SYNTHESE DE SUJET RESEAUX DE NEURONES

XENS PSI 24 : questions sur les modalités d'usage

RQ : application discutable, intérêt : la manière de répondre qui s'adapte à plein de situation

> Dans une machine synchrone, les courants sont sinusoïdaux. Deux transformations successives sont utilisées. Le signal triphasé i_{abc} dans un repère fixe est transformé en système diphasé $i_{\alpha\beta}$. Puis, le système diphasé $i_{\alpha\beta}$ tournant dans le repère fixe est transformé en un système diphasé fixe dans un repère tournant, de tensions statoriques V_d et V_q. Ces transformations peuvent mener à une réponse du système non-linéaire. Le moteur synchrone décroche si l'on dépasse le couple maximum admissible. Le comportement devient instable si le couple résistant dépasse la valeur critique.
>
> Au lieu d'utiliser un contrôleur usuel, il est proposé d'utiliser des réseaux de neurones pour contrôler la machine synchrone. Le vecteur d'entrée choisi comprend les tensions statoriques V_d et V_q. Le vecteur d'état comporte les intensités statoriques i_d et i_q, le couple C_{em} et la rotation ω_r du moteur. Le contrôleur classique est dimensionné à partir de la linéarisation du système à proximité du point de fonctionnement nominal.

Q1- Quel risque peut rencontrer le mélangeur lorsque le contrôle du système est réalisé par un contrôleur classique ?

Vues les explications préalables dans le sujet, le risque probablement attendu est celui du décrochage du rotor par rapport au champ magnétique tournant si le couple est trop important. Mais une machine synchrone sur une telle application devrait utiliser un autopilotage, ce qui annule le risque de décrochage puisque le champ magnétique est positionné relativement à l'angle du rotor...

Q2- Quel est l'intérêt des réseaux de neurones pour cette application ?

Un réseau de neurones permet d'« apprendre » des lois présentes dans des données et difficile à exprimer théoriquement. Les lois physiques présentes dans les machines synchrones sont bien connues d'un point de vue théorique et un réseau de neurone n'apportera pas d'avantage sur ce plan. Les sollicitations extérieures pourraient éventuellement faire l'objet d'un apprentissage machine : un enregistrement des perturbations pour différents types de pots permettrait de prévoir les sollicitations subies par le moteur. En se laissant guider par les explications préalables du sujet, on pourrait évoquer l'idée que les réseaux de neurones puissent apprendre les lois non linéaires de comportement du moteur synchrone, là où le « contrôleur classique » est dimensionné à partir d'un modèle linéarisé. Il reste peu probable que ce genre de machine soit équipée d'un apprentissage machine.

Q3- À partir d'une librairie existante, proposer un protocole numérique (différentes étapes du développement numérique) afin de mettre en œuvre le contrôle par réseau de neurones.

D'une façon générale, la mise en place d'un contrôle par réseau de neurones passe par les étapes suivantes :

- prise de mesures sur le système en fonctionnement normal (commande classique) pour établir un ensemble de données d'apprentissage ;

- choix d'une architecture de réseau (nombre de couches, nombre de neurones par couche, fonctions d'activation...) ;

- itérations de mise au point du modèle : phase d'apprentissage machine sur les exemples, validation des performances et modification des hyperparamètres ;

- implantation dans le contrôleur pour inférence en cours de fonctionnement.

On peut citer les librairies classiques d'apprentissage machine : Sklearn, Tensorflow, Keras, Pytorch...

Inspiré de CCINP PSI 24 : questions sur les principes

RQ : l'utilisation d'un réseau de neurones semble assez surfaite du fait que l'apprentissage « profond » se fait avec un jeu de données d'apprentissage de 9 données seulement. Les questions de cette partie IA restent néanmoins une application concrète de la programmation d'un réseau de neurones.

CONTEXTE

Pour toute la première partie physique du sujet de concours CCINP PSI MODELISATION 2024, voici un résumé.

Un correcteur de facteur de puissance est introduit dans le sujet par l'association d'un pont de Graetz :

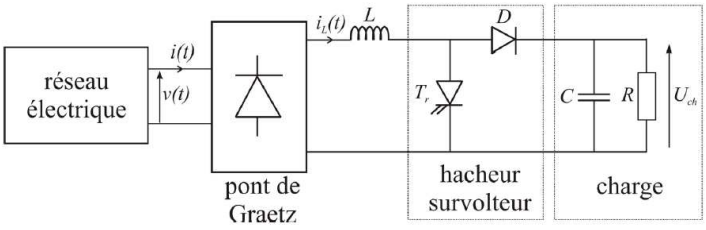


Figure 7 - Circuit de puissance du correcteur de facteur de puissance

Avec $i_{L,cons}(t) = \left|\hat{I}\cos(2\pi ft)\right|$, le courant dans la bobine qui est associé à un courant de ligne sinusoïdal de forme $i(t) = \hat{I}\cos(2\pi ft)$ avec $\hat{I} > 0$ et en phase avec la tension du réseau $v(t) = \hat{V}\cos(2\pi ft)$. Le principe de ce correcteur de facteur de puissance est de commander le transistor T_r pour que le courant d'intensité $i_L(t)$ soit le plus proche possible de $i_{L,cons}(t)$. Pour cela, on dispose :

