \vec{\Omega}_{R_2/R_0} = \dot{\theta} \vec{y}_1 + \dot{\beta} \vec{x}_2 = \dot{\theta} \vec{y}_1 \text{ car } \beta = cte$$

$$\vec{\sigma}(G, S/R_0) = \dot{\theta} \begin{pmatrix} -F \cos \beta + E \sin \beta \\ B \cos \beta + D \sin \beta \\ -D \cos \beta - C \sin \beta \end{pmatrix}_{R_2}$$

4.

$$\vec{\delta}(I, S/R_0) \cdot \vec{x}_1 = \vec{\delta}(G, S/R_0) \cdot \vec{x}_1 + \left(\overline{IG} \wedge M \vec{\Gamma}(G, S/R_0) \right) \cdot \vec{x}_1$$

$$\vec{\delta}(G, S / R_0) . \vec{x}_1 = \left[\frac{d}{dt} (\vec{\sigma}(G, S / R_0)) \right]_{R_0} . \vec{x}_1 = \frac{d}{dt} (\vec{\sigma}(G, S / R_0) . \vec{x}_1) - \left[\frac{d}{dt} (\vec{x}_1) \right]_{R_0} . \vec{\sigma}(G, S / R_0)$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{\sigma}(G, S / R_0) . \vec{x}_1) = \vec{0} \text{ car } \beta = cte$$

$$\left[\frac{d}{dt} (\vec{x}_1) \right]_{R_0} = -\dot{\theta} \vec{z}_1$$

$$\left[\frac{d}{dt} (\vec{x}_1) \right]_{R_0} . \vec{\sigma}(G, S / R_0) = \dot{\theta} \begin{pmatrix} -F \cos \beta + E \sin \beta \\ B \cos \beta + D \sin \beta \\ -D \cos \beta - C \sin \beta \end{pmatrix}_{R_2} . \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \sin \beta \\ \dot{\theta} \cos \beta \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$\left[\frac{d}{dt} (\vec{x}_1) \right]_{R_0} . \vec{\sigma}(G, S / R_0) = \dot{\theta}^2 (B \cos \beta + D \sin \beta) \sin \beta + \dot{\theta}^2 (-D \cos \beta - C \sin \beta) \cos \beta$$

$$\overrightarrow{IG} = \lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{z}_2 \quad \overrightarrow{OI} = d \vec{z}_1$$

$$\vec{\delta}(I, S / R_0) . \vec{x}_1 = \vec{\delta}(G, S / R_0) . \vec{x}_1 + (\overrightarrow{IG} \wedge M \vec{\Gamma}(G, S / R_0)) . \vec{x}_1$$

$$(\overrightarrow{IG} \wedge M \vec{\Gamma}(G, S / R_0)) . \vec{x}_1 = (\vec{x}_1 \wedge \overrightarrow{IG}) . M \vec{\Gamma}(G, S / R_0) = (M \vec{\Gamma}(G, S / R_0) \wedge \vec{x}_1) . \overrightarrow{IG}$$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IG} = d \vec{z}_1 + \lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{z}_2$$

$$\vec{V}(G, S / R_0) = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OG} \right]_{R_0} = d \dot{\theta} \vec{x}_1 - \lambda \dot{\theta} \vec{z}_1 + \mu \dot{\theta} \cos \beta \vec{x}_1$$

$$\vec{\Gamma}(G, S / R_0) = \left[\frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OG} \right]_{R_0} = -d \dot{\theta}^2 \vec{z}_1 - \lambda \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 - \mu \dot{\theta}^2 \cos \beta \vec{z}_1$$

$$\left(M \vec{\Gamma}(G, S / R_0) \wedge \vec{x}_1 \right) . \vec{IG} = M \left(-d \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 - \mu \dot{\theta}^2 \cos \beta \vec{y}_1 \right) . (\lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{z}_2) = M \dot{\theta}^2 (\mu^2 \sin \beta \cos \beta + \mu d \sin \beta)$$

$$\vec{\delta}(I, S / R_0) . \vec{x}_1 =$$

$$M \dot{\theta}^2 (\mu^2 \sin \beta \cos \beta + \mu d \sin \beta) + \dot{\theta}^2 (B \cos \beta + D \sin \beta) \sin \beta + \dot{\theta}^2 (-D \cos \beta - C \sin \beta) \cos \beta$$

