

Droïdes autonomes : de l'aide aux personnes à la logistique du dernier kilomètre

Corrigé UPSTI

1 Modélisation linéaire du suivi de la trajectoire

- Objectif

Élaborer un modèle linéaire de l'algorithme de suivi de trajectoire « pure pursuit » afin de pouvoir le prendre en compte lors de la conception de la commande en lacet du droïde.

1.1 Suivi de trajectoire « pure pursuit »

- Objectif

Modéliser géométriquement le suivi de trajectoire dans le cas de l'algorithme « pure pursuit ».

Question 2 À partir de la figure 2 et en remarquant que le triangle M, C, P_{LA} est isocèle, exprimer l'angle \widehat{MCP}_{LA} en fonction de α puis montrer que $\rho = \frac{L^2}{2y_{LA}}$.

Or $y_{LA} = L \sin \alpha$, donc $\rho = \frac{L^2}{2y_{LA}}$.

1.2 Analyse du déplacement sur un segment à l'aide d'un modèle linéaire

- Objectif

Élaborer un modèle linéaire du suivi de trajectoire et évaluer l'influence du choix de la longueur L sur les performances (définies ultérieurement) du suivi de trajectoire à la vitesse v_0 .

Question 3 Exprimer en fonction de y , L et θ , les coordonnées de $\overrightarrow{MP_{proj}}$ puis de $\overrightarrow{MP_{LA}}$ dans la base (\vec{x}, \vec{y}) et enfin y_{LA} .

$$y_{LA} = -\theta\sqrt{L^2 - y^2} - y$$

Question 4 À l'aide des équations (I.1), (I.2), (I.3) et (I.4), exprimer en fonction de v_0 et L : $H_2(p)$, les gains K_1 et K_2 .

Ainsi
$$H_2(p) = \frac{Y(p) - \frac{y_0}{p}}{\Theta(p)} = \frac{v_0}{p}$$

Question 5 Exprimer sous forme canonique la fonction de transfert $H_{\Delta}(p) = \frac{\Delta Y(p)}{\Delta Y_{cons}(p)}$ (figure 4). Écrire sous forme littérale la pulsation propre en fonction de v_0 et L . Déterminer les valeurs numériques du gain statique et du coefficient d'amortissement. Commenter la valeur numérique du coefficient d'amortissement au regard de la réponse attendue vis-à-vis d'un échelon.

Question 6 Exprimer la fonction de transfert du suivi de ligne $\frac{Y(p)}{Y_{ini}(p)}$ en fonction de $H_{\Delta}(p)$. Tracer l'allure de l'évolution temporelle de $y(t)$ en réponse à une perturbation constante initiale d'amplitude $y_0 > 0$. Évaluer les performances de la chaîne d'asservissement en réponse à une perturbation d'amplitude y_0 en mettant les

résultats sous la forme d'un tableau comme ci-après. Pour une vitesse v_0 fixée, préciser quelle performance dépend de L .

1.3 Validation du modèle linéaire et condition sur la valeur du paramètre L

- Objectif -

Comparer les performances obtenues en simulation du suivi d'un segment de route du droïde à la vitesse v_0 , en utilisant d'une part l'algorithme « pure pursuit » et, d'autre part, le modèle linéaire du suivi de trajectoire. Choisir une valeur de L .

1.3.1 Simulation du déplacement du droïde avec le modèle linéaire de suivi de trajectoire

Question 7 À partir des équations (I.5), réécrire et compléter les lignes 22 et 24 du code python donné en annexe B.

Question 8 En utilisant le schéma d'Euler explicite, donner l'expression de $\dot{X}(t = i \times Te)$ en fonction de $X(t + Te)$, $X(t)$ et Te . Réécrire et compléter alors la ligne 40 du code python de l'annexe B.

1.3.2 Analyse comparative des résultats de simulation

Question 9 En comparant les performances obtenues en simulation avec le modèle linéaire et l'algorithme « pure pursuit », justifier qu'il est pertinent d'utiliser le modèle linéaire pour choisir le paramètre L de l'algorithme « pure pursuit ».

