APPLICATIONS DIRECTES

1. Calcul d'énergie cinétique

Cas 1 : robot simple

Solide 1 : $T(1/R) = \frac{1}{2}.m_1.\vec{V}(G_1,1/R)^2 + \frac{1}{2}.\vec{\Omega}_{1/0}.\bar{I}(G_1,1).\vec{\Omega}_{1/0}$

$$T(1/R) = \frac{1}{2}.m_1.\left(\frac{l_1}{2}.\dot{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{2}.m_1.\frac{l_1^2}{12}.\dot{\alpha}^2 \rightarrow T(1/R) = \frac{1}{2}.m_1.\frac{l_1^2}{3}.\dot{\alpha}^2$$

Masse ponctuelle 2 : $T(2/R) = \frac{1}{2}.m_2.(l_1.\dot{\alpha})^2$

Cas 2 : robot moins simple

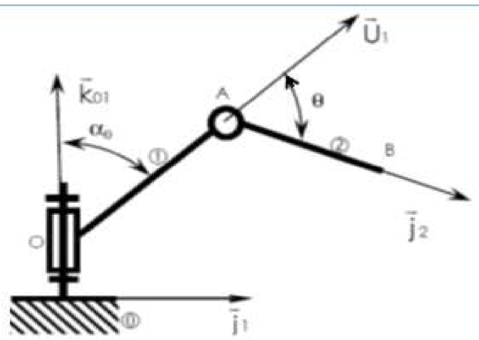
Solide 1 idem cas 1 : $T(1/R) = \frac{1}{2}.m_1.\frac{l_1^2}{3}.\dot{\alpha}^2$

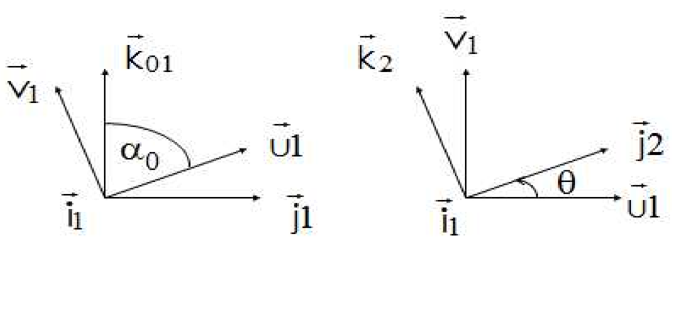
Solide 2 : $T(2/R) = \frac{1}{2}.m_2.\vec{V}(G_2,2/R)^2 + \frac{1}{2}.\vec{\Omega}_{2/R}.\bar{I}(G_2,2).\vec{\Omega}_{2/R}$

$\vec{V}_{G_2\in 2/0} = l_1.\dot{\alpha}.\vec{k}_1 + \frac{l_2}{2}.\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right).\vec{k}_2$

$$2T(2/R) = m_2\frac{l_2^2}{3}\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)^2 + m_2\left(l_1.\dot{\alpha}\right)^2 + m_2l_1.l_2.\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right).\dot{\alpha}.\cos\beta$$

Cas 3 : robot vraiment moins simple …





Solide 1 : $[I(O,S_1)]_{\vec{i}1,\vec{u}1,\vec{v}1} = m_1 \frac{l_1^2}{3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{\vec{i}1,\vec{u}1,\vec{v}1}$ $\quad \vec{\Omega}_{1/0} = \omega_{10}\left(\cos\alpha_0.\vec{u}_1 + \sin\alpha_0.\vec{v}_1\right)$

Torseur cinématique 1/0 en O : $\begin{pmatrix}\vec{\Omega}_{1/0} = \omega_{10}.\vec{k}_{01}\\ \vec{V}_{O\in 1/0} = \vec{0}\end{pmatrix}_O$