5. et 6. Bilan des actions mécaniques sur S

$$\left\{ T_{pes \rightarrow S} \right\} = \left\{ \begin{matrix} M \vec{g} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} M \vec{g} \\ \overrightarrow{M_I}(pes \rightarrow S) \end{matrix} \right\}_I \text{ avec } \overrightarrow{M_I}(pes \rightarrow S) . \vec{x}_1 = \mu M g (\sin \beta \cos \theta)$$

$$\left\{ T_{res \rightarrow S} \right\} = \left\{ \begin{matrix} Y \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_J \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} Y \vec{y}_0 \\ a Y \cos \beta \vec{x}_2 \end{matrix} \right\}_I \quad \left\{ T_{air \rightarrow S} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -R \vec{y}_2 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_H \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} -R \vec{y}_2 \\ r R \vec{x}_2 - p R \vec{z}_2 \end{matrix} \right\}_I$$

TMD en I en projection sur $\vec{x}_1$

$$\vec{\delta}(I, S / R_0) . \vec{x}_1 = \overrightarrow{M_I}(\vec{S} \rightarrow S) . \vec{x}_1$$

$$M \dot{\theta}^2 (\mu^2 \sin \beta \cos \beta + \mu d \sin \beta) + \dot{\theta}^2 (B \cos \beta + D \sin \beta) \sin \beta + \dot{\theta}^2 (-D \cos \beta - C \sin \beta) \cos \beta =$$

$$\mu M g (\sin \beta \cos \theta) + a Y \cos \beta + r R$$

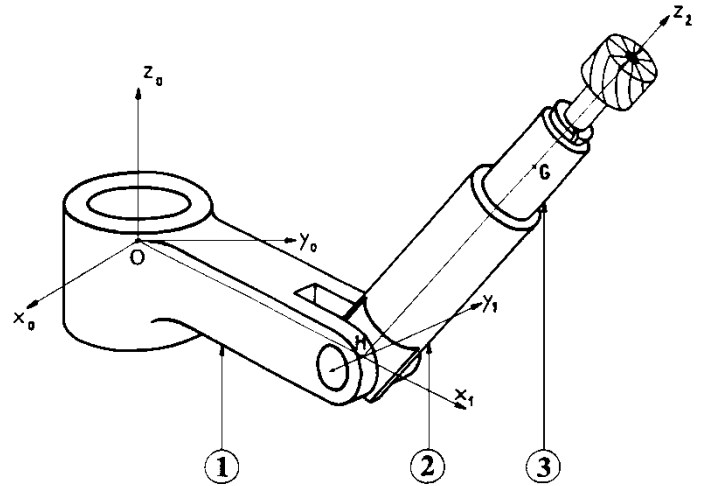
$$\text{AN : } Y \approx 150 \text{ N}$$

EXERCICE 6. Choix des équations et PFD 3D (formulaire de SI autorisé)

La croquis ci-contre, représente le dispositif porte-outil d'une machine d'affûtage formée de trois solides : 1, 2, 3.

Le repère terrestre $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti 0 de la machine, est supposé galiléen. L'axe $(O, \vec{z}_0)$ est vertical ascendant et le champ de gravité est défini par : $\vec{g} = -g \vec{z}_0$

Les caractéristiques d'inertie données ci-après tiennent compte des actionneurs (moteurs, transmissions,...) rigidement liés aux différents solides.



Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

1 : Support tournant.

- Repère associé : $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$
- Mouvement 1/0 : Rotation d'axe $(O, \vec{z}_0)$ commandée par le moteur M_{01} .
- Orientation par rapport à 0 : $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \psi(t)$
- Action motrice $0 \rightarrow 1$: $\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{0 \rightarrow 1} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_O$
- Opérateur d'inertie : $I_{O,1} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0}$

2 : Bras pivotant.

- Repère associé : $R_2(H; \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$
- Mouvement 2/1 : Rotation d'axe $(H, \vec{y}_1)$ commandée par le moteur M_{12}
- Orientation par rapport à 1 : $(\vec{z}_0, \vec{z}_2) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \theta(t)$
- Action motrice $1 \rightarrow 2$: $\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{1 \rightarrow 2} \vec{y}_1 \end{array} \right\}_H$
- Masse : m_2
- Centre d'inertie : H tel que : $\overline{OH} = a \vec{x}_1$
- Opérateur d'inertie : $I_{H,2} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2}$

3 : Porte-outil et son outil.