Lorsque $L = 0,5$ m, le résultat de simulation obtenu avec le modèle linéaire est très proche du résultat obtenu avec l'algorithme « pure pursuit ». L'écart maximal est d'environ 0,02 cm lorsque $y(t) \approx 4$ cm.

Lorsque $L = 0,05$ m, le résultat de simulation obtenu avec le modèle linéaire surestime l'écart par rapport à la trajectoire comparé au résultat de simulation obtenu avec l'algorithme « pure pursuit ».

Il paraît donc pertinent d'utiliser le modèle linéaire pour choisir le paramètre L de l'algorithme « pure pursuit ».

Question 10 Dans le cadre d'un suivi de trajectoire urbain avec « droïde parfait » dont le cahier des charges est donné sur le tableau 1, choisir une valeur de L qui vérifie la condition de linéarisation ($L > 10|y|_{MAXI}$) et conclure vis-à-vis du cahier des charges. Justifier la réponse.

La condition de linéarisation impose $L > 10|y|_{MAXI}$ et le cahier des charges demande $|y|_{MAXI} = 5$ cm. Il faut donc $L \geq 0,5$ m.

De plus, la distance à convergence $t_{r5\%} \times v_0 = \frac{3L}{\sqrt{2}}$ doit être la plus faible possible donc on choisit $L = 0,5$ m.

2 Conception de la commande du droïde TH03

- Objectif

Concevoir une commande du droïde afin de piloter la vitesse de lacet ω conformément à ce que nécessite le guidage avec l'algorithme « pure pursuit »

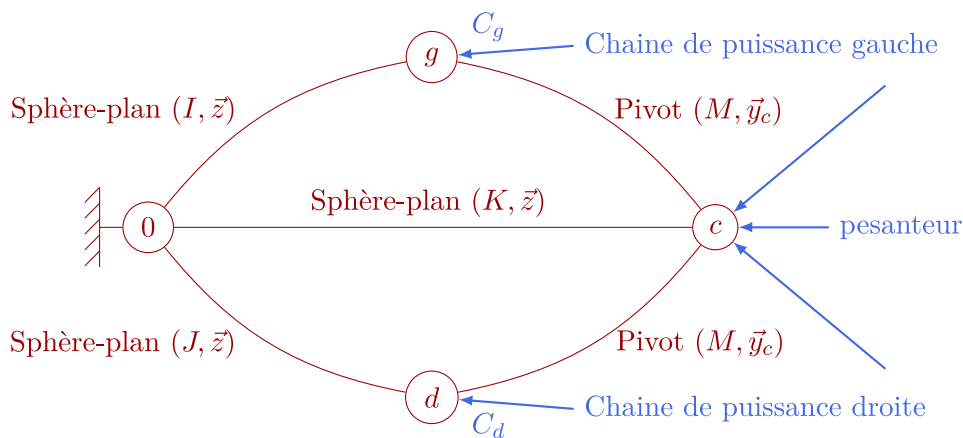
2.1 Modélisation du comportement dynamique du droïde

- Objectif

Déterminer un modèle reliant les variables v_0 , ω , $\dot{\omega}$, C_g et C_d et les grandeurs caractéristiques du système sans perturbation extérieure.

Question 11 Expliquer en quoi une approche énergétique est insuffisante pour atteindre l'objectif fixé.

Question 12 Après avoir représenté un graphe de structure mettant en évidence les solides (c), (g) et (d), les liaisons et les actions mécaniques qui agissent sur ou au sein du droïde, isoler successivement chacune des roues motrices et appliquer le Théorème du Moment Dynamique (TMD) au point M en projection sur \vec{y}_c .



D'où $C_g - RX_g = 0$

$C_d - RX_d = 0$

Question 13 À partir de l'analyse de la forme de l'opérateur d'inertie $I_{G,c}$, préciser l'(les) hypothèse(s) supplémentaire(s) émise(s) au sujet du corps (c), sachant que le chargement des colis est aléatoire.

