

---

# AMELIORER LES PERFORMANCES DES SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS INVARIANTS (SLCI) A L'AIDE DE CORRECTEUR

---

## Sommaire

---

<b>1. Introduction .....</b>	<b>2</b>
1.1. Généralités .....	2
1.2. Dilemme stabilité - précision - rapidité .....	3
<b>2. Les correcteurs classiques .....</b>	<b>4</b>
2.1. Correcteur par action proportionnelle .....	4
2.2. Correcteur par actions proportionnelle et intégrale (PI) .....	5
2.3. Correcteur par actions proportionnelle et dérivée (PD) .....	7
2.4. Correcteur par actions proportionnelle, intégrale et dérivée (PID) .....	9
<b>3. La correction par boucle secondaire (ou correction parallèle).....</b>	<b>10</b>
<b>4. Les correcteurs numériques (pour aller plus loin !) .....</b>	<b>10</b>
4.1. Introduction.....	10
4.2. Incidence sur la stabilité.....	10
4.3. Correction numérique pour un correcteur à avance phase .....	11
4.4. Correction numérique pour un correcteur PID .....	12
<b>5. Résumé sur les correcteurs classiques .....</b>	<b>14</b>

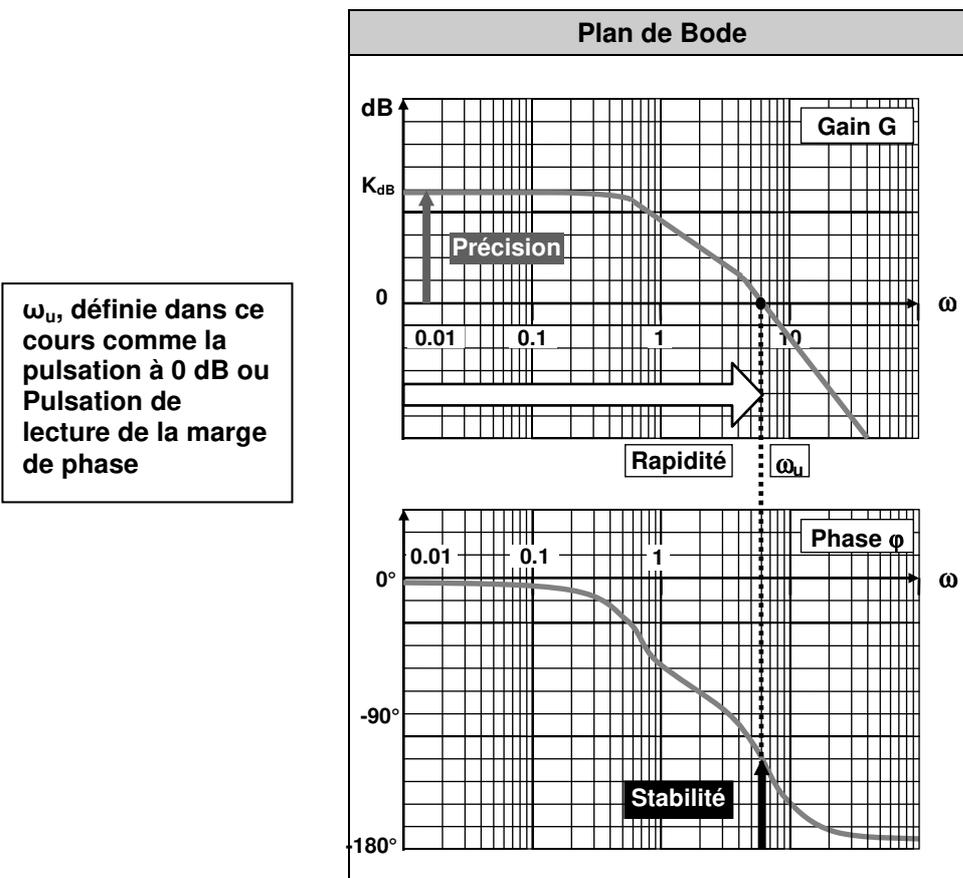
# 1. Introduction

## 1.1. Généralités

Une boucle d'asservissement répond à un besoin (garantir la position d'un mobile, sa vitesse en toutes circonstances, reproduire aussi fidèlement que possible une consigne, etc.). Les exigences permettant de quantifier ce besoin se traduisent par des performances attendues. Ces performances et leurs niveaux sont consignés dans le **Cahier des Charges Fonctionnelles (CdCF)** :

- Précision ( $\epsilon_s, \epsilon_T, \dots$ ), Amortissement, Dépassement (**D%**) ou non (liée à la marge de stabilité) , Rapidité ( $t_{r5\%}$ ).

Le concepteur intègre ces contraintes dans ses calculs d'avant-projet en évaluant dans un premier temps les performances intrinsèques du système, puis en les améliorant par une **correction** ou **compensation**. Cette dernière est effectuée dans le **domaine fréquentiel** en travaillant sur la réponse harmonique en **BO** dans le plan de Bode.



### ▪ La stabilité

La **stabilité** est liée aux caractéristiques de la FTBO au voisinage de  $\omega_u$ .

$\omega_u$ , définie dans ce cours comme la pulsation à 0 dB ou Pulsation de lecture de la marge de phase

Un système est d'autant plus stable en BF que sa marge de phase  $M\phi$  est importante.

### ▪ La précision

La **précision** est conditionnée par la forme de la FTBO aux "basses fréquences".

Elle requiert un **gain élevé**  $K_{dB} = 20 \cdot \log_{10} K$  et / ou une plusieurs **intégrations** en BO.

### ▪ La rapidité

La **rapidité** est conditionnée par la caractéristique de la FTBO aux "hautes fréquences".

Elle exige une **bande passante** ( $\omega_u$ ) à 0 dB du système la plus grande possible.

**1.2. Dilemme stabilité - précision - rapidité**

Pour mettre en évidence l'opposition entre les exigences souhaitées, examinons les effets contradictoires d'une variation du gain statique **K** de la FTBO sur les différents diagrammes. On prend comme exemple :

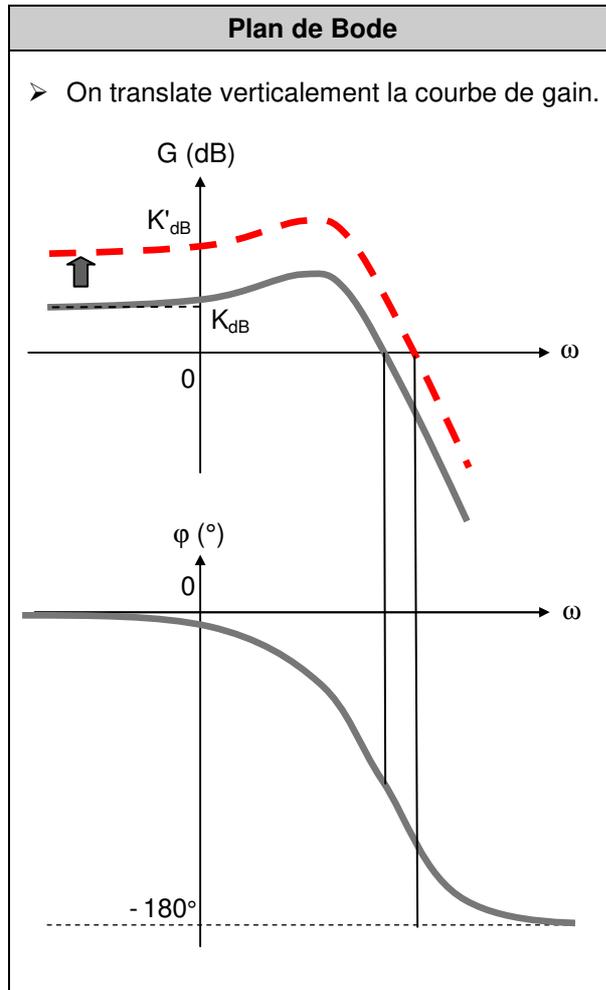
$$H_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \dots}$$

☞ **Que deviennent les différents diagrammes lorsque le gain statique passe de K à K' > K ? Vous tracerez les évolutions en pointillés (---).**

**On translate ici de la valeur :**

$$20 \log \left( \frac{K'}{K} \right)$$

Car K initial = K



**CONCLUSION**

- +** : Toute augmentation de **K** **améliore** la **PRECISION** ;
- +** : " " **augmente** la **BANDE PASSANTE** (rapidité) ;

**MAIS**

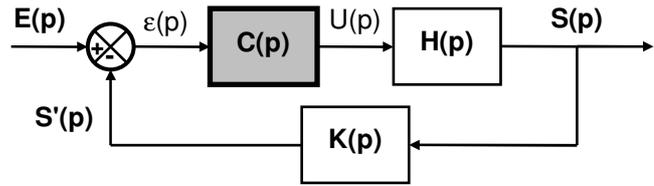
- : " " **diminue** la **STABILITE**.