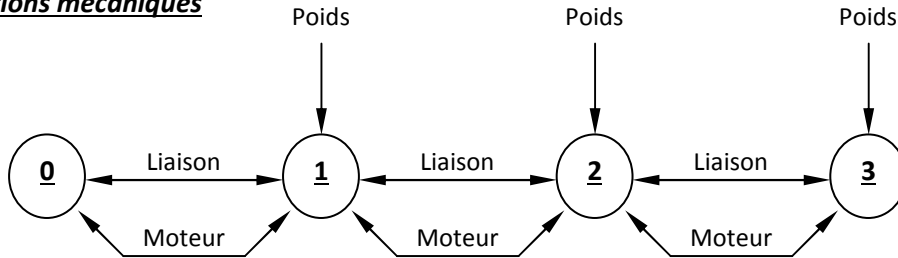
- Repère associé : $R_3(G; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2)$
- Mouvements 3/2 : Rotation d'axe $(H, \vec{z}_2)$ et translation de direction $\vec{z}_2$ commandées par l'actionneur M_{23}
- Orientation par rapport à $\underline{2}$: $(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{y}_1, \vec{y}_3) = \phi(t)$
- Action motrice $2 \rightarrow 3$: $\left\{ \begin{array}{l} R_{2 \rightarrow 3} \vec{z}_2 \\ C_{2 \rightarrow 3} \vec{z}_2 \end{array} \right\}_H$
- Masse : m_3
- Centre d'inertie : G tel que : $\overline{HG} = \rho(t) \vec{z}_2$
- Opérateur d'inertie : $I_{G,3} = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2}$

Les actions d'affûtage (actions de la pièce sur l'outil) très faibles dans la réalité seront supposées nulles.

Q1. Proposer une démarche pour déterminer les caractéristiques des actionneurs c'est à dire : $C_{0/1}$, $C_{1/2}$, $C_{2/3}$, $R_{2/3}$.

Q2. Déterminer les caractéristiques des actionneurs : $C_{0/1}$, $C_{1/2}$, $C_{2/3}$, $R_{2/3}$.

Graphe des actions mécaniques



La stratégie est classique : le P.F.D. sera appliqué successivement aux systèmes matériels suivants :

1. Solide 3

- Théorème de la résultante dynamique en projection sur la direction de la liaison pivot-glissant en vue de déterminer $R_{2/3}$:

$$\sum \vec{F}_{Ext/3} \cdot \vec{z}_2 = m_3 \vec{A}_{G \in 3/0} \cdot \vec{z}_2$$

- Théorème du moment dynamique en projection sur l'axe de la liaison pivot-glissant pour déterminer $C_{2/3}$:

$$\sum \vec{M}_{G,Ext/3} \cdot \vec{z}_2 = \vec{\delta}_{G,3/0} \cdot \vec{z}_2$$

2. Ensemble {2+3} (pour rendre intérieures les actions inconnues de la liaison 2/3)

- Théorème du moment dynamique en projection sur l'axe de la liaison pivot pour déterminer $C_{1/2}$:

$$\sum \vec{M}_{H,Ext/\{2+3\}} \cdot \vec{y}_1 = \vec{\delta}_{H,\{2+3\}/0} \cdot \vec{y}_1$$

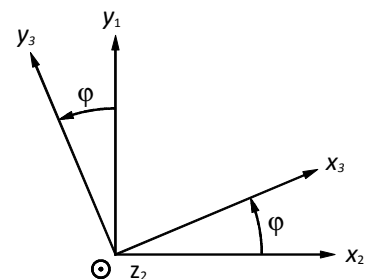
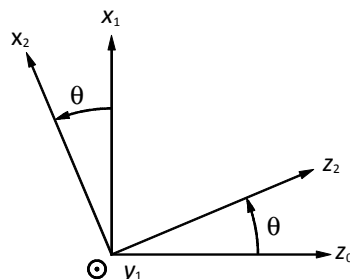
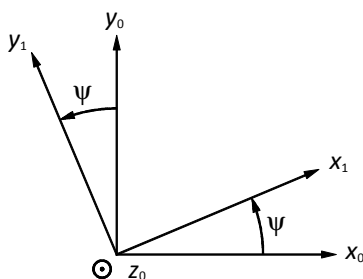
3. Ensemble {1+2+3} (pour rendre intérieures les actions des liaisons 2/3 et 1/2)