- D'une tension de consigne $v_{i_{L,cons}}(t)$ telle que $v_{i_{L,cons}} = ki_{L,cons}$ avec $k = 1{,}0\ V.A^{-1}$
- D'une tension $v_{i_{L,mes}}$ image du courant d'intensité i_L telle que $v_{i_{L,mes}} = ki_L$

La loi de commande adoptée est, à tout instant, construite à partir d'un paramètre $\Delta > 0$ comme suit :

- Si $\left|v_{i_{L,cons}} - v_{i_{L,mes}}\right| < \Delta$, le transistor est inchangé
- Si $\left(v_{i_{L,mes}} - v_{i_{L,cons}}\right) > \Delta$, le transistor passe à l'état bloqué
- Si $\left(v_{i_{L,mes}} - v_{i_{L,cons}}\right) < -\Delta$, le transistor passe à l'état passant

Ce correcteur de facteur de puissance est utilisé pour minimiser les pertes en lignes engendrées par l'installation électrique d'un petit studio composé d'un ensemble (box Internet/télévision, système d'éclairage, radiateur électrique, chauffe-eau) :

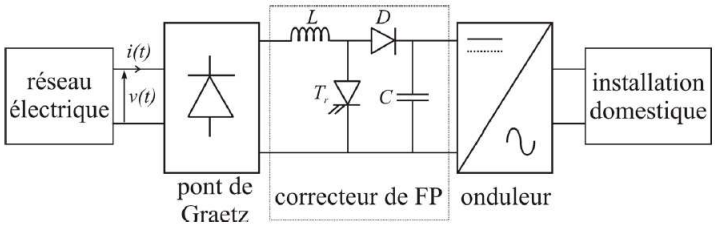


Figure 14 - Correcteur de facteur de puissance utilisé pour une installation domestique

La tension aux bornes du condensateur C est placée en entrée de l'association d'un onduleur de tension et de l'installation électrique du studio. Une boucle de régulation, non étudiée ici, permet de réguler cette tension à une valeur constante, de sorte que le fonctionnement du correcteur de facteur de puissance est identique au précédent.

LES DONNEES

Le dispositif étudié permet de réduire les pertes en ligne engendrées par l'absorption d'un courant impulsionnel. Celles-ci tendent vers leur valeur minimale lorsque le paramètre Δ tend vers 0. Cependant, cette diminution se fait au prix d'une augmentation de la fréquence de commutation moyenne f_{cm} et donc des pertes au sein du transistor T_r. Si la puissance dissipée dans T_r ne peut pas être exploitée, il est alors nécessaire de rechercher une valeur du paramètre Δ correspondant à une minimisation des pertes totales : pertes en ligne + pertes dans T_r.

Chacun des quatre éléments de l'installation présente 3 modes de fonctionnement. Un niveau x_i valant 0, 1 ou 2 est associé à chacun des modes. Le tableau 2 donne la correspondance entre le niveau x_i et le mode de fonctionnement. Certaines puissances consommées sont également données.

	box-TV x_1	éclairage x_2	radiateur x_3	chauffe-eau x_4
$x_i = 0$	éteint 0 W	éteint 0 W	éteint 0 W	éteint 0 W
$x_i = 1$	veille 100 W	puissance moitié 50 W	puissance moitié	maintient à température 50 W
$x_i = 2$	allumé 200 W	puissance maximale 100 W	puissance maximale	puissance maximale

Tableau 2 - Modes de fonctionnement

La valeur du paramètre Δ permettant de minimiser les pertes totales, notée Δ_{opt}, a été évaluée empiriquement pour 14 combinaisons entre les différents modes de fonctionnement des quatre éléments de l'installation électrique étudiée. Ces valeurs sont présentées dans le tableau 3. Le paramètre Δ s'exprime en volts et est positif. Lorsque la valeur -1 est indiquée pour Δ_{opt}, cela signifie que pour minimiser les pertes totales, il est préférable de désactiver le correcteur de facteur de puissance et de connecter l'installation directement au réseau électrique.

