COEFFICIENT DE FROTTEMENT VISQUEUX D'UN MOTEUR D'ASSERVISSEMENT

L'application du théorème du moment dynamique appliqué au rotor en mouvement dans un repère galiléen donne dans le cas général, avec $\omega(t)$ correspondant à la vitesse de rotation du rotor du moteur relativement au repère galiléen :

$$J_m \frac{d\omega(t)}{dt} = C_m(t) - f.\omega(t) - C_r(t)$$

$C_m(t)$ et $C_r(t)$ sont respectivement le couple moteur et le couple résistant. Ce dernier correspond ici au seul couple de frottement sec noté $C_f(t)$ par la suite.
Sa valeur est supposée constante.

Dans le cas où le moteur tournant initialement à sa vitesse nominale n'est plus alimenté l'équation issue de l'application du théorème du moment dynamique donne donc :

$$J_m \frac{d\omega(t)}{dt} = -f.\omega(t) - C_r(t)$$

RESOLUTION PAR LAPLACE : Dans notre cas les conditions initiales sont :
$\omega(t) = \omega_0$ pour t=0
Résolution par la transformation de LAPLACE.
Il est aussi possible de trouver une solution par les méthodes classiques d'intégration des équations différentielles.
Soit dans le domaine de LAPLACE

$$(J_m p + f)\Omega(p) - J_m\omega_0 = -\frac{C_f}{p} \qquad \Omega(p) = \frac{\left(-\frac{C_f}{p} + J_m\omega_0\right)}{J_m p + f}$$

Cette expression se décompose en deux parties :

$$\Omega(p) = \frac{\omega_0}{p + \frac{f}{J_m}} - \frac{C_f}{J_m p\left(p + \frac{f}{J_m}\right)} \qquad \Omega(p) = \frac{\omega_0}{p + \frac{f}{J_m}} - \frac{C_f J_m}{J_m f}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{1 + \frac{J_m p}{f}}\right)$$

La transformée inverse de LAPLACE donne

$$\omega(t) = \omega_0 e^{\left(-\frac{f}{J_m}t\right)} - \frac{C_f}{f}\left(1 - e^{\left(-\frac{f}{J_m}t\right)}\right) = \left(\omega_0 + \frac{C_f}{f}\right)e^{\left(-\frac{f}{J_m}t\right)} - \frac{C_f}{f}$$

RESOLUTION CLASSIQUE (solution particulière et solution homogène associée)

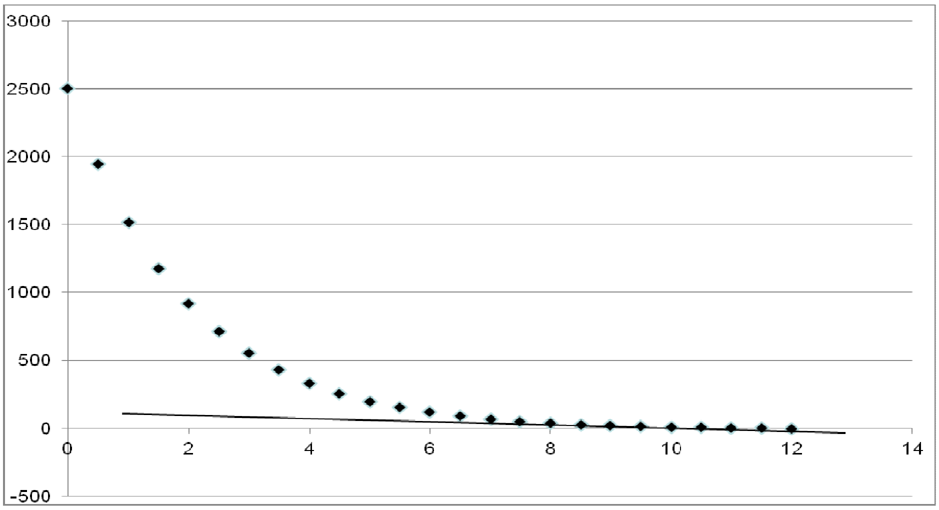
$$J_m \frac{d\omega(t)}{dt} = -f.\omega(t) - C_f \rightarrow \omega(t) = \left(\omega_0 + \frac{C_f}{f}\right)e^{\left(-\frac{f}{J_m}t\right)} - \frac{C_f}{f}$$

Il reste à résoudre l'équation suivante avec f comme inconnue.