- Théorème du moment dynamique en projection sur l'axe de la liaison pivot pour déterminer $C_{0/1}$:

$$\sum \vec{M}_{O,Ext/\{1+2+3\}} \cdot \vec{z}_0 = \vec{\delta}_{O,\{1+2+3\}/0} \cdot \vec{z}_0$$

Paramétrage

- Changements de bases



$$b_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow{Rot.(\psi, \vec{z}_0)} b_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0) \xrightarrow{Rot.(\theta, \vec{y}_1)} b_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2) \xrightarrow{Rot.(\varphi, \vec{z}_2)} b_3 = (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2)$$

- Changements d'origines

$$O \xrightarrow{\overline{OH} = a \vec{x}_1} H \xrightarrow{\overline{HG} = \rho(t) \vec{z}_2} G$$

Cinématique

Les torseurs cinématiques des différents mouvements sont les suivants :

Solide 1 :

$$V_{1/0} \equiv \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \vec{z}_0 \\ a \dot{\psi} \vec{y}_1 \end{Bmatrix}_H$$

Solide 2 :

$$V_{2/1} \equiv \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_H \quad V_{2/0} \equiv \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} \vec{y}_1 \\ a \dot{\psi} \vec{y}_1 \end{Bmatrix}_H$$

Solide 3 :

$$V_{3/2} \equiv \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \vec{z}_2 \\ \dot{\rho} \vec{z}_2 \end{Bmatrix}_{\forall M \in (H, \vec{z}_2)} \quad V_{3/0} \equiv \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} \vec{y}_1 + \dot{\phi} \vec{z}_2 \\ a \dot{\psi} \vec{y}_1 + \dot{\rho} \vec{z}_2 \end{Bmatrix}_H$$

On a :

$$\vec{V}_{G \in 3/0} = \vec{V}_{H \in 3/0} + \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \overline{HG} = (a \dot{\psi} \vec{y}_1 + \dot{\rho} \vec{z}_2) + (\dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} \vec{y}_1 + \dot{\phi} \vec{z}_2) \wedge \rho \vec{z}_2$$

$$\vec{V}_{G \in 3/0} = (a + \rho \sin \theta) \dot{\psi} \vec{y}_1 + \dot{\rho} \vec{z}_2 + \rho \dot{\theta} \vec{x}_2$$

Actions mécaniques

- Actions des moteurs :

$$0 \rightarrow 1 : \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{0 \rightarrow 1} \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_O \quad ; 1 \rightarrow 2 : \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{1 \rightarrow 2} \vec{y}_1 \end{Bmatrix}_H \quad ; 2 \rightarrow 3 : \begin{Bmatrix} R_{2 \rightarrow 3} \vec{z}_2 \\ C_{2 \rightarrow 3} \vec{z}_2 \end{Bmatrix}_H$$

- Action de la pesanteur sur 2 et 3 : $P \rightarrow 2 = \begin{Bmatrix} -m_2 \ g \ \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_H$; $P \rightarrow 3 = \begin{Bmatrix} -m_3 \ g \ \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$

- Actions des liaisons :

pivot 1/0 :

$$0 \rightarrow 1 = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{0/1} \\ \vec{M}_{0,0/1} \end{Bmatrix}_O \quad (\text{avec : } \vec{M}_{0,0/1} \cdot \vec{z}_0 = 0)$$

pivot 2/1 :

$$1 \rightarrow 2 = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{1/2} \\ \vec{M}_{H,1/2} \end{array} \right\}_H \quad (\text{avec : } \vec{M}_{H,1/2} \cdot \vec{y}_1 = 0)$$

pivot-glissant 3/2 :

$$2 \rightarrow 3 = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{2/3} \\ \vec{M}_{G,2/3} \end{array} \right\}_G \quad (\text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{2/3} \cdot \vec{z}_2 = 0 \\ \vec{M}_{G,2/3} \cdot \vec{z}_2 = 0 \end{array} \right.)$$

Détermination des actionneurs

- **Détermination de $F_{2/3}$** : théorème de la résultante dynamique appliqué à **3** en projection sur $\vec{z}_2$.