Si **K** est **faible**, la stabilité sera **très bonne** mais l'asservissement sera "**mou**" (peu rapide et précis). Avec **K élevé**, on "**raidit**" l'asservissement mais on risque l'instabilité. Comme ce paramètre est facile à régler, le gain optimum pour une application donnée sera un **compromis entre la stabilité et les autres performances**.

Pour maîtriser séparément chacun des aspects évoqués, il est donc nécessaire d'adopter des stratégies de correction qui permettent des modifications "**locales**" de la réponse harmonique en **BO**.

## 2. Les correcteurs classiques

En pratique, les correcteurs sont insérés dans la chaîne directe, en sortie du comparateur afin de travailler sur des signaux peu énergétiques, et en série avec le processus. On parle de **correction série**.



Ils ont pour but de délivrer un signal de commande  $u(t)$  de manière à préserver les exigences de **précision** et **stabilité** à priori incompatibles. On distingue trois fonctions principales :

- **L'action proportionnelle P :**  $u(t) = K \cdot \varepsilon(t) \Rightarrow U(p) = K \cdot \varepsilon(p)$
- **L'action intégrale I :**  $u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) \cdot d\tau \Rightarrow U(p) = \frac{\varepsilon(p)}{T_i \cdot p}$
- **L'action dérivée D :**  $u(t) = T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \Rightarrow U(p) = T_d \cdot \varepsilon(p) \cdot p$

### 2.1. Correcteur par action proportionnelle

Dans ce type de correcteur, le signal de commande  $u(t)$  est proportionnel au signal d'erreur  $\varepsilon(t)$  :

$$\boxed{u(t) = K \cdot \varepsilon(t)} \Rightarrow \boxed{C(p) = K}$$

En raison des effets contradictoires induits, on choisit comme critère principal, le **réglage de la stabilité**. On réglera  $K$  à partir du diagramme de Bode de la FTBO pour obtenir  $M\phi = 45$  à  $60^\circ \Rightarrow D1\% = 10$  à  $20\%$ .

□ **Exemple :** On donne

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{p \cdot (1 + 0,1p) \cdot (1 + 0,2p)}$$

✍ **Déterminer à partir du diagramme de Bode de la FTBO la valeur de  $K$  pour avoir  $M\phi = 45^\circ$  ?**

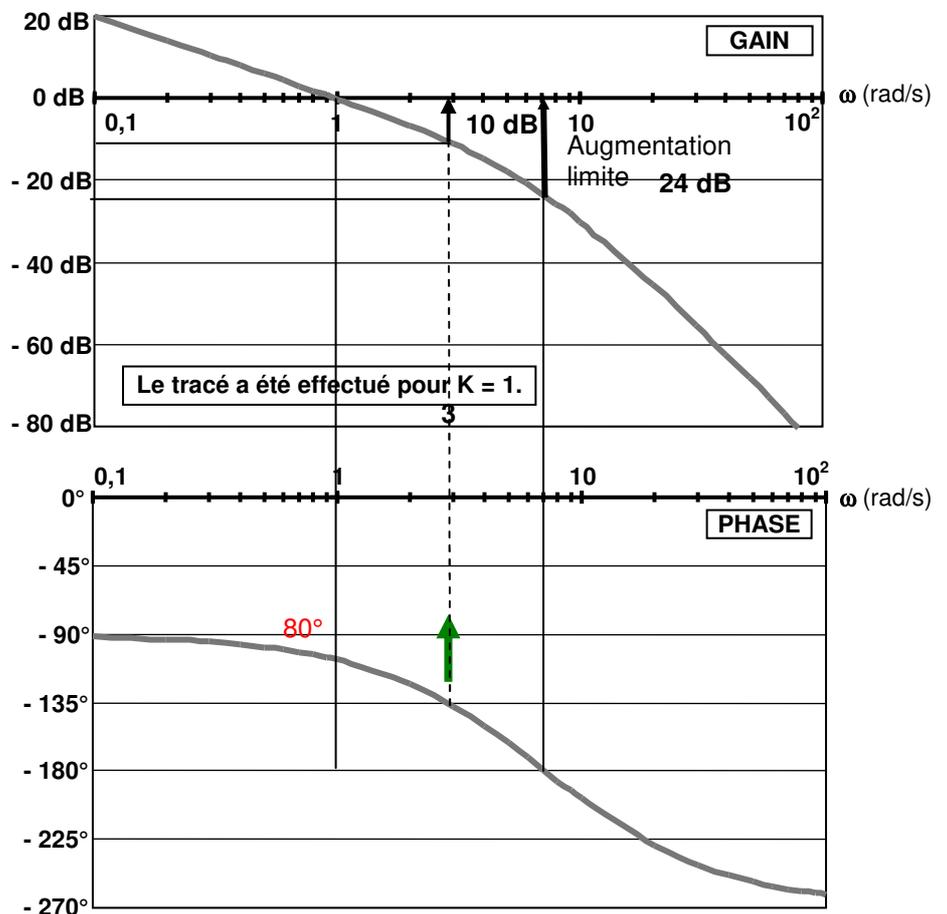
$$\omega_u = 1 \text{ rad/s}$$

✍ **Quelle serait la valeur correspondante de  $\omega_u$ , pulsation pour laquelle je lis  $M\phi$  pour la FTBO non corrigée ?**

$$20 \log(K) = 10$$

✍ **Pour quelles valeurs de  $K_{lim}$  le système deviendrait-il instable ?**

$$20 \log(K_{lim}) = 24$$



## 2.2. Correcteur par actions proportionnelle et intégrale (PI)

▪ **L'action intégrale permet d'annuler l'erreur statique  $\epsilon_S$ .**

Pour ne pas altérer la stabilité réglée par l'action proportionnelle (gain **K**), le correcteur doit donc procurer une augmentation du gain aux "**basses fréquences**" uniquement.

Le plus simple serait d'introduire un intégrateur pur qui donnerait un gain infini aux "basses fréquences" et de ce fait entraînerait une erreur statique nulle. Malheureusement, il aurait pour effet immédiat de déstabiliser le système en retirant **90°** de phase à toutes les fréquences.

On préfère utiliser un correcteur qui présente les mêmes caractéristiques aux basses fréquences" mais sans accroître le déphasage aux "hautes fréquences".

Dans ce type de correcteur, le signal de commande  $u(t)$  est lié au signal d'erreur  $\epsilon(t)$  par :

$$u(t) = K \cdot \left( \epsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \epsilon(\tau) \cdot d\tau \right) \Rightarrow C(p) = \frac{U(p)}{\epsilon(p)} = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right) = K \left( \frac{T_i p + 1}{T_i p} \right)$$

✍ **Tracer le diagramme de Bode de ce correcteur sur le graphe ci-contre.**

On constate que ce correcteur n'influence pas la phase pour  $\omega > 10 \cdot \omega_i$ .

✍ **Calculer la valeur de  $\phi_C$  pour  $\omega = 10 \cdot \omega_i$ .**

$$\phi_C = \text{Arctan}(10) - 90^\circ \approx -6^\circ$$

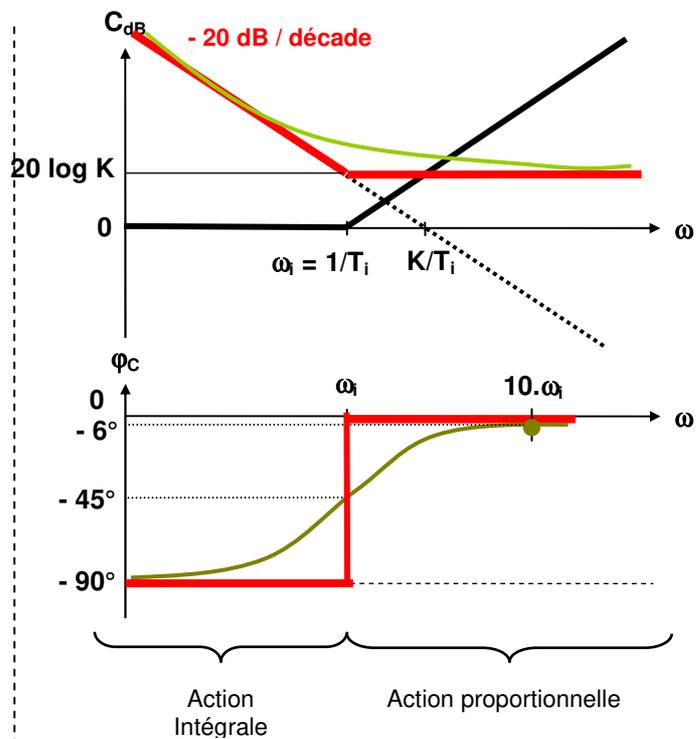
### Placement :