Torseur cinétique 1/0 en O : $\begin{pmatrix} m_1\vec{V}_{G1\in 1/0} = -m_1\frac{l_1}{2}.\sin\alpha_0.\omega_{10}.\vec{i}_1 \\ \vec{\sigma}_{O\in 1/0} = \omega_{10}.m_1\frac{l_1^2}{3}\sin\alpha_0\vec{v_1}\end{pmatrix}_O$

→ $2T(S1/R) = \frac{m_1 l_1^2 \omega_{10}^2 (\sin\alpha_0)^2}{3}$

Solide 2 : $[I(G_2,S_2)]_{\vec{i}1,\vec{j}2,\vec{k}2} = m_2\frac{l_2^2}{12}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{\vec{i}1,\vec{j}2,\vec{k}2}$ $\quad \vec{\Omega}_{2/0} = \begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ \omega_{10}\cos(\alpha_0-\theta)\\ \omega_{10}\sin(\alpha_0-\theta)\end{pmatrix}_{base_{\vec{i}1,\vec{j}2,\vec{k}2}}$

Torseur cinématique 2/0 en G2 : $\begin{pmatrix}\vec{\Omega}_{2/0} = \omega_{01}.\vec{k}_{01} + \dot{\theta}\vec{i}_1\\ \left(-\omega_{10}(l_1.\sin\alpha_0)\vec{i}_1 - \omega_{10}\left(\frac{l_2}{2}.\sin(\alpha_0-\theta)\right)\vec{i}_1 + \frac{l_2}{2}\dot{\theta}\vec{k}_2\right)\end{pmatrix}_{G_2}$

Torseur cinétique 2/0 en G2 : $\begin{pmatrix} m_2\left(-\omega_{10}(l_1.\sin\alpha_0)\vec{i}_1 - \omega_{10}\left(\frac{l_2}{2}.\sin(\alpha_0-\theta)\right)\vec{i}_1 + \frac{l_2}{2}\dot{\theta}\vec{k}_2\right)\\ \vec{\sigma}_{G_2\in 2/0} = m_2\frac{l_2^2}{12}\dot{\theta}\vec{i}_1 + m_2\frac{l_2^2}{12}\omega_{10}\sin(\alpha_0-\theta)\vec{k}_2\end{pmatrix}_{G_2}$

→ $$2T(S2/R) = m_2\frac{l_2^2}{12}\dot{\theta}^2 + m_2\frac{l_2^2}{12}\omega_{10}^2\sin(\alpha_0-\theta)^2 + m_2\left(\omega_{10}(l_1.\sin\alpha_0) + \omega_{10}\left(\frac{l_1}{2}.\sin(\alpha_0-\theta)\right)\right)^2 + m_2\left(\frac{l_2}{2}\dot{\theta}\right)^2$$

2. Calcul d'énergie cinétique : application aux inerties équivalentes

Cas 1 : réducteur (solides en simple rotation)

Exprimer J_{eqm} en fonction de J_m, J_r et k.

$$T(Mot+Rec/R) = \frac{1}{2}J_{mot}.\omega^2_{mot/R} + \frac{1}{2}J_{rec}.\omega^2_{rec/R}$$

$$T(Mot+Rec/R) = \frac{1}{2}\left(J_{mot} + J_{rec}.k^2\right).\omega^2_{mot/R} \rightarrow J_{eqm} = J_{mot} + J_{rec}.k^2$$

Exprimer J_{eqr} en fonction de J_m, J_r et k.

$$T(Mot+Rec/R)=\frac{1}{2}J_{mot}.\omega^2_{mot/R}+\frac{1}{2}J_{rec}.\omega^2_{rec/R}$$

$$T(Mot+Rec/R)=\frac{1}{2}\left(\frac{J_{mot}}{k^2}+J_{rec}\right).\omega^2_{rec/R} \rightarrow J_{eqr}=\left(\frac{J_{mot}}{k^2}+J_{rec}\right)$$