On doit calculer d'une part :

$$\sum \vec{F}_{Ext/3} \cdot \vec{z}_2 = (R_{2/3} \vec{z}_2 - m_3 g \vec{z}_0 + \vec{F}_{2/3}) \cdot \vec{z}_2 = R_{2/3} - m_3 g \cos \theta$$

D'autre part :

$$\vec{A}_{G \in 3/0} \cdot \vec{z}_2 = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}_{G \in 3/0} \right]_0 \cdot \vec{z}_2 = \frac{d}{dt} (\vec{V}_{G \in 3/0} \cdot \vec{z}_2) - \vec{V}_{G \in 3/0} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{z}_2 \right]_0$$

$$\vec{A}_{G \in 3/0} \cdot \vec{z}_2 = \ddot{\rho} - (\vec{V}_{G \in 3/0}, \vec{\Omega}_{2/0}, \vec{z}_2) = \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 - \psi^2 (a + \rho \sin \theta) \sin \theta$$

donc :

$$m_3 \vec{A}_{G \in 3/0} \cdot \vec{z}_2 = m_3 (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 - \psi^2 (a + \rho \sin \theta) \sin \theta)$$

Finalement, on obtient :

$$R_{2/3} = m_3 (g \cos \theta + \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 - \psi^2 (a + \rho \sin \theta) \sin \theta)$$

- **Détermination de $C_{2/3}$** : théorème du moment dynamique appliqué au solide **3** en projection sur $\vec{z}_2$.

L'opérateur d'inertie de **3** étant donné en G, on choisit d'exprimer le moment dynamique en ce point.

On doit calculer d'une part :

$$\sum \vec{M}_{G,Ext/3} \cdot \vec{z}_2 = \vec{M}_{G,2/3} \cdot \vec{z}_2 + C_{2/3} \vec{z}_2 \cdot \vec{z}_2 = C_{2/3}$$

D'autre part :

$$\vec{\delta}_{G,3/0} \cdot \vec{z}_2 = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{G,3/0} \right]_0 \cdot \vec{z}_2 = \frac{d}{dt} (\vec{\sigma}_{G,3/0} \cdot \vec{z}_2) - \vec{\sigma}_{G,3/0} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{z}_2 \right]_0$$

Remarquons que l'opérateur d'inertie du solide 3 est le même dans la base b_3 ou b_2 . Nous choisirons donc la base b_2 pour exprimer $\vec{\Omega}_{3/0}$:

$$\vec{\Omega}_{3/0} = \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} \vec{y}_1 + \dot{\phi} \vec{z}_2 = \dot{\psi} (-\sin \theta \vec{x}_2 + \cos \theta \vec{z}_2) + \dot{\theta} \vec{y}_1 + \dot{\phi} \vec{z}_2$$

$$\vec{\Omega}_{3/0} = -\dot{\psi} \sin \theta \vec{x}_2 + \dot{\theta} \vec{y}_1 + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \vec{z}_2$$

Alors :

$$\vec{\sigma}_{G,3/0} = \bar{\mathbf{J}}_{G,3}(\vec{\Omega}_{3/0}) = \begin{vmatrix} -A_3 \dot{\psi} \sin \theta \\ A_3 \dot{\theta} \\ C_3 (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \end{vmatrix}_{b_2}$$

D'où :

$$\frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_{G,3/0} \cdot \vec{z}_2) = C_3 \frac{d}{dt}(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)$$

et :

$$\vec{\sigma}_{G,3/0} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{z}_2 \right]_0 = (\vec{\sigma}_{G,3/0}, \vec{\Omega}_{2/0}, \vec{z}_2) = 0$$

(cette dernière quantité est toujours nulle pour un solide de révolution !)

Donc :

$$\vec{\delta}_{G,3/0} \cdot \vec{z}_2 = C_3 \frac{d}{dt}(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)$$

Et finalement on a :

$$C_{2/3} = C_3 \frac{d}{dt}(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)$$

- **Détermination de $C_{1/2}$** : théorème du moment dynamique appliqué au système de solides $\{\underline{2}+\underline{3}\}$ en projection sur $\vec{y}_1$.