Si le système ne possède pas trop de marge de phase ( $M\phi \approx 45^\circ$ ), on place le correcteur PI à une décade en avant de la pulsation  $\omega_U$  de la FTBO pour ne pas trop réduire **M $\phi$**  :

$$\omega_i \approx \omega_U / 10$$

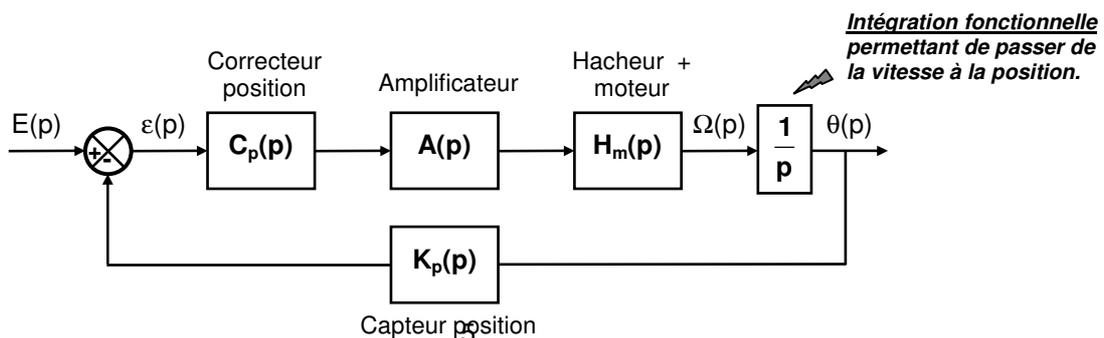
Sinon, on peut le placer plus près jusqu'à :

$$\omega_U / 4$$



L'autre solution consiste à **compenser le pôle dominant** s'il est connu.

Lorsque la boucle ouverte du système non corrigé présente déjà une intégration, l'action intégrale est inutile. C'est le cas d'un **asservissement de position**.



□ **Exemple** : On donne

$$H_{BO}(p) = \frac{15}{(1+0,01p) \cdot (1+0,1p)}$$

Le système avant correction présente une marge de phase de  $48^\circ$  pour  $\omega_U = 110 \text{ rad/s}$ .

Si on désire  $\epsilon_S = 0$ , il faut ajouter un correcteur à **action intégrale**.

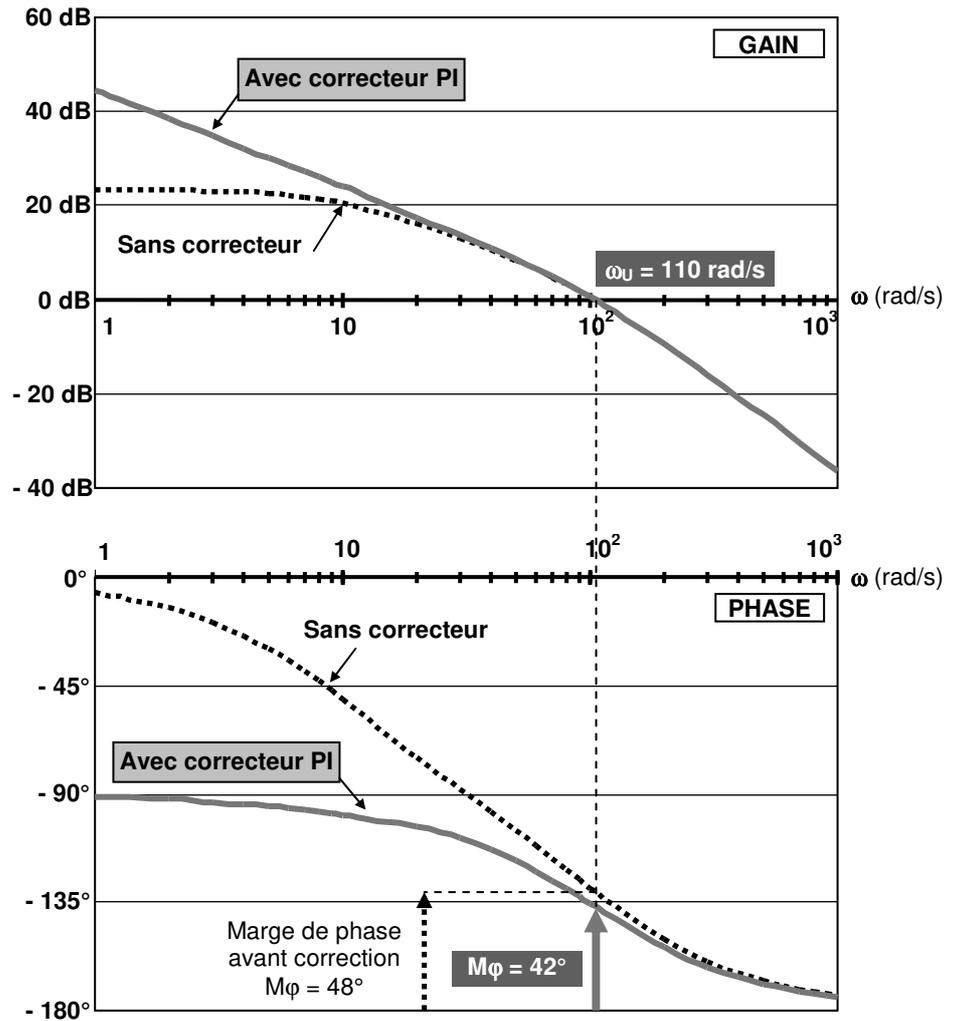
Comme la marge de phase est limite, il faut placer ce correcteur de manière à ne pas trop la réduire. En plaçant la pulsation de cassure du correcteur à  $\omega_i \approx \omega_U / 10$ , on ne retire que  $6^\circ$  à la marge de phase existante.

$$\omega_i = \frac{\omega_U}{10} = 11 \text{ rad/s}$$

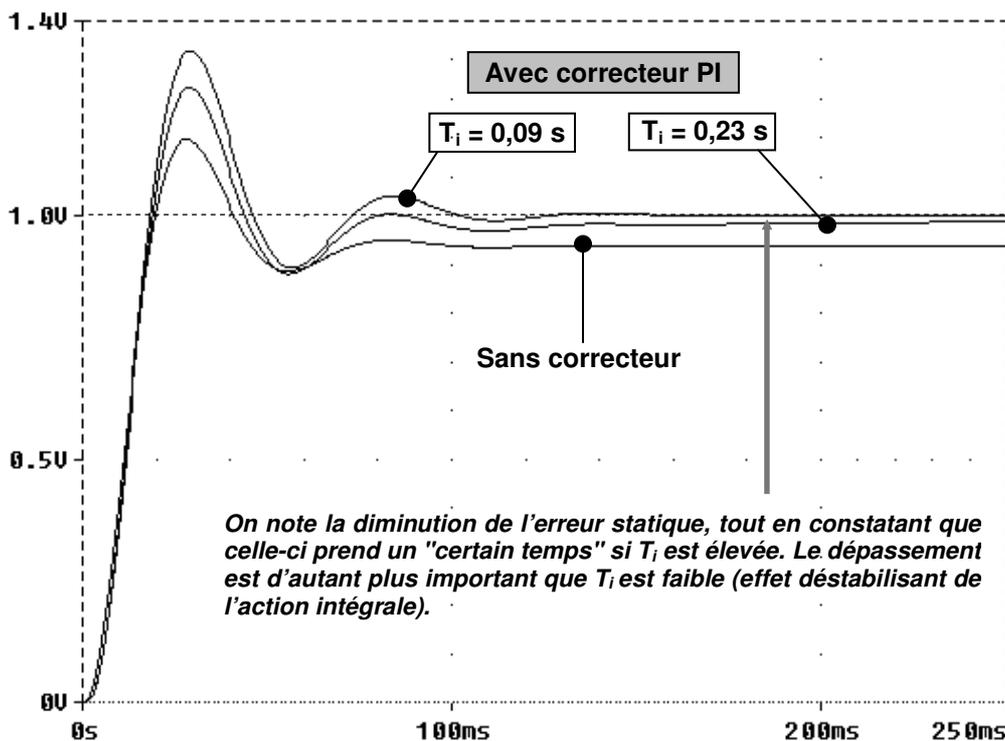
$$\Rightarrow T_i = \frac{1}{\omega_i} = 0,09 \text{ s}$$

$$\Rightarrow C(p) = \frac{1+0,09p}{0,09p}$$

Si on place  $\omega_i$  à plus d'une décade en avant de  $\omega_U$ , on ne gagne rien en précision, mais **on ralentit à l'approche de la valeur finale**.