Compte tenu des conditions aux limites du problème on peut écrire l'équation suivante :

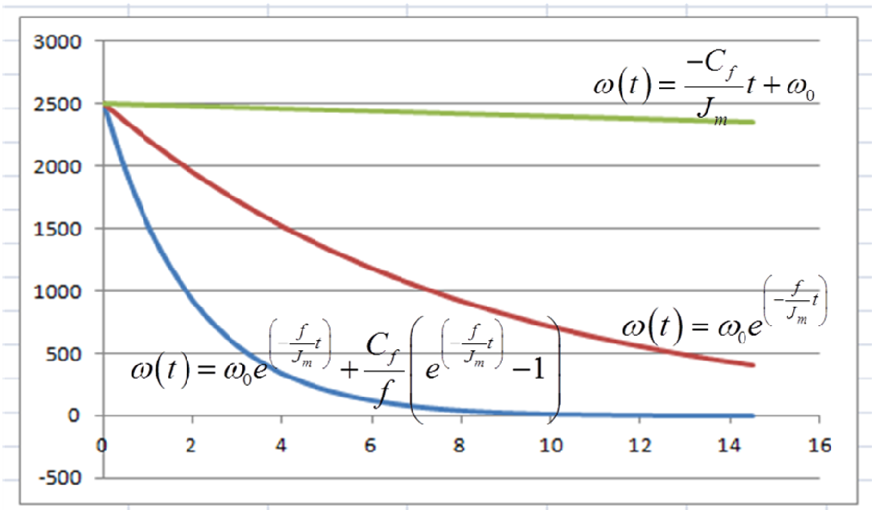
$$0=\left(\omega_0+\frac{C_f}{f}\right)e^{\left(-\frac{f}{J_m}t1\right)}-\frac{C_f}{f} \qquad \frac{C_f}{C_f+\omega_0 f}=e^{\left(-\frac{f}{J_m}t1\right)} \qquad \ln\left(1+\frac{\omega_0 f}{C_f}\right)=\frac{f}{J_m}t1$$

Une résolution graphique en traçant sur le même graphe les fonctions de f situées de part et d'autre du signe égal conduit à une valeur de f. L'usage des valeurs numériques proposées conduit au résultat :
$f=0.0025mNs/radian$



Si que frottement sec : $J_m\frac{d\omega(t)}{dt}=-C_f \rightarrow \omega(t)=\frac{-C_f}{J_m}t+\omega_0$

Si que frottement visqueux : $J_m\frac{d\omega(t)}{dt}=-C_f \rightarrow \omega(t)=\omega_0 e^{\left(-\frac{f}{J_m}t\right)}$



En t2 , frottement visqueux équivalent a frottement sec : $-C_f=-f.\omega(t)$

$$\omega(t)=\frac{0,2}{0,0025}=80 \qquad 80=\omega_0 e^{\left(-\frac{f}{J_m}t2\right)}+\frac{C_f}{f}\left(e^{\left(-\frac{f}{J_m}t2\right)}-1\right)$$

OPTIMISATION DES RAPPORT DE REDUCTION D'UN AXE MOTORISE

1. Principe fondamental de la dynamique au rotor moteur et à ce qui lui est lié par encastrement seuls :
On note Cm le couple électromagnétique développé par le moteur,
et Ca le couple mécanique disponible sur l'arbre moteur.

$$J_m\ddot{\theta}_m = C_m - C_a$$
$$C_a = C_m - J_m\ddot{\theta}_m$$

Ou théorème de l'énergie cinétique : $\dfrac{d\left(T\left(\text{rotor/Rg}\right)\right)}{dt} = P\left(Ext \to rotor/\text{Rg}\right)$