L'opérateur d'inertie de $\underline{2}$ étant donné en son centre d'inertie H , on choisit d'exprimer le moment dynamique en ce point.

On doit calculer d'une part :

$$\sum \vec{M}_{H,Ext/\{2+3\}} \cdot \vec{y}_1 = \vec{M}_{H,1/2} \cdot \vec{y}_1 + C_{1/2} \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_1 + m_3 g \rho \sin \theta \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_1 = C_{1/2} + m_3 g \rho \sin \theta$$

Et d'autre part :

$$\vec{\delta}_{H,\{2+3\}/0} \cdot \vec{y}_1 = \vec{\delta}_{H,2/0} \cdot \vec{y}_1 + \vec{\delta}_{H,3/0} \cdot \vec{y}_1 = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{H,2/0} \right]_0 \cdot \vec{y}_1 + (\vec{\delta}_{G,3/0} + \overrightarrow{HG} \wedge m_3 \vec{A}_{G \in 3/0}) \cdot \vec{y}_1$$

Le premier terme vaut :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{H,2/0} \right]_0 \cdot \vec{y}_1 = \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_{H,2/0} \cdot \vec{y}_1) - \vec{\sigma}_{H,2/0} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{y}_1 \right]_0$$

On a :

$$\vec{\sigma}_{H,2/0} = \bar{\mathbf{J}}_{H,2}(\vec{\Omega}_{2/0}) = \begin{vmatrix} -A_2 \dot{\psi} \sin \theta \\ A_2 \dot{\theta} \\ C_2 \dot{\psi} \cos \theta \end{vmatrix}_{b_2}$$

Alors :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{H,2/0} \right]_0 \cdot \vec{y}_1 = \frac{d}{dt} (A_2 \dot{\theta}) - (\vec{\sigma}_{H,2/0}, \vec{\Omega}_{1/0}, \vec{y}_1)$$

Et :

$$\boxed{\bar{\delta}_{H,2/0} \cdot \vec{y}_1 = A_2 \ddot{\theta} + (C_2 - A_2) \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta}$$

Le deuxième terme vaut :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{G,3/0} \right]_0 \cdot \vec{y}_1 + (\vec{HG}, m_3 \vec{A}_{G \in 3/0}, \vec{y}_1) &= \frac{d}{dt} (\vec{\sigma}_{G,3/0} \cdot \vec{y}_1) - \vec{\sigma}_{G,3/0} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{y}_1 \right]_0 + m_3 \rho (\vec{z}_2, \vec{A}_{G \in 3/0}, \vec{y}_1) \\ &= A_3 \ddot{\theta} - (\vec{\sigma}_{G,3/0}, \vec{\Omega}_{1/0}, \vec{y}_1) + m_3 \rho (\vec{A}_{G \in 3/0} \cdot \vec{x}_2) = A_3 \ddot{\theta} + \dot{\psi} (\vec{\sigma}_{G,3/0} \cdot \vec{x}_1) + m_3 \rho (\vec{A}_{G \in 3/0} \cdot \vec{x}_2) \end{aligned}$$

On a :

$$\vec{\sigma}_{G,3/0} \cdot \vec{x}_1 = (C_3 - A_3) \dot{\psi} \sin \theta \cos \theta + C_3 \dot{\phi} \sin \theta$$

Et :