En d'autres termes, plus l'action intégrale agit dans les "hautes fréquences" ( $T_i$  faible), plus elle est rapide, mais elle risque de perturber la stabilité du système. Une simulation permet de vérifier le résultat obtenu (système bouclé à retour unitaire) en observant la réponse indicielle  $s(t)$  à un échelon  $e(t)$  de  $1 \text{ V}$  en entrée :



### 2.3. Correcteur par actions proportionnelle et dérivée (PD)

On modifie avec ce type de correction le comportement du système aux alentours de la pulsation de coupure à 0 dB ( $\omega_U$ ) de la FTBO :

- Soit pour stabiliser un système ne possédant pas assez de marge de phase ;
- Soit pour augmenter le gain (donc la rapidité) sans déstabiliser le système.

Dans ce type de correcteur, le signal de commande  $u(t)$  est lié au signal d'erreur  $\varepsilon(t)$  par :

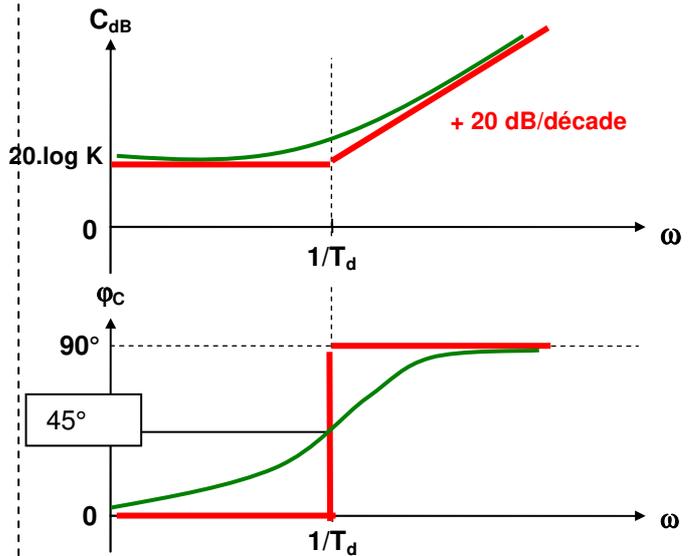
$$u(t) = K \cdot \left( \varepsilon(t) + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right)$$

Donner la fonction de transfert  $C(p)$  de ce correcteur :

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K(1 + T_d p)$$

Tracer le diagramme de Bode de ce correcteur sur le graphe ci-contre.

\* **Problème** : Cette fonction de transfert n'est pas réalisable car elle amplifie tous les bruits HF. De plus elle est non réalisable physiquement car l'ordre du numérateur est supérieur à celui du dénominateur.



En pratique, on coupe la bande passante en HF en limitant le gain. La fonction de transfert s'écrit ( $0 < a < 1$ ) :

$$C(p) = K \cdot \frac{1 + T_d p}{1 + a T_d p}$$

Tracer le diagramme de Bode de ce correcteur sur le graphe ci-contre.

Caractéristiques du correcteur :

$$\begin{cases} \varphi_c(\omega) = \text{Arctg}(T_d \omega) - \text{Arctg}(a T_d \omega) \\ C_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} \left( K \sqrt{\frac{1 + (T_d \omega)^2}{1 + (a T_d \omega)^2}} \right) \end{cases}$$

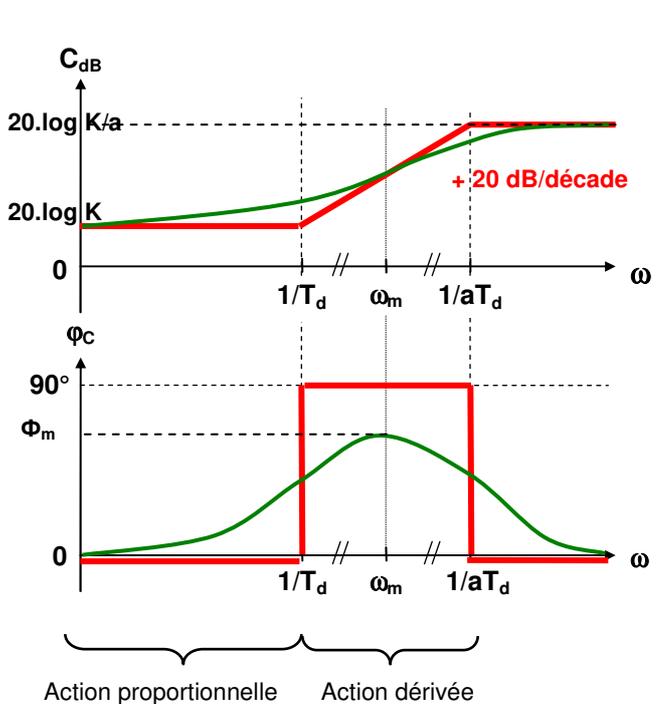
Le maximum est obtenu pour :

$$\frac{d\varphi_c(\omega_m)}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_m = \frac{1}{\sqrt{a} T_d}$$

$\omega_m$  est au milieu de  $1/T_d$  et  $1/aT_d$  en échelle logarithmique. Pour cette pulsation :

$$\varphi_m = \arcsin \frac{1-a}{1+a}$$

$$G_m = 20 \log_{10} \left( \frac{K}{\sqrt{a}} \right)$$



Un tel correcteur est aussi appelé **correcteur à avance de phase**. Il n'y a pas de méthode générale de réglage d'un tel correcteur (cf. TP simulation). Simplement, il introduit une action dérivée dans une bande de fréquences qui devra coïncider avec la pulsation  $\omega_U$  de la FTBO à corriger.

☐ **Exemple** : On donne

$$H_{BO}(p) = \frac{1}{p \cdot (1+2p) \cdot (1+0,2p)}$$

Le système avant correction présente une marge de phase de  $32^\circ$ . Cela correspond à un dépassement indiciel important ( $> 30\%$ ). Pour le réduire, il faut augmenter la marge de phase. On prend par exemple  $60^\circ$  pour limiter le dépassement à  $\approx 10\%$ .

✍ **En déduire l'avance de phase apportée par le correcteur puis les valeurs de a et  $T_d$ .**

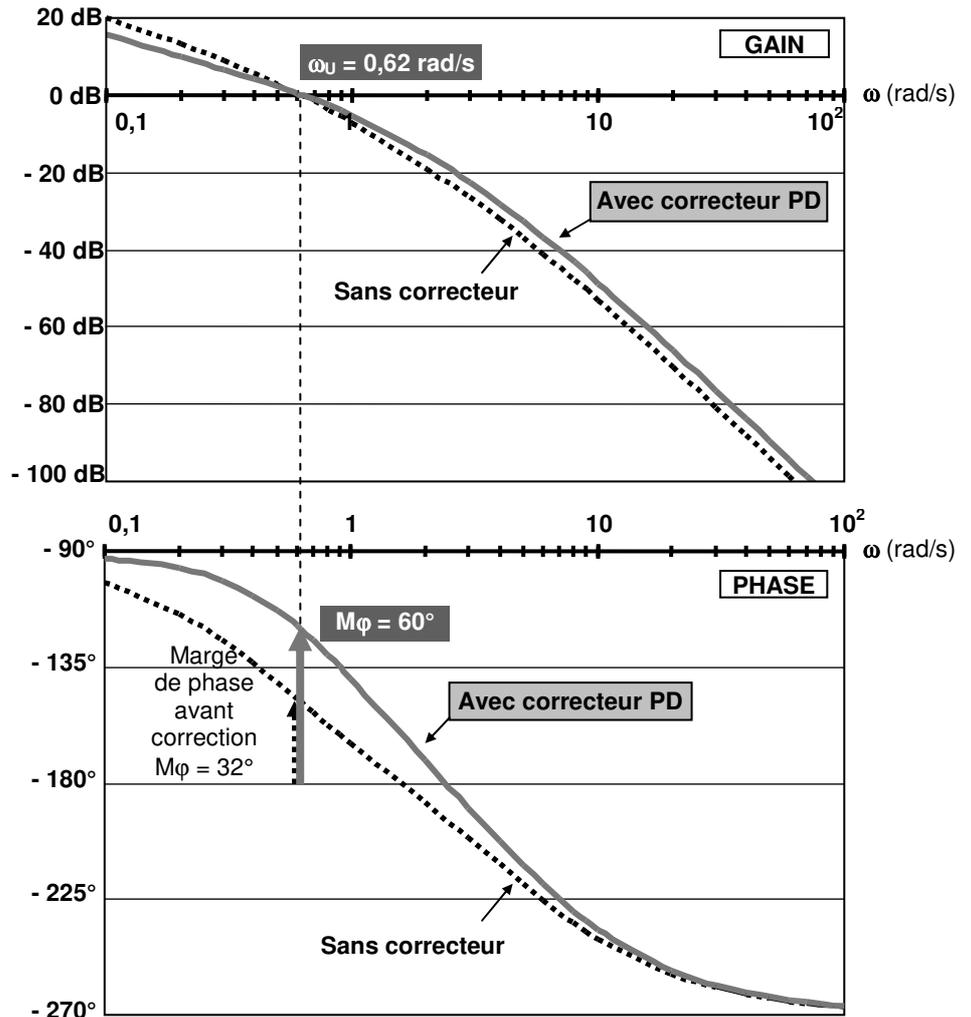
$$\varphi_m = \arcsin \frac{1-a}{1+a} = 28^\circ \rightarrow a = 0,36$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a} T_d} = 0,62 \text{ rad.s}^{-1} \rightarrow T_d = 2,68s$$

Le gain apporté par **C(p)** à la pulsation  $\omega_m = \omega_U$  doit être nul.