Question 14 Exprimer sous leur forme la plus simple le moment cinétique en G de (c) par rapport à \mathcal{R} noté $\vec{\sigma}_{G,c/\mathcal{R}}$, puis le moment dynamique en G de (c) par rapport à \mathcal{R} noté $\vec{\delta}_{G,c/\mathcal{R}}$ en fonction de $\theta, \dot{\theta}$ et des éléments d'inertie de (c). Exprimer également sous leur forme la plus simple la vitesse de G de (c) par rapport à \mathcal{R} notée $\vec{v}_{G,c/\mathcal{R}}$ et son accélération notée $\vec{\Gamma}_{G,c/\mathcal{R}}$.

Donc
$$\vec{\delta}_{G,c/\mathcal{R}} = -E\ddot{\theta}\vec{x}_c - E\dot{\theta}^2\vec{y}_c + C\ddot{\theta}\vec{z}_c = \begin{pmatrix} -E\ddot{\theta} \\ -E\dot{\theta}^2 \\ C\ddot{\theta} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{G,c/\mathcal{R}} = v_0\vec{x}_c - a\dot{\theta}\vec{y}_c$$

$$\vec{\Gamma}_{G,c/\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} v_0 + a\dot{\theta}^2 \\ v_0\dot{\theta} - a\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)}$$

Question 15 En isolant l'ensemble $\{(c), (g), (d)\}$, proposer et mettre en œuvre une démarche rigoureuse (inventaire des actions mécaniques, théorème(s) utilisé(s) et projection(s)) permettant de déterminer les équations de mouvement.

Ensemble isolé : $\{(c), (g), (d)\}$

$$\begin{aligned}
 \text{BAME : } T_{0 \rightarrow g} &= \begin{Bmatrix} X_g & 0 \\ Y_g & 0 \\ Z_g & 0 \end{Bmatrix}_{I,(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)} ; T_{0 \rightarrow d} = \begin{Bmatrix} X_d & 0 \\ Y_d & 0 \\ Z_d & 0 \end{Bmatrix}_{J,(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)} ; T_{0 \rightarrow c} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{0 \rightarrow c} = N_K \vec{z}_c \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_K ; \\
 T_{pes \rightarrow c} &= \begin{Bmatrix} -mg\vec{z}_c \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G
 \end{aligned}$$

Question 16 En tenant compte des résultats obtenus aux quatre questions précédentes, montrer que le modèle dynamique du droïde se réduit finalement au système d'équations (II.1), où λ_1 , λ_2 , λ_3 et λ_4 sont des constantes à exprimer en fonction de a , m , R , l et/ou C .

On obtient bien le système d'équation demandé avec $\lambda_1 = a$; $\lambda_2 = \frac{l}{R(C + ma^2)}$; $\lambda_3 = \frac{1}{mR}$; $\lambda_4 = \frac{-am}{C + ma^2}$

2.2 Conception de la loi de commande de la vitesse de lacet

- Objectif

Déterminer les correcteurs de l'asservissement de la vitesse de lacet ω et tenir compte des performances de cet asservissement pour affiner les réglages de L et v_0 .

2.2.1 Réglage du gain $K_{p\Omega}$ du correcteur de la commande en lacet ω

- Objectif

Prendre en compte les limites en courant des motorisations afin de régler le gain $K_{p\Omega}$ du correcteur de la commande en lacet.

Question 17 À partir du modèle de la figure 8 et du cahier des charges du tableau 2, justifier le choix d'une correction de type Proportionnel Intégral.

Question 18 En utilisant le modèle de la figure 8 et le théorème de la valeur initiale, montrer qu'il est nécessaire de vérifier $K_{p\Omega} \leq \frac{|i_m|_{MAX}}{2|\sin \alpha|_{MAX}} \times \frac{L}{v_0}$ afin de limiter le courant dans les moteurs.