$$\begin{aligned} \vec{A}_{G \in 3/0} \cdot \vec{x}_2 &= \left[\frac{d}{dt} \vec{V}_{G \in 3/0} \right]_0 \cdot \vec{x}_2 = \frac{d}{dt} (\vec{V}_{G \in 3/0} \cdot \vec{x}_2) - \vec{V}_{G \in 3/0} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{x}_2 \right]_0 \\ \vec{A}_{G \in 3/0} \cdot \vec{x}_2 &= \rho \ddot{\theta} + \dot{\rho} \dot{\theta} - (\vec{V}_{G \in 3/0}, \vec{\Omega}_{2/0}, \vec{x}_2) = \rho \ddot{\theta} + \dot{\rho} \dot{\theta} - (\dot{\psi}^2 (a + \rho \sin \theta) \cos \theta - \dot{\rho} \dot{\theta}) \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\bar{\delta}_{H,3/0} \cdot \vec{y}_1 = A_3 \ddot{\theta} + \dot{\psi} ((C_3 - A_3) \dot{\psi} \sin \theta \cos \theta + C_3 \dot{\phi} \sin \theta) + m_3 \rho (\rho \ddot{\theta} + 2 \dot{\rho} \dot{\theta} - \dot{\psi}^2 (a + \rho \sin \theta) \cos \theta)}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} C_{1/2} + m_3 g \rho \sin \theta &= A_2 \ddot{\theta} + (C_2 - A_2) \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + A_3 \ddot{\theta} \\ &\quad + \dot{\psi} ((C_3 - A_3) \dot{\psi} \sin \theta \cos \theta + C_3 \dot{\phi} \sin \theta) + m_3 \rho (\rho \ddot{\theta} + 2 \dot{\rho} \dot{\theta} - \dot{\psi}^2 (a + \rho \sin \theta) \cos \theta) \end{aligned}$$

Alors :

$$\boxed{C_{1/2} = \ddot{\theta} (A_2 + A_3 + m_3 \rho^2) + \dot{\psi} \sin \theta ((C_2 + C_3 - A_2 - A_3) \dot{\psi} \cos \theta + C_3 \dot{\phi}) + m_3 \rho (2 \dot{\rho} \dot{\theta} - \dot{\psi}^2 (a + \rho \sin \theta) \cos \theta - g \sin \theta)}$$

- **Détermination de $C_{0/1}$** : théorème du moment dynamique appliqué au système de solides $\{\underline{1}+\underline{2}+\underline{3}\}$ en projection sur $\vec{Z}_0$.

L'opérateur d'inertie de $\underline{1}$ étant donné en O , point de vitesse nulle, on choisit d'exprimer le moment dynamique en ce point.

On doit calculer d'une part :

$$\sum \vec{M}_{O,Ext/\{1+2+3\}} \cdot \vec{Z}_0 = \vec{M}_{O,0/1} \cdot \vec{Z}_0 + C_{0/1} \vec{Z}_0 \cdot \vec{Z}_0 = C_{0/1}$$

Et d'autre part :

$$\vec{\delta}_{O,\{1+2+3\}/0} \cdot \vec{Z}_0 = \vec{\delta}_{O,1/0} \cdot \vec{Z}_0 + \vec{\delta}_{O,2/0} \cdot \vec{Z}_0 + \vec{\delta}_{O,3/0} \cdot \vec{Z}_0$$

Calculons chacun des trois termes ci-dessus :

$$\vec{\delta}_{O,1/0} \cdot \vec{Z}_0 = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{O,1/0} \right]_0 \cdot \vec{Z}_0 = \frac{d}{dt} (\vec{\sigma}_{O,1/0} \cdot \vec{Z}_0) = \frac{d}{dt} (\vec{J}_{O,1} (\vec{\Omega}_{1/0}) \cdot \vec{Z}_0) = \frac{d}{dt} (C_1 \dot{\psi})$$

$$\vec{\delta}_{O,1/0} \cdot \vec{Z}_0 = \frac{d}{dt} (C_1 \dot{\psi})$$

$$\vec{\delta}_{O,2/0} \cdot \vec{Z}_0 = (\vec{\delta}_{H,2/0} + \vec{OH} \wedge m_2 \vec{A}_{H \in 2/0}) \cdot \vec{Z}_0 = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{H,2/0} \right]_0 \cdot \vec{Z}_0 + m_2 a \left(\vec{x}_1, \left[\frac{d}{dt} \vec{V}_{H \in 2/0} \right]_0, \vec{Z}_0 \right)$$

$$\vec{\delta}_{O,2/0} \cdot \vec{Z}_0 = \frac{d}{dt} (\vec{\sigma}_{H,2/0} \cdot \vec{Z}_0) + m_2 a \left[\frac{d}{dt} (a \dot{\psi} \vec{y}_1) \right]_0 \cdot \vec{y}_1 = \frac{d}{dt} (\dot{\psi} (A_2 \sin^2 \theta + C_2 \cos^2 \theta)) + m_2 a^2 \frac{d\dot{\psi}}{dt}$$