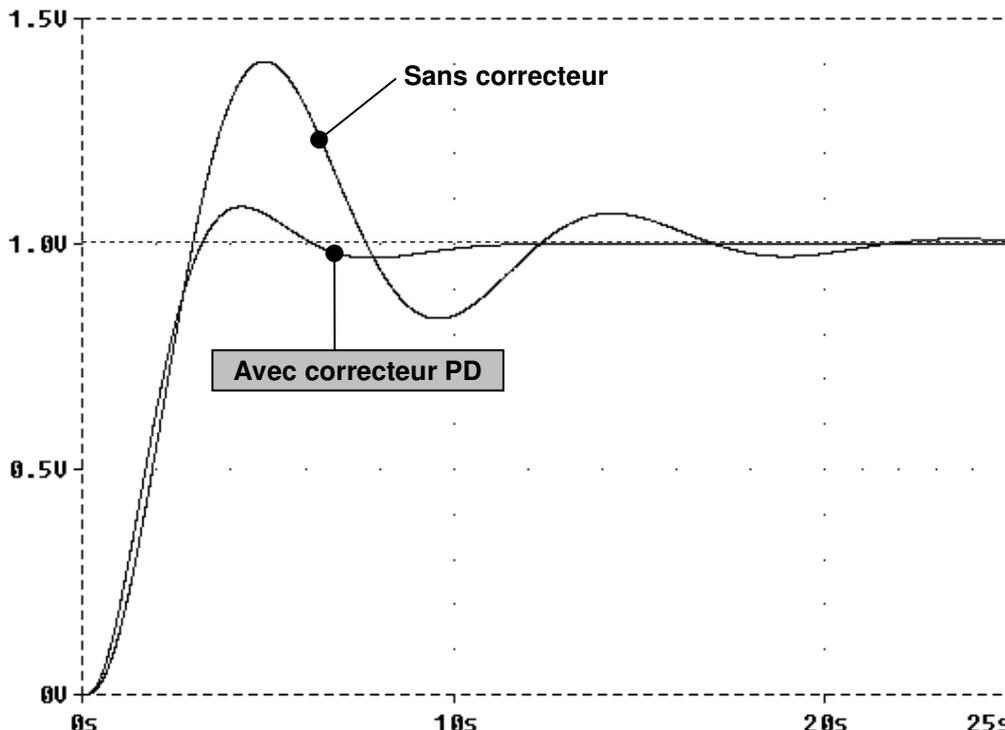
✍ **En déduire la valeur de K.**

$$G_m = 20 \log_{10} \left( \frac{K}{\sqrt{a}} \right) = 0 \rightarrow K = 0,6$$



La fonction de transfert du correcteur a donc pour expression :  $C(p) = 0,6 \frac{(1+2,68p)}{(1+0,97p)}$

Une simulation permet de vérifier le résultat obtenu (système bouclé à retour unitaire) en observant la réponse indicielle  $s(t)$  à un échelon  $e(t)$  de **1 V** en entrée :



## 2.4. Correcteur par actions proportionnelle, intégrale et dérivée (PID)

Le correcteur "dérivé" et le correcteur "intégral" concernent des domaines de fréquences très différents (basses fréquences pour l'intégral et hautes fréquences pour le dérivé), il est parfois judicieux d'associer les deux correcteurs en un seul. On obtient alors un correcteur **PID** qui améliore les performances globales. Le signal de commande  $u_{(t)}$  est lié au signal d'erreur  $\varepsilon_{(t)}$  par :

$$u_{(t)} = K \cdot \left( \varepsilon_{(t)} + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon_{(\tau)} d\tau + T_d \frac{d\varepsilon_{(t)}}{dt} \right) \Rightarrow C(p) = K \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$$

La fonction de transfert  $C(p)$  du correcteur s'écrit encore : 
$$C(p) = K \cdot \frac{1 + T_i p + T_i T_d p^2}{T_i p}$$

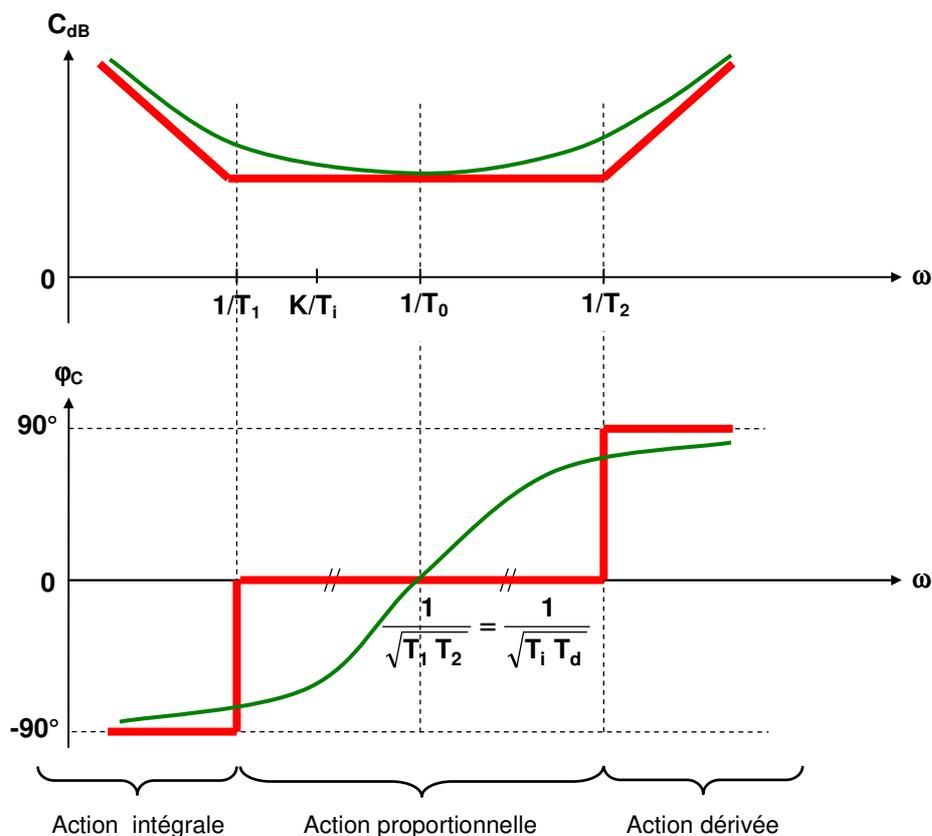
Une des configurations couramment rencontrées utilise un PID avec  $T_i \geq 4T_d$ .

On montre alors que le numérateur s'exprime sous la forme d'un produit de 2 premiers ordres :

$$C(p) = K \cdot \frac{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}{T_i p}$$

avec : 
$$T_1 = \frac{T_i}{2} \cdot \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{4T_d}{T_i}} \right] \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{T_i}{2} \cdot \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4T_d}{T_i}} \right]$$

✍ Tracer le diagramme asymptotique de ce correcteur pour  $K > 1$  :

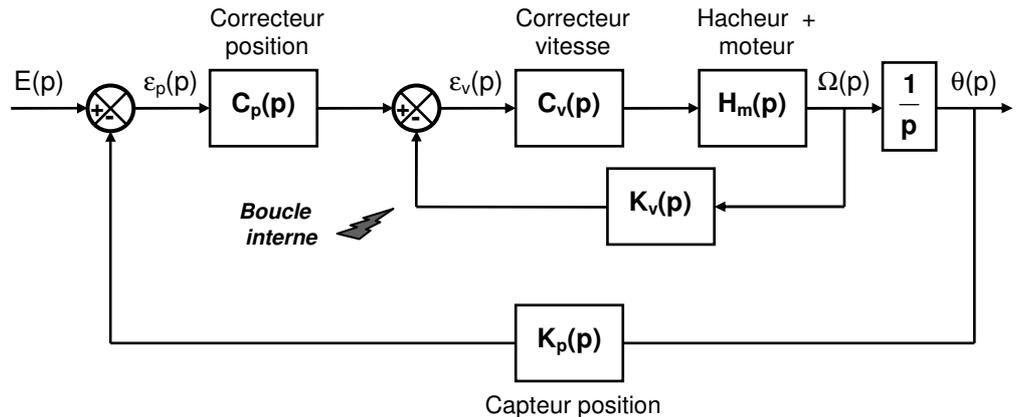


Différentes techniques sont utilisées pour dimensionner un PID. La plus répandue est celle de **Ziegler et Nichols**. L'objectif ici est de ne pas rentrer dans le détail de ces techniques. De nombreux ouvrages l'évoquent (cf. cours écoles d'ingénieurs).