2.2.2 Influence du couplage entre les asservissements de v_0 et de ω

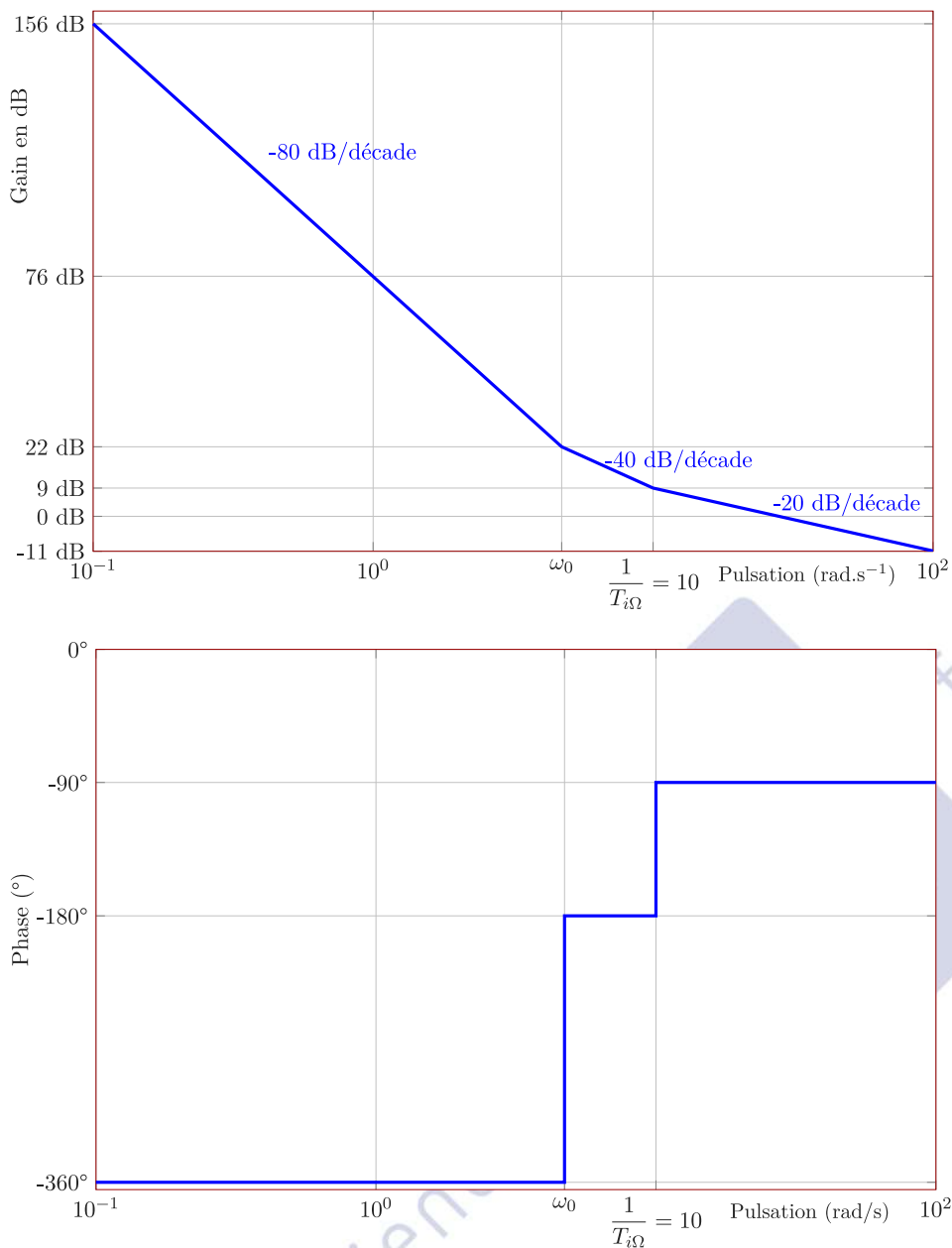
- Objectif -

Évaluer l'influence du couplage des asservissements sur le réglage du correcteur de l'asservissement de la vitesse de lacet ω et celle de la valeur de L sur les performances obtenues.