Cas 2 : Vélo

Calcul préalable (roulement sans glissement en O entre 4 et 0 : $\vec{V}_{O\in 4/0}=\vec{0}$

$$\vec{V}_{O\in 4/0}=\vec{0}=\vec{V}_{P\in 4/0}+\overrightarrow{PO}\wedge\vec{\Omega}_{40}$$

En effet $\vec{V}_{P\in 4/0}=\vec{V}_{P\in 3/0}=\vec{V}_{P\in 2/0}$ car phase de pédalages 2 et 3 sont encastrés et P est centre de la pivot entre le cadre 2 et l'ensemble 2+3.

Par ailleurs, $\vec{\Omega}_{40}=\vec{\Omega}_{32}$ car $\vec{\Omega}_{43}=\vec{0}$ et $\vec{\Omega}_{20}=\vec{0}$ (pas de rotation du cadre)

$$\rightarrow V=R.\omega_{3/2} \quad k=\frac{\omega_{3/2}}{\omega_{1/2}} \quad \rightarrow V=R.k.\omega_{1/2}$$

Pour chaque solide on applique : $T(i/R)=\frac{1}{2}.m_i.\vec{V}(G_i,i/R)^2+\frac{1}{2}.\vec{\Omega}_{i/R}.\mathcal{I}(G_i,i).\vec{\Omega}_{i/R}$

$$T(1+2+3+4+4'+cycliste/R)=\frac{1}{2}.(2M_4+M_1+M_2+M_3).V^2+\frac{1}{2}.(2J_4+J_3).\omega^2_{3/2}+\frac{1}{2}.J_1.\omega^2_{1/2}$$

$$T(1+2+3+4+4'+cycliste/R)=\frac{1}{2}.M.V^2+\frac{1}{2}.(2J_4+J_3).\omega^2_{3/2}+\frac{1}{2}.J_1.\omega^2_{1/2}$$

$$T(1+2+3+4+4'+cycliste/R)=\frac{1}{2}.M.R^2.k^2\omega^2_{1/2}+\frac{1}{2}.(2J_4+J_3).k^2.\omega^2_{1/2}+\frac{1}{2}.J_1.\omega^2_{1/2}$$

$$J_{eq}=\left(M.R^2.k^2+(2J_4+J_3).k^2+J_1\right) \quad \text{Avec } \left(2M_4+M_1+M_2+M_3\right)$$

3. Calculs de puissance

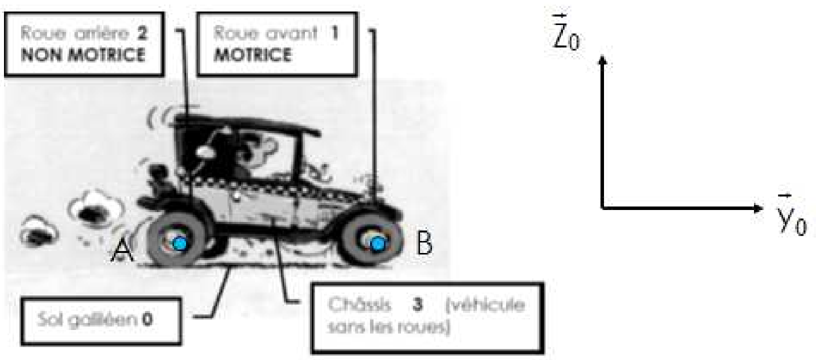
Cas 1 : robot vraiment moins simple

Liaisons parfaites : $P(0 \leftrightarrow 1) = P(0 \to 1/0) = \{0 \to 1\} \otimes \{V1/0\} = 0$ $\quad P(1 \leftrightarrow 2) = \{1 \to 2\} \otimes \{V2/1\} = 0$