	box-TV x_1	éclairage x_2	radiateur x_3	chauffe-eau x_4	Δ_{opt}(V)
Données d'entraînement	0	0	0	1	-1
	0	0	1	1	-1
	0	0	2	0	-1
	0	0	0	2	-1
	0	0	1	2	-1
	0	1	0	0	0,18
	2	2	0	0	0,32
	2	2	2	0	0,49
	2	2	2	2	-1
Données test	0	0	1	0	-1
	0	0	2	1	-1
	0	0	2	2	-1
	1	0	0	0	0,22
	2	2	1	0	0,42

Tableau 3 - Valeurs optimales du paramètre Δ pour quatorze combinaisons différentes

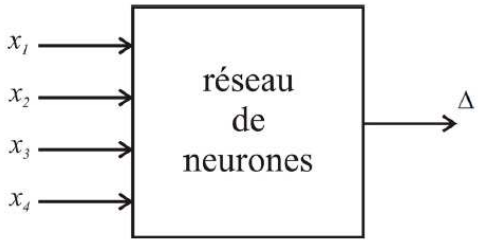


Figure 15 - Entrées-sortie du réseau de neurones.

Traitement par IA

On souhaite dans cette partie contrôler le paramètre Δ à l'aide d'un réseau de neurones. L'objectif est qu'il fournisse la consigne Δ_{opt} en fonction des différentes combinaisons (x_1, x_2, x_3, x_4). Le contrôleur associé au correcteur de facteur de puissance doit permettre en temps réel :

- Soit de désactiver le correcteur de facteur de puissance en connectant l'installation électrique du studio directement au réseau $(\Delta = -1)$
- Soit de fixer la valeur de Δ lorsque le correcteur de puissance est activé

1. Proposer un mode de communication pour que les différents appareils électriques de l'installation puissent transmettre leurs modes de fonctionnement au contrôleur. Aucun détail technique n'est attendu pour cette question

2. Préciser les avantages et inconvénients du choix d'un réseau de neurones pour modéliser la commande

3. Préciser, en justifiant la réponse, en quoi le choix d'une méthode d'apprentissage supervisé est pertinent dans ce problème

Le perceptron

Le réseau de neurones choisi dans cette étude est un perceptron multicouche à une première couche cachée (couche d'entrée) à 4 neurones $(i) \in (1,2,3,4)$, une seconde couche cachée à 4 neurones$(i') \in (1',2',3',4')$ et une couche de sortie à un neurone$(i'') \in (1'')$. Le système prend en entrée un vecteur à 4 composantes (x_1, x_2, x_3, x_4) et la donnée de sortie est Δ. Chaque neurone prend en entrée toutes les sorties de la couche précédente et renvoie une seule sortie. La figure 16 présente cette structure et la figure 17 donne les détails d'un neurone (i).