### 3. La correction par boucle secondaire (ou correction parallèle)

La structure de la boucle est modifiée par l'introduction d'une **boucle interne** agissant sur la dérivée de la grandeur commandée.

C'est la solution classique retenue en asservissement de position où une boucle de retour en vitesse vient s'insérer dans la boucle de position.

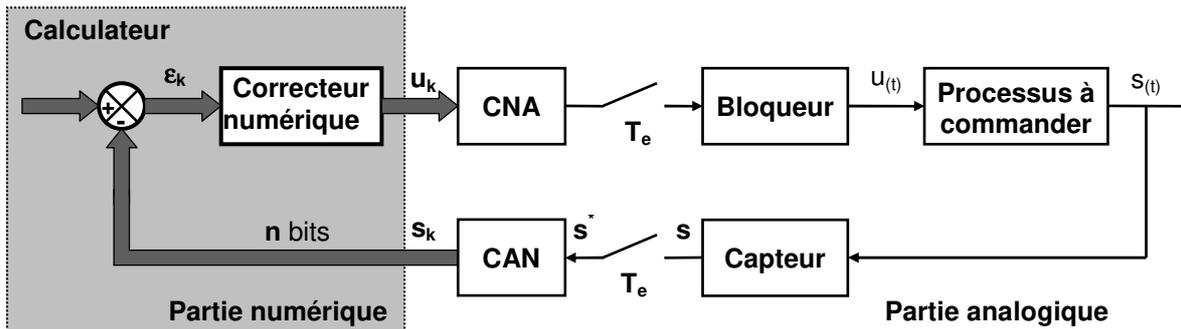


### 4. Les correcteurs numériques

(pour aller plus loin !)

#### 4.1. Introduction

La commande des procédés a subi deux importantes révolutions dans les années 1970 : la montée en puissance des composants de l'électronique de puissance et le développement des organes numériques programmés : **microprocesseurs** et **microcontrôleurs**. Le schéma fonctionnel de l'asservissement se résume alors à la configuration suivante :

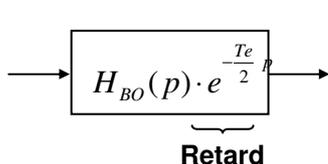


Cette évolution apporte sur le plan logiciel de nombreux avantages comme **l'utilisation d'algorithmes complexes de correction** et la surveillance de défauts (dépassement d'erreur, ...).

- **Le CAN** : Le **C**onvertisseur **A**nalogique / **N**umérique reçoit une grandeur physique (tension électrique) et fournit, périodiquement (période  $T_e$ ), au calculateur une suite de nombres.
- **Le calculateur** effectue les opérations tels que le décalage, l'addition, la multiplication et la mémorisation : il élabore périodiquement, à chaque instant  $kT_e$ , un signal de commande  $u_k$  en fonction des valeurs aux instants précédents  $s_k$  et des valeurs de l'erreur  $\epsilon_k$ . Il réalise donc la **correction numérique**.
- **Le CNA** : le **C**onvertisseur **N**umérique / **A**nalogique transforme la suite numérique en un signal analogique de commande du système. Il est suivi par un élément appelé **bloqueur** qui permet de maintenir le signal de commande constant entre deux instants d'échantillonnage.

#### 4.2. Incidence sur la stabilité

Un **système échantillonné est moins stable** que le système continu qui réalise la même fonction. On admettra que l'incidence du traitement numérique sur la stabilité peut être prise en compte en ajoutant un **retard pur** (égal à  $T_e/2$ ) à la fonction de transfert globale en boucle ouverte.



Le terme  $e^{-j\frac{T_e}{2}\omega}$  agit uniquement sur la courbe de phase car  $|e^{-j\frac{T_e}{2}\omega}| = 1$  et  $\text{Arg } e^{-j\frac{T_e}{2}\omega} = -\frac{T_e}{2}\omega$  ( $\Rightarrow$  réduit  $M\phi$ ).

### 4.3. Correction numérique pour un correcteur à avance phase

Son équation dans le domaine de Laplace est :  $S(p) = \frac{1 + a.\tau.p}{1 + \tau.p} E(p)$  avec  $a > 1$

$\tau$  : constante de temps ;

$a$  : coefficient d'avance de phase.

L'équation différentielle associée est :  $S(t) + \tau \cdot \frac{dS(t)}{dt} = E(t) + a.\tau \cdot \frac{dE(t)}{dt}$

Intégrons cette égalité entre les deux instants d'échantillonnage :  $(n-1)T_e$  et  $nT_e$  :

$$\int_{(n-1)T_e}^{nT_e} S(t).dt + \tau \cdot [S(nT_e) - S((n-1)T_e)] = \int_{(n-1)T_e}^{nT_e} E(t).dt + a.\tau \cdot [E(nT_e) - E((n-1)T_e)]$$

soit en introduisant les notations discrètes :

$$\int_{(n-1)T_e}^{nT_e} S(t).dt + \tau \cdot (S_n - S_{n-1}) = \int_{(n-1)T_e}^{nT_e} E(t).dt + a.\tau \cdot (E_n - E_{n-1})$$

- on exprime les termes intégraux par la méthode des trapèzes :

$$\int_{(n-1)T_e}^{nT_e} S(t).dt = \text{aire\_sous\_courbe} \approx \frac{T_e}{2} (S_n + S_{n-1})$$

de même :

$$\int_{(n-1)T_e}^{nT_e} E(t).dt = \text{aire\_sous\_courbe} \approx \frac{T_e}{2} (E_n + E_{n-1})$$

et on obtient :

$$\frac{T_e}{2} (S_n + S_{n-1}) + \tau \cdot (S_n - S_{n-1}) = \frac{T_e}{2} (E_n + E_{n-1}) + a.\tau \cdot (E_n - E_{n-1})$$

$$S_n \left( \frac{T_e}{2} + \tau \right) + S_{n-1} \left( \frac{T_e}{2} - \tau \right) = E_n \cdot \left( \frac{T_e}{2} + a.\tau \right) + E_{n-1} \cdot \left( \frac{T_e}{2} - a.\tau \right)$$

ce qui permet d'exprimer le terme  $S_n$  cherché :

$$S_n = \frac{2}{T_e + 2.\tau} \cdot \left[ \left( \tau - \frac{T_e}{2} \right) \cdot S_{n-1} + \left( \frac{T_e}{2} + a.\tau \right) \cdot E_n + \left( \frac{T_e}{2} - a.\tau \right) \cdot E_{n-1} \right]$$

- si on utilisait la méthode des rectangles avec  $\int_{(n-1)T_e}^{nT_e} S(t).dt \approx T_e \cdot S_n$  et  $\int_{(n-1)T_e}^{nT_e} E(t).dt \approx T_e \cdot E_n$

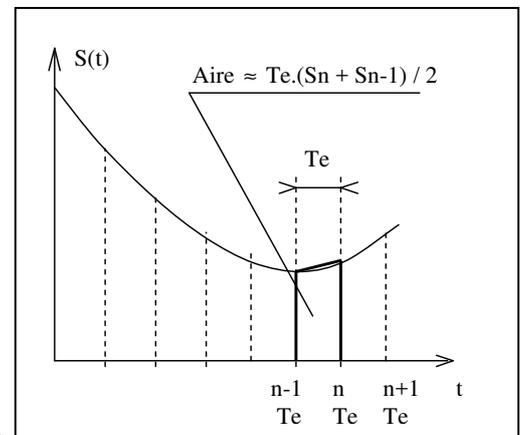
On obtiendrait :  $T_e \cdot S_n + \tau \cdot (S_n - S_{n-1}) = T_e \cdot E_n + a.\tau \cdot (E_n - E_{n-1})$

Alors :  $S_n \cdot (T_e + \tau) - \tau \cdot S_{n-1} = E_n \cdot (T_e + a.\tau) - a.\tau \cdot E_{n-1}$

Et donc :

$$S_n = \frac{1}{T_e + \tau} \left[ \tau \cdot S_{n-1} + (T_e + a.\tau) \cdot E_n - a.\tau \cdot E_{n-1} \right]$$

Ces équations discrétisées pourront être programmées par la suite.