Question 19 À partir du modèle de la figure 9, montrer qu'il est possible d'exprimer $FTBO_{\Omega}(p) = -\frac{S(p)}{E(p)}$ sous la forme : $FTBO_{\Omega}(p) = K_{BO} \frac{v_0}{T_{i\Omega} p^4} \left(1 + T_{i\Omega} p \right) \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)$ avec $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\omega_0 = \sqrt{2} \frac{v_0}{L}$. Exprimer K_{BO} en fonction des paramètres du modèle de la figure 9.

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{v_0}{L} \sqrt{2}, \xi = \frac{L}{v_0} \times \frac{\omega_0}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } K_{BO} = K_{p\Omega} \frac{4v_0}{L^2} \lambda_2 K_m K_r$$

Question 20 Tracer sur la copie les diagrammes de Bode asymptotiques de la fonction $FTBO_{\Omega}(p)$, pour les pulsations comprises entre 0,1 et 100 rad.s⁻¹, $FTBO_{\Omega}(p) = \frac{6300}{p^4} (1 + 0,1p) \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4,72} p + \frac{p^2}{4,72^2} \right)$ obtenue en prenant en compte le couplage et avec $K_{p\Omega} = 37$ et $T_{i\Omega} = 0,1$ s. Indiquer les valeurs des pentes, des pulsations, des gains et des phases remarquables tout en situant les origines des repères (axe 0 dB et 0 degrés).



Question 21 À partir des tracés asymptotiques et des résultats de simulation de l’annexe C, justifier qu’il est pertinent d’utiliser le modèle de boucle ouverte sans prise en compte du couplage (figure 9). Quelle est alors l’influence d’une diminution du seul paramètre L (v_0 et $K_{p\Omega}$ inchangés) sur les performances de l’asservissement de vitesse de lacet ω ?

Pour $T_{i\Omega} = 0,1$ s, l’annexe C montre que les diagrammes de Bode obtenus avec et sans couplage sont superposés. Les allures obtenues pour les autres valeurs de $T_{i\Omega}$ sont similaires au profil asymptotique déterminé à la question précédente (pente de -80 dB/décade puis de -40 dB/décade puis de -20 dB/décade) donc la prise en compte du couplage pour l’étude de la FTBO ne semble pas nécessaire.

Diminuer L permet d’augmenter K_{BO} et ω_0 . Donc la pulsation de coupure à 0 dB de la FTBO sera peu impactée mais la marge de phase diminuera (la phase asymptotique passe de -360° à -180° à la pulsation ω_0 donc si ω_0 augmente, la phase sera proche de -360° pour une plus grande bande passante).

Si L diminue, le système en boucle fermée sera moins stable.

2.2.3 Réglage du temps $T_{i\Omega}$ de la commande en lacet ω

- Objectif

Utiliser des résultats de simulation et l'analyse fréquentielle de la boucle ouverte afin de choisir une valeur pour le paramètre $T_{i\Omega}$ du correcteur de la commande en lacet.

Question 22 Que modélisent les composantes d'action mécanique T_I , T_J et Y_J ? Justifier le choix d'avoir modélisé $\vec{R}_{0 \rightarrow g} \cdot \vec{y}_c = Y_I = 0$ du point de vue de la résolution du système d'équations issu de l'application du PFD à l'ensemble $\{(c), (d), (g)\}$.

Question 23 Donner l'expression du couple perturbateur issu de l'action du trottoir sur la roue gauche, noté C_{pg} , en fonction de d et F_s . L'exprimer à nouveau en fonction de F_s , v_0 , d_{init} et du temps t écoulé depuis l'instant du contact de la roue avec le trottoir.

$$C_{pg} = -dF_s$$

$$\Rightarrow C_{pg} = -F_s(d_{init} - v_0 t) \text{ si } t \in \left[0; \frac{d_{init}}{v_0}\right]$$

Question 24 En exploitant l'expression obtenue, tracer l'allure de l'évolution temporelle de C_{pg} pour un droïde avançant à la vitesse $\vec{v}_{M,c/\mathcal{R}} = v_0 \vec{x}$ avec v_0 constante lors du contact avec un trottoir. Préciser les points caractéristiques de la courbe.