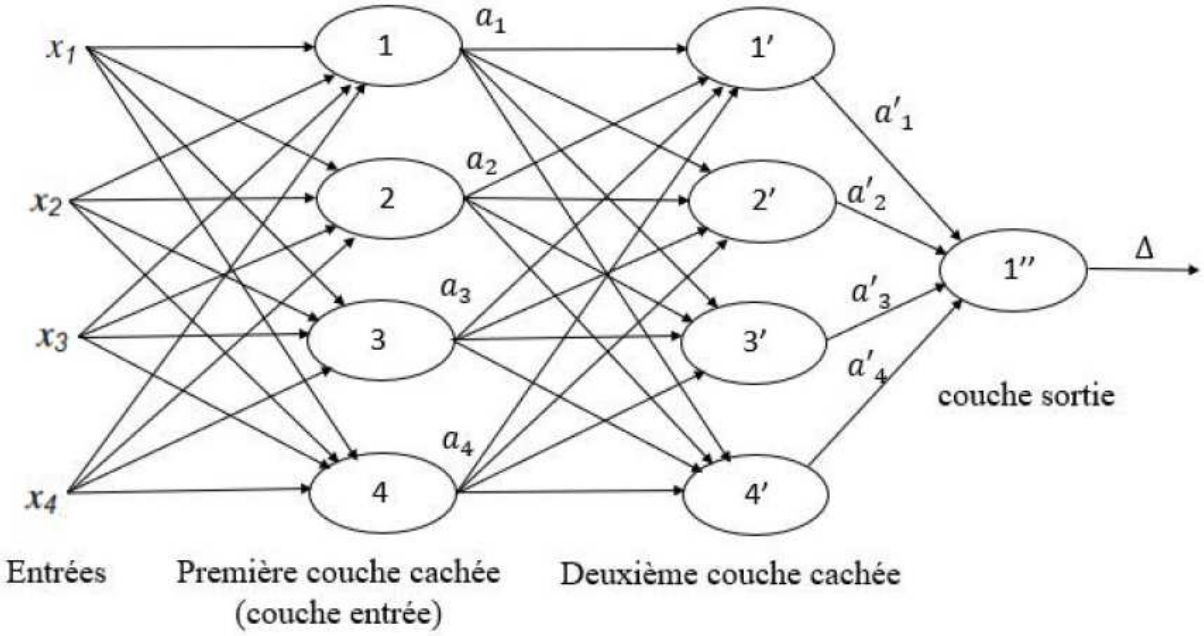


Figure 16 – Structure du réseau de neurones

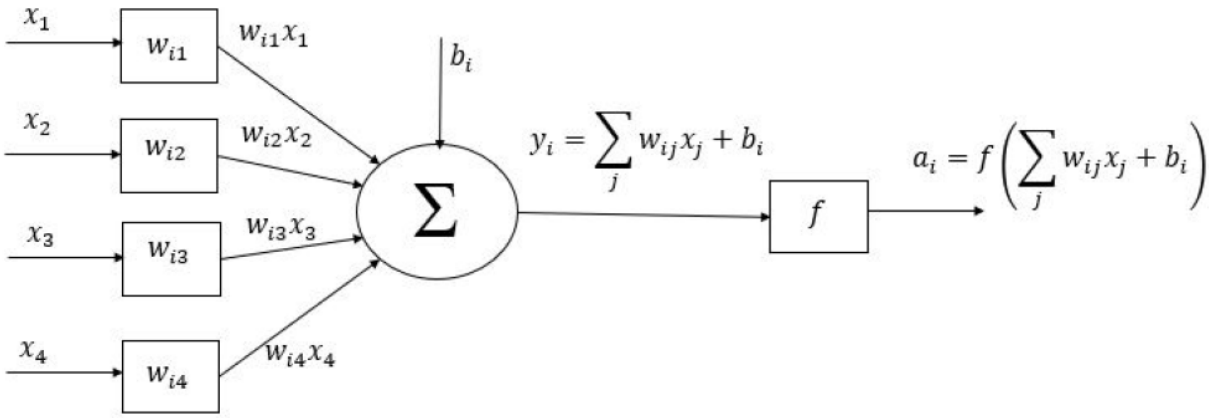


Figure 17 – Structure du neurone (i)

Nous noterons :

- $w_{ij} \in \mathbb{R}$: Le poids entre l'entrée j et le neurone (i) (w_{11} poids de l'entrée x_1 du neurone (1))
- $b_i \in \mathbb{R}$: Le biais du neurone (i)
- $f \in \mathbb{R}$: La fonction d'activation

Le processus d'apprentissage pour former le réseau de neurones consiste à appliquer une méthode itérative pour modifier les valeurs w_{ij} et b_i. On choisit les valeurs initiales aléatoirement.

La fonction d'activation choisie est une sigmoïde définie par $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$. On utilisera la fonction exp à utiliser dans le module numpy en Python dans la suite. Cette fonction s'applique sur un tableau (array).

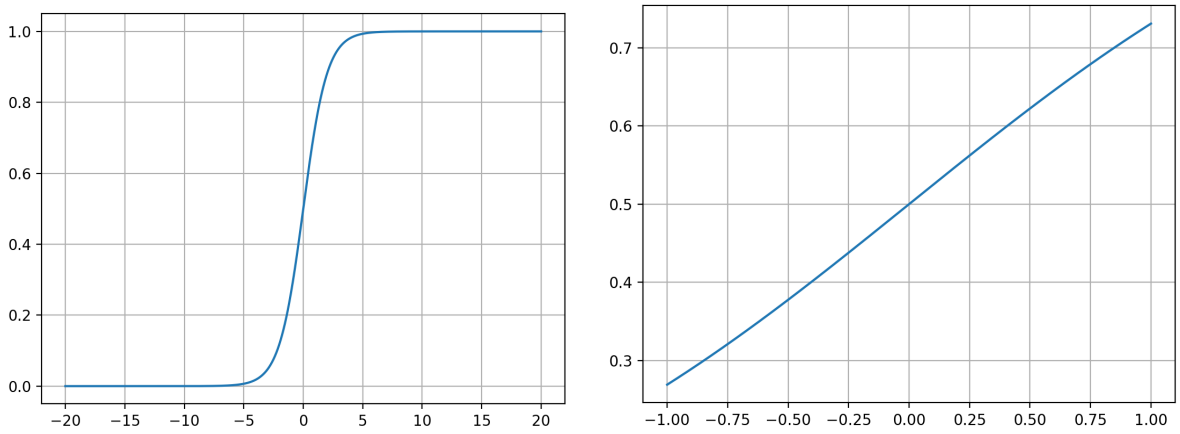


Figure 18 - Tracé de la fonction f

4. Après avoir calculé la dérivée de f, proposer les fonctions f et f' en langage Python

Phase d'inférence

Notations :