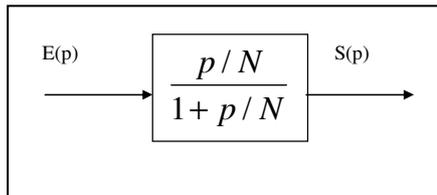


#### 4.4. Correction numérique pour un correcteur PID

En pratique, un correcteur PID s'écrit  $S(p) = \left[ Kp + \frac{Ki}{p} + \frac{Kd}{N} \frac{p}{1 + \frac{1}{N}p} \right] \cdot E(p)$

##### Analysons le terme dérivé seul :

tel que :  $S(p) = \frac{1}{N} \frac{p}{1 + \frac{1}{N}p} \cdot E(p)$



L'équation différentielle associée est :  $N \cdot S(t) + \frac{dS(t)}{dt} = \frac{dE(t)}{dt}$

intégrons cette égalité entre les deux instants d'échantillonnage :  $(n-1)Te$  et  $nTe$  :

$$N \cdot \int_{(n-1)Te}^{nTe} S(t) \cdot dt + [S(nTe) - S((n-1)Te)] = [E(nTe) - E((n-1)Te)]$$

soit en introduisant les notations discrètes :

$$N \cdot \int_{(n-1)Te}^{nTe} S(t) \cdot dt + (S_n - S_{n-1}) = (E_n - E_{n-1})$$

- on exprime le terme intégral par la **méthode des trapèzes** :

$$\int_{(n-1)Te}^{nTe} S(t) \cdot dt = \text{aire\_sous\_courbe} \approx \frac{Te}{2} (S_n + S_{n-1})$$

et on obtient :

$$N \cdot \frac{Te}{2} (S_n + S_{n-1}) + (S_n - S_{n-1}) = (E_n - E_{n-1})$$

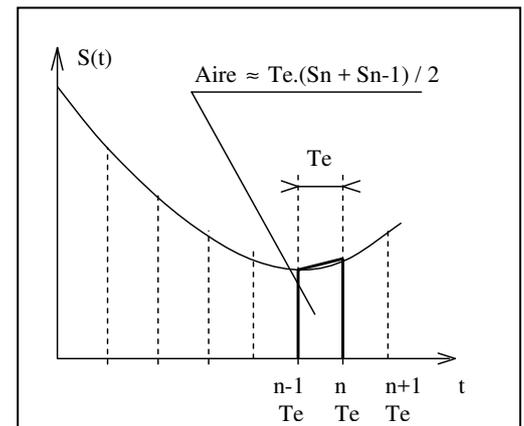
$$N \cdot \frac{Te}{2} \cdot S_n + N \cdot \frac{Te}{2} \cdot S_{n-1} + S_n - S_{n-1} = (E_n - E_{n-1})$$

$$S_n \left(1 + N \cdot \frac{Te}{2}\right) + S_{n-1} \left(N \cdot \frac{Te}{2} - 1\right) = (E_n - E_{n-1})$$

ce qui permet d'exprimer le terme  $S_n$  cherché :

$$S_n = \frac{2}{2 + N \cdot Te} \left[ S_{n-1} \left(1 - N \cdot \frac{Te}{2}\right) + (E_n - E_{n-1}) \right]; \text{ ou encore, et en réintégrant } Kd :$$

$$S_n = \frac{Kd}{(2 + N \cdot Te)} \left[ S_{n-1} (2 - N \cdot Te) + 2(E_n - E_{n-1}) \right]$$



- avec la **méthode des rectangles** pour l'intégrale, on aurait en première possibilité :

(en prenant la partie inférieure du rectangle)

$$\int_{(n-1)Te}^{nTe} S(t).dt \approx Te \cdot S_{n-1}$$

et donc :

$$N \cdot Te \cdot S_{n-1} + (S_n - S_{n-1}) = (E_n - E_{n-1})$$

ou encore :

$$S_n = (1 - N \cdot Te) \cdot S_{n-1} + (E_n - E_{n-1})$$

En deuxième possibilité :

(en prenant la partie supérieure du rectangle)

$$\int_{(n-1)Te}^{nTe} S(t).dt \approx Te \cdot S_n$$

et donc :

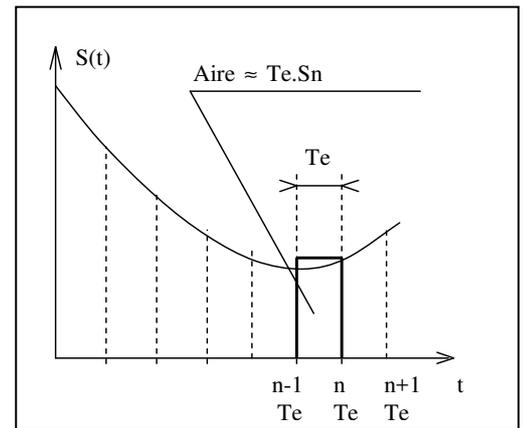
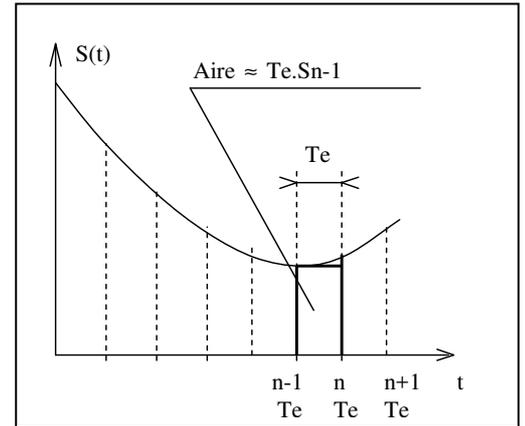
$$N \cdot Te \cdot S_n + (S_n - S_{n-1}) = (E_n - E_{n-1})$$

ou encore :

$$S_n \cdot (1 + N \cdot Te) = S_{n-1} + (E_n - E_{n-1})$$

ce qui donne :

$$S_n = \frac{1}{(1 + N \cdot Te)} [S_{n-1} + (E_n - E_{n-1})]$$



### Analysons le terme intégral :

$$S(p) = \frac{K_i}{p} \cdot E(p)$$

L'équation différentielle associée est :

$$\frac{dS(t)}{dt} = K_i \cdot E(t)$$

intégrons cette égalité entre les deux instants d'échantillonnage :  $(n-1)Te$  et  $nTe$  :

$$[S(nTe) - S((n-1)Te)] = K_i \cdot \int_{(n-1)Te}^{nTe} E(t).dt$$

soit en introduisant les notations discrètes :

$$S_n - S_{n-1} = K_i \cdot \int_{(n-1)Te}^{nTe} E(t).dt$$

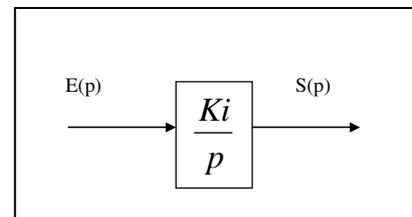
avec la méthode des rectangles pour l'intégrale, on a :

$$\int_{(n-1)Te}^{nTe} E(t).dt \approx Te \cdot E_n \quad \text{donc}$$

$$S_n - S_{n-1} = K_i \cdot Te \cdot E_n$$

alors :

$$S_n = S_{n-1} + K_i \cdot Te \cdot E_n$$



**Nota :** on aurait pu utiliser la méthode des trapèzes

pour l'intégrale :  $\int_{(n-1)Te}^{nTe} E(t).dt \approx \frac{Te}{2} (E_n + E_{n-1})$

On aurait eu :