Question 25 À partir des résultats de simulation de la figure 10 et des analyses fréquentielles de l'annexe C, choisir une valeur de $T_{i\Omega}$ pour $K_{p\Omega} = 37$ qui respecte le cahier des charges du tableau 2.

On choisit $T_{i\Omega} = 0,1$ s afin de respecter l'ensemble des exigences du cahier des charges.

3 Stratégie de planification de trajectoire

- Objectif

Concevoir et valider un algorithme de planification de trajectoire en vue d'organiser une tournée de livraison de colis qui :

- minimise la quantité d'énergie consommée par le robot ;
- ne passe qu'une et une seule fois par chaque point de livraison.

3.1 Matrice des quantités d'énergies

- Objectif

Modéliser la dépense énergétique du droïde lors des trajets entre deux points de livraison.

Question 26 Expliquer ce que représentent les termes notés « inf » et, compte-tenu du graphe de la figure 11, préciser les valeurs des termes : $\text{cout}[3,4]$, $\text{cout}[2,3]$ et $\text{cout}[2,1]$. Au vu du contexte d'utilisation du droïde, donner deux raisons possibles qui expliquent pourquoi la matrice « cout » n'est pas complètement symétrique.

3.2 Formalisation du sous-problème

- Objectif

Écrire une ou plusieurs équations permettant de déterminer la trajectoire passant une seule fois par tous les points de livraison et qui minimise la quantité d'énergie totale consommée par le droïde sur sa tournée.

Question 27 Compléter la deuxième équation du système (III.1), en fonction de count_{ij} , P et j , afin d'établir la relation de récurrence qui permet de traduire correctement la fonction objectif.

3.3 Implémentation de l'équation de la programmation dynamique et résolution du problème

- Objectif

Analyser et compléter le script python qui implémente l'algorithme de planification de trajectoire, puis valider les résultats obtenus.

Question 28 Compléter la ligne 26 du script de l'annexe D afin d'implémenter complètement l'équation de la programmation dynamique (III.1).

Question 29 Expliquer le rôle des lignes 32 à 42 du script de l'annexe D et compléter en conséquence les lignes 40 et 41.

Les lignes 32 à 42 permettent de calculer le trajet optimal par l'algorithme type Dijkstra. L'algorithme détermine pas à pas, le trajet optimal, dont le coût (ou l'énergie dépensée) est le moins élevé qui passe par tous les points de livraison une seule fois. Lorsqu'un point de livraison a été ajouté au trajet, il est retiré de la liste des points non encore livrés.

Ligne 40 : `tr_opt.append(j)`
Ligne 41 : `P = soustraction(P,j)`

Question 30 Interpréter les résultats obtenus.

4 Synthèse

- Objectif

À l'aide des résultats de simulation du suivi d'un parcours liant plusieurs points de livraison, valider les choix et les réglages élaborés dans les parties précédentes.

Question 31 À partir des courbes de simulations fournies, expliquer quelle caractéristique de la trajectoire planifiée impacte directement l'amplitude de l'écart entre le droïde et la trajectoire planifiée. Justifier la réponse en analysant simultanément les courbes de trajectoire et de courant moteur. Quelles sont les conséquences sur le choix de $K_{p\Omega} \leq \frac{|i_m|_{MAX}}{2|\sin \alpha|_{MAX}} \times \frac{L}{v_0}$ et sur la saturation des courants moteurs ?

Question 32 En indiquant les numéros de figures dont le ratio de simulation $\frac{v_0}{L}$ est identique, indiquer les performances qui sont comparables et celles qui diffèrent (il est possible de focaliser l'analyse sur le voisinage du point P_4). Que permet de vérifier la troisième simulation ? Quelle conséquence le choix de $\frac{v_0}{L}$ a-t-il sur la durée totale d'une tournée de livraison ?

Question 33 Proposer une solution relative au choix du couple de valeurs (L, v_0) afin de minimiser la durée d'une tournée de livraison, sachant que le droïde se déplace le long d'une trajectoire planifiée à l'avance.