- Les grandeurs scalaires seront notées en minuscules, par exemple w
- Les grandeurs matricielles seront notées en majuscules, par exemple W
- L'indice k fait référence à la couche, par exemple W_2 pour la seconde couche

Cette phase consiste à calculer la sortie Δ à partir d'un vecteur d'entrée X connu. La sortie du dernier neurone peut s'écrire ainsi :

$$\Delta = f(W_3 f(W_2 f(W_1 X + B_1) + B_2) + B_3)$$

5. Donner les dimensions des arrays $\boldsymbol{W_2}$, $\boldsymbol{W_3}$, $\boldsymbol{B_2}$ et $\boldsymbol{B_3}$

Pour la couche d'entrée, on propose l'écriture matricielle suivante : $Y_1 = W_1 X + B_1 \quad ; \quad A_1 = f(Y_1)$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = W_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

6. Donner l'expression de la matrice $\boldsymbol{W_1}$
7. Proposer la fonction Python inference_couche(X,W,B) renvoyant le vecteur des sorties de la couche $\boldsymbol{A}$

On prend :

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad ; \quad Y_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad ; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}25 & -0{,}04 \\ 0{,}4 & -0{,}3 & 0{,}6 & -0{,}3 \\ -0{,}4 & 0{,}3 & -0{,}6 & -0{,}4 \\ -1 & -0{,}75 & -0{,}1 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

Notons que, pour cette première phase d'apprentissage qu'on appelle souvent l'initialisation, les valeurs des poids ont été générées aléatoirement et les biais choisis nuls.

8. En vous aidant de la figure 18, calculer $\boldsymbol{A_1 = f(Y_1)}$ dans ce cas

En reproduisant le même calcul pour les couches suivantes, nous calculerons Δ.

On suppose le code suivant existant :

```
X = [[0],
     [1],
     [0],
     [0]]
X = np.array(X)

W1 = [[ 0.3, 0.2 , 0.25,-0.04],
      [ 0.4,-0.3 , 0.6 ,-0.3 ],
      [-0.4, 0.3 ,-0.6 ,-0.4 ],
      [-1  ,-0.75,-0.1 ,-0.5]]
W1 = np.array(W1)

B1 = [[0.0],
     [0],
     [0],
     [0]]
B1 = np.array(B1)

W2 = W1.copy()
B2 = B1.copy()
W3 = W1[0,:].copy().reshape(1,4)
B3 = np.array([[0.]])
```

Nous avons pris soin de créer des arrays aux bonnes dimensions, composés de flottants, en réalisant des copies pour rendre chaque matrice indépendante des autres. Elles seront utilisées comme variables globales dans la suite.

Une annexe « Fonctions Python utiles » est à votre disposition en fin de sujet. Vous pourrez y piocher les fonctions souhaitées.

9. Proposer la fonction Python inference(X) renvoyant le flottant Δ associé

On trouve $\Delta = 0{,}59\ V$. Ce résultat signifie que pour l'éclairage allumé et tous les autres appareils éteints, le réseau de neurones prévoit un réglage de $\Delta = 0{,}59\ V$. Cependant, le tableau 3 indique que pour cette combinaison, le réglage optimal est $\Delta_{opt} = 0{,}18\ V$.

Il faut donc maintenant modifier les valeurs des poids et biais pour que la sortie du réseau de neurones se rapproche de Δ_{opt} et ce, pour toutes les combinaisons d'entrée possibles.

Rétropropagation

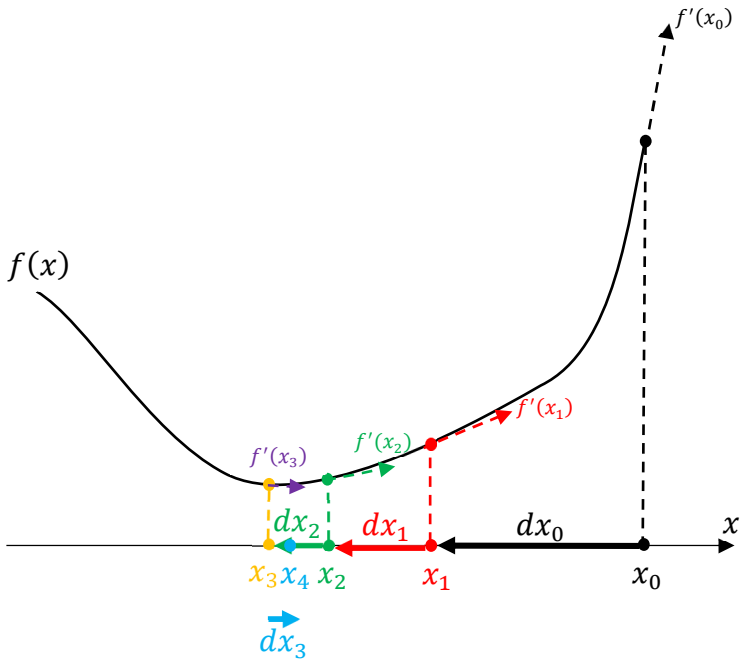
Pour toute combinaison $X_l = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ des entrées à la ligne l du tableau 3, on souhaite minimiser l'erreur entre la sortie calculée par inférence avec le réseau de neurones Δ_l et le réglage optimal attendu Δ_l^{opt} noté t_l dans la suite. Dans le tableau 3, nous disposons de 9 données d'entrainement, soit 9 paires $\{X_l, t_l\}$ pour chacune des $N = 9$ lignes concernées.