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}J_m\dot{\theta}_m^{\,2}\right)}{dt} = C_m\dot{\theta}_m - C_a\dot{\theta}_m$$
$$J_m\dot{\theta}_m\ddot{\theta}_m = C_m\dot{\theta}_m - C_a\dot{\theta}_m \to J_m\ddot{\theta}_m = C_m - C_a$$

2. Théorème de l'énergie cinétique à la charge:
Notons E la charge composée de tous les composants situés après le réducteur, soit 4 solides identifiés **:**

La totalité de la masse mobile en translation.
La poulie crantée en bout de vis à billes et la vis à billes.
La poulie crantée en sortie de réducteur.
La courroie synchrone.

$$\frac{d\left(T\left(\text{E/Rg}\right)\right)}{dt} = P\left(\overline{E} \to \text{E/Rg}\right) + \underbrace{P_{\text{int}}}_{=0\ car\ liaisons\ parfaites}$$

$$T\left(\text{E/Rg}\right) = \frac{1}{2}\left(M\dot{x} + J_v\dot{\theta}_v^{\,2} + J_p\dot{\theta}_p^{\,2} + M_cR_p^{\,2}\dot{\theta}_p^{\,2}\right)$$

$$avec\ \dot{x} = \frac{p\dot{\theta}_v}{2\pi} \quad \dot{\theta}_p = r_2\dot{\theta}_v$$

On ramène l'énergie cinétique au niveau de la masse translatée donc en fonction de la seule vitesse de la masse translatée**.**

$$T\left(\text{E/Rg}\right) = \frac{1}{2}\left(M + J_v\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 + \left(J_p + M_cR_p^{\,2}\right)\left(r_2\frac{2\pi}{p}\right)^2\right)\dot{x}^2$$

$$P\left(\overline{E} \to \text{E/Rg}\right) = C_p\dot{\theta}_p - Mg\dot{x}$$

$$P\left(\overline{E} \to \text{E/Rg}\right) = \left[C_p\left(r_2\frac{2\pi}{p}\right) - Mg\right]\dot{x}$$

Soit $\left(M + J_v\left(\dfrac{2\pi}{p}\right)^2 + \left(J_p + M_cR_p^{\,2}\right)\left(r_2\dfrac{2\pi}{p}\right)^2\right)\ddot{x} = \left[C_p\left(r_2\dfrac{2\pi}{p}\right) - Mg\right]$

3. Bilan des puissances au réducteur :

Les éléments internes au réducteur sont supposés de masses négligeables.

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au réducteur seul donne en tenant compte du rendement du réducteur : $C_p\dot{\theta}_p = C_a\dot{\theta}_m\eta$

Détails : $\dfrac{d\left(T\left(\text{red/Rg}\right)\right)}{dt} = P\left(Ext \rightarrow red/\text{Rg}\right) + P_{\text{int}}$

L'inertie de l'axe d'entrée du réducteur est négligée par rapport à celle du rotor du moteur Jm

L'inertie de l'axe de sortie du réducteur est négligée par rapport à celle de la poulie Jp

L'inertie des autres composants ramenée à l'axe d'entrée ou de sortie du réducteur sont négligeable vis-à-vis de Jm et Jp

On a donc $\left(T\left(\text{red/Rg}\right)\right) = 0 \rightarrow \dfrac{d\left(T\left(\text{red/Rg}\right)\right)}{dt} = 0$

$$\frac{d\left(T\left(\text{red/Rg}\right)\right)}{dt} = 0 = C_a\dot{\theta}_m - C_p\dot{\theta}_p - (1-\eta)C_a\dot{\theta}_m = \eta C_a\dot{\theta}_m - C_p\dot{\theta}_p$$

4. On en déduit :

$$C_p = C_a\eta r_1 \qquad\qquad C_p = \left(C_m - J_m\ddot{\theta}_m\right)\eta r_1$$

$$comme\ \ddot{\theta}_m = r_1\ddot{\theta}_p = \left(r_2 r_1\frac{2\pi}{p}\right)\ddot{x} \qquad d'ou\ C_p = \left(C_m - J_m r_2 r_1\frac{2\pi}{p}\ddot{x}\right)\eta r_1$$

