

Droïdes autonomes : de l'aide aux personnes à la logistique du dernier kilomètre

Corrigé UPSTI

1 Modélisation linéaire du suivi de la trajectoire

- Objectif

Élaborer un modèle linéaire de l'algorithme de suivi de trajectoire « pure pursuit » afin de pouvoir le prendre en compte lors de la conception de la commande en lacet du droïde.

1.1 Suivi de trajectoire « pure pursuit »

- Objectif

Modéliser géométriquement le suivi de trajectoire dans le cas de l'algorithme « pure pursuit ».

Question 1 Des deux bornes de L (L_{mini} et L_{maxi}) préciser laquelle garantit de pouvoir élaborer la consigne ω_{cons} et laquelle assure de prendre en compte tous les segments de route. Proposer alors des valeurs numériques pour L_{mini} et L_{maxi} à partir de l'exigence 1.1.2 du cahier des charges partiel de l'annexe A.

L_{mini} garantit de pouvoir élaborer la consigne car si $L < \|\overrightarrow{MP_{proj}}\|$, alors le point P_{LA} ne peut être défini.

L_{maxi} assure de prendre en compte tous les segments de la route car si $L > \|\overrightarrow{P_i P_{i+1}}\|$ alors le point P_{LA} sera défini après le point P_{i+1} .

L'exigence 1.1.2 précise que l'écart maximal entre le droïde et la route est de 5 cm donc on choisit $L_{mini} = 5 \text{ cm}$.

L'exigence 1.1.2 précise que les points sont reliés par des segments de longueur minimale 1 m donc on choisit $L_{maxi} = 1 \text{ m}$.

Question 2 À partir de la figure 2 et en remarquant que le triangle M, C, P_{LA} est isocèle, exprimer l'angle $\widehat{MCP_{LA}}$ en fonction de α puis montrer que $\rho = \frac{L^2}{2y_{LA}}$.

$$(\overrightarrow{MP_{LA}}, \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{MP_{LA}}, \vec{y}_c) = (\overrightarrow{MP_{LA}}, \vec{x}_c) + (\vec{x}_c, \vec{y}_c) = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Le triangle MCP_{LA} est isocèle et ses angles à la base valent $\frac{\pi}{2} - \alpha$ donc, comme la somme des angles d'un triangle vaut π , $\widehat{MCP_{LA}} = 2|\alpha|$.

En notant H le projeté orthogonal de P_{LA} sur (MC) , on obtient $HP_{LA} = \overrightarrow{MP_{LA}} \cdot \vec{x}_c = L \cos \alpha$ puis grâce au triangle CHP_{LA} rectangle en H , on peut écrire $\sin 2\alpha = \frac{CH}{CP_{LA}} = \frac{L \cos \alpha}{\rho}$.

$$\text{D'où } \rho = \frac{L \cos \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{L}{2 \sin \alpha}.$$

$$\text{Or } y_{LA} = L \sin \alpha, \text{ donc } \rho = \frac{L^2}{2y_{LA}}.$$

1.2 Analyse du déplacement sur un segment à l'aide d'un modèle linéaire

- Objectif -

Élaborer un modèle linéaire du suivi de trajectoire et évaluer l'influence du choix de la longueur L sur les performances (définies ultérieurement) du suivi de trajectoire à la vitesse v_0 .

Question 3 Exprimer en fonction de y , L et θ , les coordonnées de $\overrightarrow{MP_{proj}}$ puis de $\overrightarrow{MP_{LA}}$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y})$ et enfin y_{LA} .

$$\overrightarrow{MP_{proj}} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP_{proj}} = \boxed{-y\vec{y}}$$

$$\overrightarrow{MP_{LA}} = \overrightarrow{MP_{proj}} + \overrightarrow{P_{proj}P_{LA}} = \boxed{\sqrt{L^2 - y^2} \vec{x} - y\vec{y}}$$

$$y_{LA} = \overrightarrow{MP_{LA}} \cdot \vec{y}_c = -\sqrt{L^2 - y^2} \sin \theta - y \cos \theta \text{ soit } \boxed{y_{LA} = -\theta \sqrt{L^2 - y^2} - y}$$

Question 4 À l'aide des équations (I.1), (I.2), (I.3) et (I.4), exprimer en fonction de v_0 et L : $H_2(p)$, les gains K_1 et K_2 .