Le calcul de l'erreur $\mathcal{L}_l = (\Delta_l - t_l)^2$ sur chacune de ces lignes va être utilisé pour calculer de « meilleurs » valeurs des poids et biais, ce qui correspond à la phase dite « d'entrainement » du réseau de neurones. On parle de « rétropropagation » de l'erreur dans tout le réseau depuis la couche de sortie jusqu'à la couche d'entrée pour mettre à jour les W_i et B_i. Cette procédure, réalisée pour toutes les données d'entrée, s'appelle un « epoch ».

L'epoch sera alors répété sur un grand nombre d'itérations jusqu'à obtenir un critère acceptable d'erreur quadratique moyenne totale $\mathcal{L}_{tot}$:

$$\mathcal{L}_{tot} = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}(\Delta_l - t_l)^2 = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\mathcal{L}_l$$

La mise à jour des valeurs des W_i et B_i est réalisée à l'aide de la méthode de la descente du gradient (consultez mon TD sur la descende de gradient ici pour plus de détails). Le principe est le suivant : Soit $\mathcal{L}_l$ l'erreur en sortie. Supposons connaitre la dérivée $\frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial w_{ij}}$. En écrivant $w_{ij} = w_{ij} - \alpha \frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial w_{ij}}$ avec α un réel appelé « taux d'apprentissage », on peut mettre à jour w_{ij} de manière itérative en diminuant $\mathcal{L}_l$ jusqu'à atteindre un minimum.



Nous allons dans un premier temps chercher les expressions « locales » pour une couche de $\frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial a_i}$, $\frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial b_i}$, $\frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial w_{ij}}$ et $\frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial x_j}$ avant de passer de manière matricielle « globale ».

On rappelle que :

$$a_i = f(y_i) \quad ; \quad y_i = \sum_{j=1}^{4} (w_{ij} x_j) + b_i$$

Pour cette question, on ne s'intéresse qu'à la dernière couche.

10. Donner l'expression de $\frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial a_i}$ en fonction de $\boldsymbol{a_i}$ et $\boldsymbol{t_l}$

Pour une ligne des entrées, on peut donc calculer l'erreur en sortie de la dernière couche. On pourra alors calculer l'erreur en entrée de cette couche à l'aide de ses paramètres, et cette erreur en entrée sera utilisée comme erreur en sortie de la couche précédente, et ainsi de suite.

Pour les questions suivantes, on s'intéresse à n'importe quelle couche et on écrit donc l'erreur en sortie de cette couche sous la forme simplifiée $\mathcal{L}$.

11. Montrer que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} \boldsymbol{f'(y_i)}$
12. Montrer que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} \boldsymbol{f'(y_i) x_j}$

Un x_k d'entrée de couche influence tous les neurones de celle-ci. Autrement dit, l'erreur $\mathcal{L}$ en sortie de cette couche est une fonction de a_1, a_2, a_3 et a_4 eux même tous fonction de x_k. On admet l'expression de la règle de la chaine suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{L}\big(a_1(x_k), a_2(x_k), a_3(x_k), a_4(x_k)\big)}{\partial x_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_3}\frac{\partial a_3}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_4}\frac{\partial a_4}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i}\frac{\partial a_i}{\partial x_k}$$

13. Montrer que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} \boldsymbol{f'(y_i) w_{ik}}$

On souhaite maintenant établir les relations matricielles « globales » permettant de réaliser la rétropropagation sur une couche quelconque. On introduit les matrices suivantes (sans indices i de couche pour alléger les notations), avec $\mathcal{L}$ l'erreur en sortie de cette couche, X son vecteur d'entrée et A son vecteur de sortie :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{11}} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{12}} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{13}} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{14}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{21}} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{22}} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{23}} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{24}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{31}} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{32}} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{33}} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{34}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{41}} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{42}} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{43}} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{44}} \end{bmatrix} \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_4} \end{bmatrix} \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_1} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_2} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_3} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_4} \end{bmatrix} \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_1} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_2} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_3} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_4} \end{bmatrix}$$

Avec ces relations, connaissant l'erreur en sortie de couche $E_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A}$, il sera possible de mettre à jour les matrices W et B de la couche par descente de gradient ainsi :

$$\begin{cases} W = W - \alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W} \\ B = B - \alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} \end{cases}$$

Puis on pourra renvoyer l'erreur en entrée de cette couche $E_X = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X}$ qui servira d'erreur en sortie de la couche précédente.