En reportant cette valeur du couple disponible en sortie du réducteur dans l'expression issue de l'application du théorème de l'énergie à la charge, on obtient l'expression de l'accélération de la masse translatée :

$$\left(M + J_v\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 + \left(J_p + M_c R_p^{\ 2}\right)\left(r_2\frac{2\pi}{p}\right)^2 + J_m r_2^{\ 2} r_1^{\ 2}\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2\eta\right)\ddot{x} = \left[C_m r_1 r_2\frac{2\pi}{p}\eta - Mg\right]$$

$$\ddot{x} = \frac{\left[C_m r_1 r_2\dfrac{2\pi}{p}\eta - Mg\right]}{\left(M + J_v\left(\dfrac{2\pi}{p}\right)^2 + \left(J_p + M_c R_p^{\ 2}\right)\left(r_2\dfrac{2\pi}{p}\right)^2 + J_m r_2^{\ 2} r_1^{\ 2}\left(\dfrac{2\pi}{p}\right)^2\eta\right)}$$

NB : on aurait pu appliquer le théorème de l'énergie cinétique sur l'ensemble E' : rotor, réducteur, poulies, courroie, vis , écrou et masse à translater.

$$T\left(\text{E}'/\text{Rg}\right) = \frac{1}{2}\left(J_m\left(r_1 r_2\frac{2\pi}{p}\right)^2 + M + J_v\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 + \left(J_p + M_c R_p^{\ 2}\right)\left(r_2\frac{2\pi}{p}\right)^2\right)\dot{x}^2$$

$$P\left(\overline{E'} \rightarrow \text{E}'/\text{Rg}\right) = C_m\dot{\theta}_m - Mg\dot{x} - (1-\eta)C_a\dot{\theta}_m$$

Avec $J_m\ddot{\theta}_m = C_m - C_a$, on a

$$
\begin{aligned}
P\left(\overrightarrow{E'} \to \mathrm{E'/Rg}\right) &= C_m\dot{\theta}_m - Mg\dot{x} - (1-\eta)\left(C_m - J_m\ddot{\theta}_m\right)\dot{\theta}_m \\
&= -Mg\dot{x} + \eta\left(C_m - J_m\ddot{\theta}_m\right)\dot{\theta}_m = -Mg\dot{x} + \eta C_m\dot{\theta}_m + (1-\eta)J_m\ddot{\theta}_m\dot{\theta}_m \\
&= -Mg\dot{x} + \eta C_m\dot{\theta}_m + \frac{d\left((1-\eta)\frac{1}{2}J_m\dot{\theta}_m^{\,2}\right)}{dt}
\end{aligned}
$$

$$
\left(M + J_v\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 + \left(J_p + M_cR_p^{\,2}\right)\left(r_2\frac{2\pi}{p}\right)^2 + J_m r_2^{\,2}r_1^{\,2}\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2\eta\right)\ddot{x} = \left[C_m r_1 r_2\frac{2\pi}{p}\eta - Mg\right]
$$

Soit

$$
\ddot{x} = \frac{\left[C_m r_1 r_2\frac{2\pi}{p}\eta - Mg\right]}{\left(M + J_v\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 + \left(J_p + M_cR_p^{\,2}\right)\left(r_2\frac{2\pi}{p}\right)^2 + J_m r_2^{\,2}r_1^{\,2}\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2\eta\right)}
$$

Cette expression montre que l'accélération de la masse translatée est fonction de plusieurs paramètres de construction, à savoir :
- Le rapport de réduction du réducteur r1.
- Le rapport de réduction du transmetteur par courroie synchrone r2.
- Le pas de la vis à billes p.

Pour obtenir une accélération donnée il y a donc plusieurs solutions possibles.
Les solutions possibles doivent être compatibles avec :
- les composants disponibles sur le marché. En effet les pas des vis à billes ne sont pas disponibles pour toutes sortes de valeurs. Par ailleurs les nombres de dents des poulies crantées standards ne sont disponibles pour toutes sortes de valeurs.
- Certains impératifs fonctionnels d'irréversibilité de la chaîne fonctionnelle. Par exemple si l'on vise un système irréversible, il sera préférable d'adopter un petit pas de la vis à billes et un grand rapport de réduction au niveau du réducteur épicycloïdal.
- Certains impératifs d'encombrement. Un grand rapport de réduction au niveau de la transmission poulies courroie induit un grand diamètre pour une des poulies.