$$\vec{\delta}_{O,2/0} \cdot \vec{Z}_0 = \frac{d}{dt} (\dot{\psi} (A_2 \sin^2 \theta + C_2 \cos^2 \theta + m_2 a^2))$$

$$\vec{\delta}_{O,3/0} \cdot \vec{Z}_0 = (\vec{\delta}_{G,3/0} + \vec{OG} \wedge m_3 \vec{A}_{G \in 3/0}) \cdot \vec{Z}_0 = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{G,3/0} \right]_0 \cdot \vec{Z}_0 + m_3 \left((a \vec{x}_1 + \rho \vec{z}_2), \left[\frac{d}{dt} \vec{V}_{G \in 3/0} \right]_0, \vec{Z}_0 \right)$$

$$\vec{\delta}_{O,3/0} \cdot \vec{Z}_0 = \frac{d}{dt} (\vec{\sigma}_{G,3/0} \cdot \vec{Z}_0) + m_3 (a + \rho \sin \theta) \vec{y}_1 \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{V}_{G \in 3/0} \right]_0$$

$$\vec{\delta}_{O,3/0} \cdot \vec{Z}_0 = \frac{d}{dt} (A_3 \dot{\psi} \sin^2 \theta + C_3 (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta) + m_3 (a + \rho \sin \theta) \vec{y}_1 \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{V}_{G \in 3/0} \right]_0$$

$$= \frac{d}{dt} (A_3 \dot{\psi} \sin^2 \theta + C_3 (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta) + m_3 (a + \rho \sin \theta) \left(\frac{d}{dt} (\vec{V}_{G \in 3/0} \cdot \vec{y}_1) - \vec{V}_{G \in 3/0} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{y}_1 \right]_0 \right)$$

$$= \frac{d}{dt} (A_3 \dot{\psi} \sin^2 \theta + C_3 (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta) + m_3 (a + \rho \sin \theta) \left(\frac{d}{dt} (\vec{V}_{G \in 3/0} \cdot \vec{y}_1) - \vec{V}_{G \in 3/0} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{y}_1 \right]_0 \right)$$

Posons $a + \rho \sin \theta = u$ et calculons :

$$\triangleright \vec{V}_{G \in 3/0} \cdot \vec{y}_1 = \dot{\psi} (a + \rho \sin \theta) = \dot{\psi} u$$

$$\triangleright -\vec{V}_{G \in 3/0} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{y}_1 \right]_0 = \vec{V}_{G \in 3/0} \cdot \dot{\psi} \vec{x}_1 = \dot{\psi} (\dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta) = \dot{\psi} \dot{u}$$

$$\triangleright (a + \rho \sin \theta) \left(\frac{d}{dt} (\vec{V}_{G \in 3/0} \cdot \vec{y}_1) - \vec{V}_{G \in 3/0} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{y}_1 \right]_0 \right) = u \left(\frac{d\dot{\psi} u}{dt} + \dot{\psi} \dot{u} \right) = u \frac{d\dot{\psi} u}{dt} + \dot{\psi} u \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \dot{\psi} u^2$$

$$\text{D'où : } \boxed{\vec{\delta}_{O,3/0} \cdot \vec{z}_0 = \frac{d}{dt} (A_3 \dot{\psi} \sin^2 \theta + C_3 (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta + m_3 \dot{\psi} (a + \rho \sin \theta)^2)}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} C_{0/1} &= \frac{d}{dt} (C_1 \dot{\psi}) + \frac{d}{dt} (\dot{\psi} (A_2 \sin^2 \theta + C_2 \cos^2 \theta + m_2 a^2)) \\ &+ \frac{d}{dt} (A_3 \dot{\psi} \sin^2 \theta + C_3 (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta + m_3 \dot{\psi} (a + \rho \sin \theta)^2) \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\blacksquare \boxed{C_{0/1} = \frac{d}{dt} (\dot{\psi} (C_1 + (A_2 + A_3) \sin^2 \theta + (C_2 + C_3) \cos^2 \theta + m_2 a^2 + m_3 (a + \rho \sin \theta)^2) + C_3 \dot{\phi} \cos \theta)}$$