On introduit les opérateurs suivants :

- « * » pour le produit terme à terme entre deux arrays (utilisable en Python avec *)
- « . » pour le produit matriciel (np.dot() en Python)

14. Etablir les relations matricielles donnant l'expression de $\boldsymbol{E_X}$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{W}}$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{B}}$ en fonction de $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{E_A}$, $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ et $\boldsymbol{f'}$

Les formules étant établies, on propose de réaliser le code Python permettant d'entrainer le réseau de neurones créé précédemment.

Nous allons proposer une fonction de rétropropagation qui devra :

- Prendre en arguments X (vecteur d'entrée), W (matrice des poids), B (vecteur de biais), E_A (erreur en sortie de couche) et $alpha$ (valeur du coefficient d'apprentissage)
- Calculer $E_W = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W}$, $E_B = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B}$ et $E_X = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X}$
- Réaliser les mises à jour de W et B en place
- Renvoyer le vecteur gradient du coût en entrée $E_X = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X}$

15. Ecrire la fonction Python retropropagation_couche(X,W,B,Ea,alpha) attendue

Nous allons maintenant réaliser la mise à jour complète du réseau de neurones $(W_3, B_3, W_2, B_2, W_1, B_1)$ pour une donnée $\{X_l, t_l\}$ du tableau 3 en réalisant la rétropropagation de l'erreur en sortie de 3° couche à travers les 3 couches du réseau.

16. Ecrire la fonction epoch_ligne(X,Deltaopt,alpha) réalisant la procédure epoch sur une ligne des entrées X connaissant la valeur Deltaopt de la ligne associée

On propose le code suivant :

```
Donnees = [
    [0, 0, 0, 1, -1],
    [0, 0, 1, 1, -1],
    [0, 0, 2, 0, -1],
    [0, 0, 0, 2, -1],
    [0, 0, 1, 2, -1],
    [0, 1, 0, 0, 0.18],
    [2, 2, 0, 0, 0.32],
    [2, 2, 2, 0, 0.49],
    [2, 2, 2, 2, -1],
    [0, 0, 1, 0, -1],
    [0, 0, 2, 1, -1],
    [0, 0, 2, 2, -1],
    [1, 0, 0, 0, 0.22],
    [2, 2, 1, 0, 0.42]
]

Donnees = np.array(Donnees)

Donnees_A = Donnees[:9]
Donnees_T = Donnees[9:]
```

L'argument LD des prochaine fonctions sera la liste Donnees_A.

Il faut maintenant réaliser un epoch complet, c'est-à-dire mettre à jour le réseau par la procédure précédente en utilisant toutes les données d'apprentissage.

17. Ecrire la fonction epoch(LD,alpha) réalisant un epoch sur toutes les données d'apprentissage

Après réalisation d'un epoch, on souhaite quantifier l'erreur quadratique moyenne totale du réseau.

$$\mathcal{L}_{tot} = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} \mathcal{L}_l$$

18. Ecrire la fonction erreur_totale(LD) calculant et renvoyant l'erreur quadratique moyenne totale après un epoch
19. Ecrire les lignes de code réalisant 100 epoch et tracant l'erreur totale en fonction du nombre d'itérations réalisées

Analyse des résultats

L'évolution de la fonction de coût total $\mathcal{L}_{tot}$ pendant la phase d'entraînement est donnée sur la figure 19. Elle comporte 100 itérations.