Il faut donc faire des choix.
Dans ce problème on choisira :

- Un rapport de transmission égal à 1 pour la transmission par courroie synchrone, pour des impératifs d'encombrement.

- Un petit pas de vis à billes, qui induira un grand rapport de réduction du réducteur épicycloïdal, pour viser une irréversibilité de la chaîne fonctionnelle.

- Cette irréversibilité permet dans ce cas précis l'économie d'un système de freinage en position arrêt.

Donc si les choix du pas de la vis à billes et du rapport de réduction de la transmission par courroie sont fixés il reste à optimiser le rapport de réduction du réducteur épicycloïdal pour obtenir la meilleure dynamique du système.

La variable sur laquelle on travaille sera donc r1.

5. L'expression de l'accélération de la masse est de la forme :

$$\ddot{x} = \frac{Ar_1 + B}{Cr_1^2 + D}$$

Avec : A,B,C et D des constantes notées ci-après.

Remarque : si le système est en position horizontale il suffit d'annuler dans les calculs le terme provenant des effets de pesanteur.

$$A = C_m r_2 \frac{2\pi}{p}\eta \qquad B = -Mg$$

$$C = J_m \left(r_2 \frac{2\pi}{p}\right)^2 \eta \qquad D = M + J_v \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 + \left(J_p + M_c R_p^2\right)\left(r_2 \frac{2\pi}{p}\right)^2$$

6. Le rapport r1 pour lequel le système ne pourra démarrer sera:

$$\ddot{x} = 0 \text{ pour } r_1 = \frac{Mg}{C_m r_2 \left(\frac{2\pi}{p}\right)\eta}$$

En effet pour ce rapport le moteur ne peut juste que maintenir le système à l'arrêt, c'est à dire équilibrer les effets de la pesanteur.

7. Calcul de la dérivée de l'expression de l'accélération par rapport au rapport de réduction du réducteur.

$$\frac{\delta \ddot{x}}{\delta r_1} = \frac{A\left(Cr_1^2 + D\right) - \left(Ar_1 + B\right)2Cr_1}{\left(Cr_1^2 + D\right)^2} \qquad \frac{\delta \ddot{x}}{\delta r_1} = \frac{-ACr_1^2 - 2BCr_1 + AD}{\left(Cr_1^2 + D\right)^2}$$

Le numérateur de cette expression est un polynôme du second degré en r_1 qui s'annule pour :

$$r_1 = \frac{-BC \pm \sqrt{(BC)^2 + A^2CD}}{AC}$$

Seule la racine r1>0 à un sens physique.
En remplaçant A,B,C et D par leurs valeurs on obtient le résultat.

$$A = C_m r_2 \frac{2\pi}{p}\eta \qquad B = -Mg$$

$$C = J_m \left(r_2 \frac{2\pi}{p}\right)^2 \eta \qquad D = M + J_v \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 + \left(J_p + M_c R_p^2\right)\left(r_2 \frac{2\pi}{p}\right)^2$$

$$r_1 = \frac{Mg \pm \sqrt{(Mg)^2 + \dfrac{\left(C_m r_2 \frac{2\pi}{p}\eta\right)^2 \left(M + J_v \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 + \left(J_p + M_c R_p^2\right)\left(r_2 \frac{2\pi}{p}\right)^2\right)}{J_m \left(r_2 \frac{2\pi}{p}\right)^2 \eta}}}{C_m r_2 \frac{2\pi}{p}\eta}$$

Si le système est en positon horizontale on obtient un résultat classique :

$$r_1 = \sqrt{\frac{\left(M + J_v\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 + \left(J_p + M_c R_p^{\ 2}\right)\left(r_2\frac{2\pi}{p}\right)^2\right)}{J_m\left(r_2\frac{2\pi}{p}\right)^2\eta}}$$