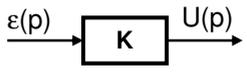
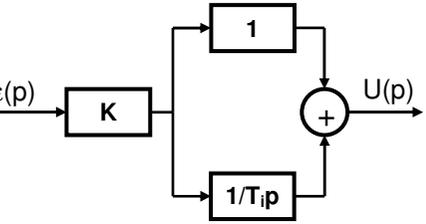
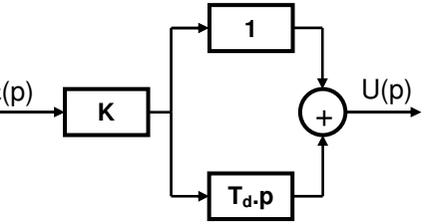
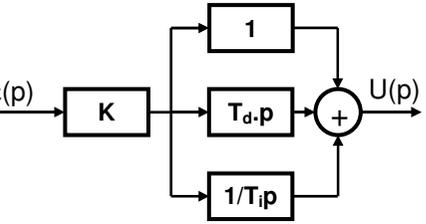
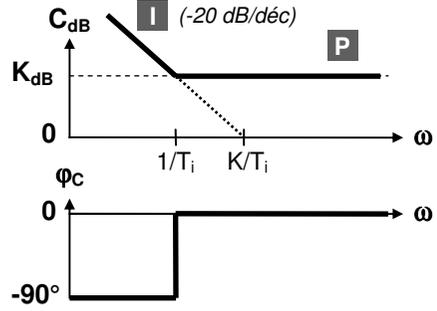
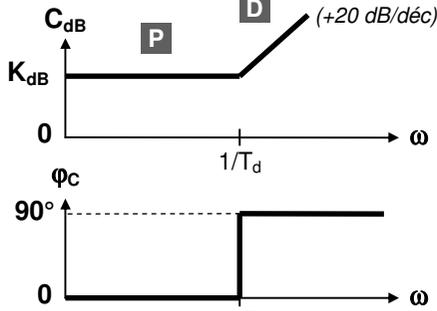
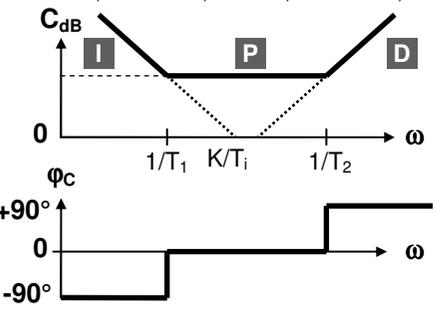
$$S_n - S_{n-1} = K_i \cdot \frac{Te}{2} (E_n + E_{n-1})$$

ce qui aurait permis d'exprimer le terme  $S_n$  cherché :

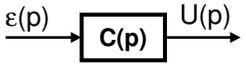
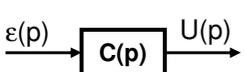
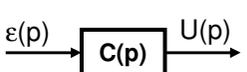
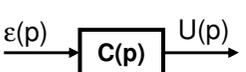
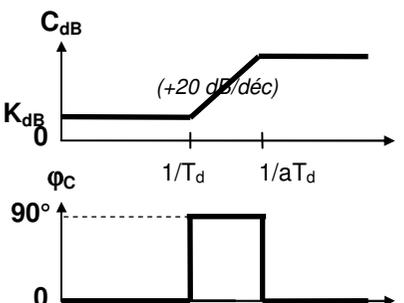
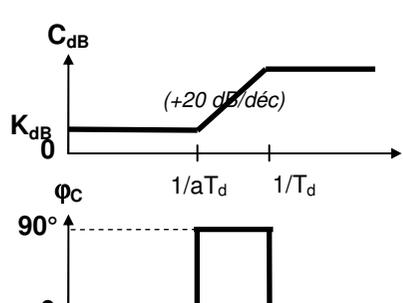
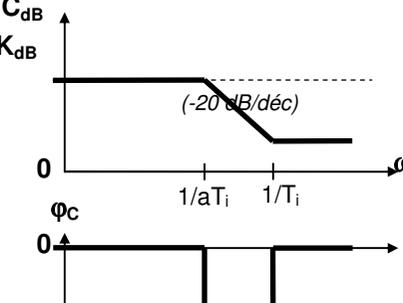
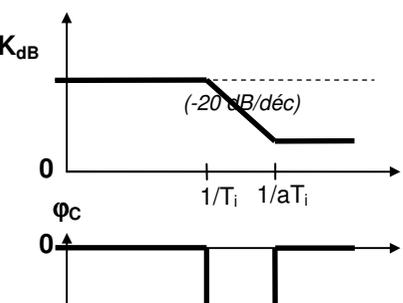
$$S_n = S_{n-1} + K_i \cdot \frac{Te}{2} (E_n + E_{n-1})$$

Ces équations discrétisées pourront être programmées par la suite.

## 5. Résumé sur les correcteurs classiques

Correcteur P	Correcteur PI	Correcteur PD (parfait)	Correcteur PID
<ul style="list-style-type: none"> <li>Schéma fonctionnel</li> </ul>  $C(p) = K$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Schéma fonctionnel</li> </ul>  $C(p) = K \cdot \frac{1 + T_i p}{T_i p}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Schéma fonctionnel</li> </ul>  $C(p) = K \cdot (1 + T_d p)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Schéma fonctionnel</li> </ul>  $C(p) = K \cdot \frac{1 + T_i p + T_i T_d p^2}{T_i p}$
<ul style="list-style-type: none"> <li>Diagramme de Bode</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>Diagramme de Bode</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>Diagramme de Bode</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>Diagramme de Bode</li> </ul> 
<ul style="list-style-type: none"> <li>Caractéristiques</li> </ul> <p>Il <b>améliore la précision et la rapidité</b> si K augmente au détriment de la stabilité.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Caractéristiques</li> </ul> <p>Il <b>annule l'erreur statique</b> en augmentant le gain statique aux basses fréquences.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Caractéristiques</li> </ul> <p>Il <b>augmente la marge de phase</b> et donc améliore la stabilité. Il influence également sur la <b>rapidité</b>.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Caractéristiques</li> </ul> <p>Il combine les effets de l'action intégrale (annulation de l'erreur statique) et de l'action dérivée (stabilité et rapidité accrues).</p>

Avance de phase 1	Avance de phase 2	Retard de phase 1	Retard de phase 2
<ul style="list-style-type: none"> <li>Schéma fonctionnel</li> </ul> $C(p) = K \frac{(1 + T_d p)}{(1 + a T_d p)} \quad a < 1$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Schéma fonctionnel</li> </ul> $C(p) = K \frac{(1 + a T_d p)}{(1 + T_d p)} \quad a > 1$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Schéma fonctionnel</li> </ul> $C(p) = K \frac{(1 + T_i p)}{(1 + a T_i p)} \quad a > 1$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Schéma fonctionnel</li> </ul> $C(p) = K \frac{(1 + a T_i p)}{(1 + T_i p)} \quad a < 1$
<ul style="list-style-type: none"> <li>Diagramme de Bode</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Diagramme de Bode</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Diagramme de Bode</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Diagramme de Bode</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Caractéristiques</li> </ul> <p>Il remplace dans la réalité le correcteur PD car plus réaliste → réalisable physiquement. Il n'amplifie pas par ailleurs les perturbations HF</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Caractéristiques</li> </ul> <p>Idem Avance de phase 1 – autre version mathématique.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Caractéristiques</li> </ul> <p>Ce correcteur à l'avantage de cibler la réduction du déphasage pour certaines pulsations par rapport à un PI ce qui limite la dégradation des marges de stabilité</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Caractéristiques</li> </ul> <p>Idem Retard de phase 1 – autre version mathématique.</p>

Avance de phase 1	Avance de phase 2	Retard de phase 1	Retard de phase 2
<ul style="list-style-type: none"> <li>Schéma fonctionnel</li> </ul>  $C(p) = K \frac{(1+T_d p)}{(1+aT_d p)} \quad a < 1$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Schéma fonctionnel</li> </ul>  $C(p) = K \frac{(1+aT_d p)}{(1+T_d p)} \quad a > 1$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Schéma fonctionnel</li> </ul>  $C(p) = K \frac{(1+T_i p)}{(1+aT_i p)} \quad a > 1$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Schéma fonctionnel</li> </ul>  $C(p) = K \frac{(1+aT_i p)}{(1+T_i p)} \quad a < 1$
<ul style="list-style-type: none"> <li>Diagramme de Bode</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>Diagramme de Bode</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>Diagramme de Bode</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>Diagramme de Bode</li> </ul> 
<p>Formules <math>\Rightarrow</math> <math>\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a} T_d}</math></p> $\varphi_m = \arcsin \frac{1-a}{1+a}$ $G_m = 20 \log_{10} \left( \frac{K}{\sqrt{a}} \right)$	<p>Formules <math>\Rightarrow</math> <math>\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a} T_d}</math></p> $\varphi_m = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$ $G_m = 20 \log_{10} (K \sqrt{a})$	<p>Formules <math>\Rightarrow</math> <math>\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a} T_i}</math></p> $\varphi_m = \arcsin \frac{1-a}{1+a}$ $G_m = 20 \log_{10} \left( \frac{K}{\sqrt{a}} \right)$	<p>Formules <math>\Rightarrow</math> <math>\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a} T_i}</math></p> $\varphi_m = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$ $G_m = 20 \log_{10} (K \sqrt{a})$