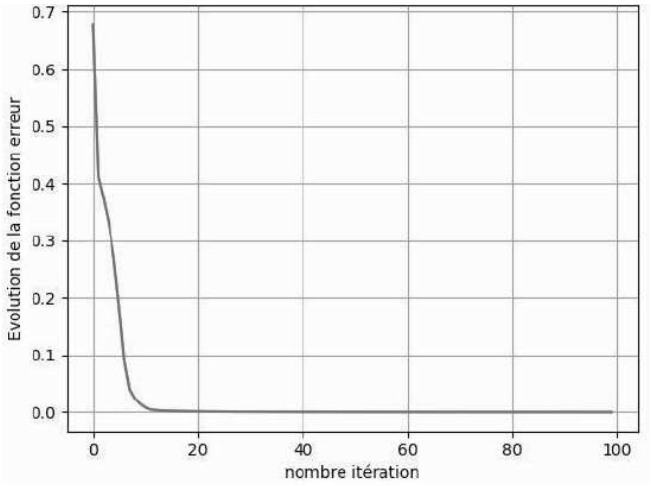


Figure 19 - Entraînement modèle

	box-TV x_1	éclairage x_2	radiateur x_3	chauffe-eau x_4	Δ_{opt} (V)	Δ (V)
Données d'entraînement	0	0	0	1	-1	- 0,981
	0	0	1	1	-1	- 0,979
	0	0	2	0	-1	- 0,961
	0	0	0	2	-1	- 0,983
	0	0	1	2	-1	- 0,980
	0	1	0	0	0,18	0,178
	2	2	0	0	0,32	0,341
	2	2	2	0	0,49	0,474
	2	2	2	2	-1	- 0,970
Données test	0	0	1	0	-1	- 0,919
	0	0	2	1	-1	- 0,977
	0	0	2	2	-1	- 0,978
	1	0	0	0	0,22	0,015
	2	2	1	0	0,42	0,412

Tableau 5 - Valeurs optimales du paramètre Δ pour quatorze combinaisons différentes

NDLR : Cette courbe de la figure 19 n'a pas été obtenue sur le set des 9 données du tableau 5. Il est donc normal que vous ne trouviez pas la même chose que dans ce sujet. Pour valider votre travail, vous pourrez par exemple utiliser votre réseau sur 1000 lignes de données normalisées de type $\left(x_1, x_2, x_3, x_4, \underset{i}{moy}\, x_i\right)$ *avec* $x_i \in [0,1[$.

Le graphique montre que la phase d'entraînement, constituée d'une succession d'inférences et de rétropropagation, a permis de diminuer la fonction coût, c'est-à-dire l'erreur quadratique moyenne entre le résultat Δ du modèle et les valeurs cibles des données d'entraînement. Il y a désormais peu d'écart pour les données d'entraînement.

Sur le tableau 5, on peut alors comparer les valeurs de Δ cibles aux valeurs calculées sur les 5 données de test.

20. Analyser les résultats. Préciser si ce réseau de neurones est capable de bien prédire la valeur optimale de Δ

21. Pour améliorer le modèle, préciser en jsutifiant la réponse, s'il est préférable d'augmenter le nombre d'itérations de l'entraînement ou d'augmenter le nombre de données test

ANNEXE 2 - FONCTIONS PYTHON UTILES

La bibliothèque numpy est supposée installée de la manière classique - import numpy as np.

np.dot (A, B) : retourne le produit de deux matrices $[A]$ et $[B]$.

A.T : retourne la transposée d'une matrice $[A]$.

len(X) : retourne le nombre d'éléments de l'objet X. Ce dernier peut être une liste ou un tableau numpy.

np.abs(X) : retourne un tableau dont les éléments correspondent aux modules des éléments du tableau X.

np.arange(a, b, p) : retourne un tableau 1D dont les éléments sont répartis avec un pas p entre a et b, a est le premier élément du tableau, le dernier élément est strictement inférieur à b. Si l'argument p n'est pas renseigné, il est pris par défaut égal à 1.

np.fft.rfft(X) : retourne, sous forme d'un tableau 1D de nombres complexes, la transformée de Fourier discrète du signal échantillonné correspondant à X, un tableau 1D dont les éléments doivent être réels. Les éléments du tableau retourné correspondent aux fréquences $n\frac{F_e}{N}$ avec $n \in [\![0, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor]\!]$, N le nombre d'éléments de X et F_e la fréquence d'échantillonnage. Enfin, le facteur multiplicatif $2/N$ doit être appliqué au tableau 1D retourné pour obtenir le spectre du signal continu correspondant au signal échantillonné contenu dans X.

np.linspace(a, b, N) : retourne un tableau 1D de N éléments répartis linéairement entre a et b, a est le premier élément du tableau, b le dernier.

plt.plot(X, Y) : permet de tracer le tableau 1D Y en fonction du tableau 1D X. Les deux tableaux doivent avoir le même nombre d'éléments. Des arguments optionnels permettent de choisir la couleur du tracé, l'épaisseur du trait, etc.

plt.xlim(x_min, x_max) : permet de limiter un tracé aux abscisses comprises entre x_min et x_max.

plt.xlabel('titre abscisses') : permet d'attribuer un titre à l'axe des abscisses. Des arguments optionnels permettent de choisir la taille de la police, la couleur du texte, etc.

plt.ylim(y_min, y_max) : permet de limiter un tracé aux ordonnées comprises entre y_min et y_max.

plt.ylabel('titre ordonnées') : permet d'attribuer un titre à l'axe des ordonnées. Des arguments optionnels permettent de choisir la taille de la police, la couleur du texte, etc.