$\{V1/0\}_A = \begin{Bmatrix} \omega_{10}.\vec{k}_{01} \\ -l_1\omega_{10}\sin\alpha_0.\vec{i}_1 \end{Bmatrix}_A$ $\quad \{2 \to 1\}_A = \begin{Bmatrix} X_{21}.\vec{i}_1 + Y_{21}.\vec{j}_1 + Z_{21}.\vec{k}_{01} \\ M_{21}.\vec{j}_1 + N_{21}.\vec{k}_{01} \end{Bmatrix}_A$ (Écriture possible sous cette forme dans les bases ; je prends donc la base qui me facilite le travail)

$P(2 \to 1/0) = \{2 \to 1\} \otimes \{V1/0\} = \omega_{10}N_{21} - l_1\omega_{10}\sin\alpha_0 X_{21}$

Cas 2 : puissance dans un véhicule



On suppose le RSG aux contacts sol / roue (nommés B' et A'), l'absence de frottement dans les liaisons (liaisons parfaites) et des contacts ponctuels aux contacts sol / roue (B ' et A').

Exprimons les torseurs cinématiques utiles :

$$\{V2/0\}_A = \begin{Bmatrix} \dot\theta.\vec{x}_0 \\ -R\dot\theta.\vec{y}_0 \end{Bmatrix}_A \quad \{V3/0\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -R\dot\theta.\vec{y}_0 \end{Bmatrix}_A \quad \{V2/3\}_A = \begin{Bmatrix} \dot\theta.\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

$$\{V1/0\}_B = \begin{Bmatrix} \dot\theta.\vec{x}_0 \\ -R\dot\theta.\vec{y}_0 \end{Bmatrix}_B \quad \{V3/0\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -R\dot\theta.\vec{y}_0 \end{Bmatrix}_B \quad \{V1/3\}_B = \begin{Bmatrix} \dot\theta.\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

Exprimons les torseurs d'actions mécaniques utiles :

$$\{0 \to 2\}_{A'} = \begin{Bmatrix} Z_{02}.\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A'} \quad \{0 \to 1\}_{B'} = \begin{Bmatrix} Z_{01}.\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{B'} \quad \Big\{\underbrace{3 \to 1}_{act}\Big\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{31}.\vec{x}_0 \end{Bmatrix}_B$$

$$\Big\{\underbrace{3 \to 1}_{pivot}\Big\}_B = \begin{Bmatrix} X_{31}.\vec{x}_0 + Y_{31}.\vec{y}_0 + Z_{31}.\vec{z}_0 \\ M_{31}.\vec{y}_0 + N_{31}.\vec{z}_0 \end{Bmatrix}_B \quad \Big\{\underbrace{3 \to 2}_{pivot}\Big\}_A = \begin{Bmatrix} X_{32}.\vec{x}_0 + Y_{32}.\vec{y}_0 + Z_{32}.\vec{z}_0 \\ M_{32}.\vec{y}_0 + N_{32}.\vec{z}_0 \end{Bmatrix}_A$$

$P(\underbrace{3 \leftrightarrow 1}_{\text{pivot}}) = 0$

$P(\underbrace{3 \leftrightarrow 2}_{\text{pivot}}) = 0$

Liaisons parfaites

$P(1 \leftrightarrow 0) = 0$

$P(2 \leftrightarrow 0) = 0$

$P(0 \rightarrow 1/0) = 0$

$P(0 \rightarrow 2/0) = 0$

$P(\underbrace{3 \leftrightarrow 1}_{\text{act}}) = C_{31}\dot{\theta}$

$P(\underbrace{3 \rightarrow 1}_{\text{act}}/0) = C_{31}\dot{\theta}$

$P(\underbrace{3 \rightarrow 1}_{\text{act}}/3) = -C_{31}\dot{\theta}$

$P(\underbrace{3 \rightarrow 1}_{\text{pivot}}/0) = -R\dot{\theta}Y_{31}$

$P(\underbrace{3 \rightarrow 2}_{\text{pivot}}/0) = -R\dot{\theta}Y_{32}$