D'après la figure 3, $\Omega_{cons}(p) = K_1(-Y(p) - K_2\Theta(p))$.

Or, $-Y(p) - L\Theta(p) = Y_{LA}(p) = \frac{L^2}{2\rho(p)} = \frac{L^2}{2v_0}\Omega_{cons}(p)$, donc $\Omega_{cons}(p) = \frac{2v_0}{L^2}(-Y(p) - L\Theta(p))$.

D'où $\boxed{K_1 = \frac{2v_0}{L^2}}$ et $\boxed{K_2 = L}$.

D'après (I.4), $\dot{y} = v_0\theta$ or $y(t=0) = y_0$ donc $pY(p) - y_0 = v_0\Theta(p)$.

Ainsi $\boxed{H_2(p) = \frac{Y(p) - \frac{y_0}{p}}{\Theta(p)} = \frac{v_0}{p}}$.

Question 5 Exprimer sous forme canonique la fonction de transfert $H_\Delta(p) = \frac{\Delta Y(p)}{\Delta Y_{cons}(p)}$ (figure 4). Écrire sous forme littérale la pulsation propre en fonction de v_0 et L . Déterminer les valeurs numériques du gain statique et du coefficient d'amortissement. Commenter la valeur numérique du coefficient d'amortissement au regard de la réponse attendue vis-à-vis d'un échelon.

$$H_\Delta(p) = \frac{\Delta Y(p)}{\Delta Y_{cons}(p)} = \frac{K_{s1}}{p(1 + \tau_1 p) + K_{s1}} = \boxed{\frac{1}{1 + \frac{p}{K_{s1}} + \frac{\tau_1}{K_{s1}} p^2}}$$

$$\text{Pulsation propre : } \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{s1}}{\tau_1}} = \frac{v_0}{L} \sqrt{2}}$$

$$\text{Gain statique : } \boxed{K = 1}$$

$$\text{Coefficient d'amortissement : } \boxed{\xi = \frac{1}{2\sqrt{K_{s1}\tau_1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

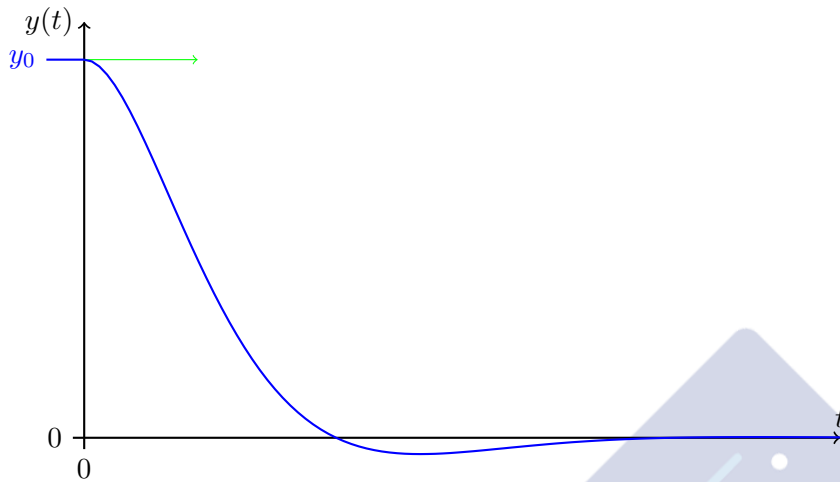
Le coefficient d'amortissement est légèrement plus grand que 0,69 donc la réponse indicielle sera rapide avec un dépassement légèrement inférieur à 5%.

Question 6 Exprimer la fonction de transfert du suivi de ligne $\frac{Y(p)}{Y_{ini}(p)}$ en fonction de $H_\Delta(p)$. Tracer l'allure de l'évolution temporelle de $y(t)$ en réponse à une perturbation constante initiale d'amplitude $y_0 > 0$. Évaluer les performances de la chaîne d'asservissement en réponse à une perturbation d'amplitude y_0 en mettant les

résultats sous la forme d'un tableau comme ci-après. Pour une vitesse v_0 fixée, préciser quelle performance dépend de L .

$$H_{\Delta}(p) = \frac{\Delta Y(p)}{\Delta Y_{cons}(p)} = \frac{Y(p) - Y_{ini}(p)}{Y_{cons}(p) - Y_{ini}(p)} \text{ donc si } Y_{cons}(p) = 0 \text{ alors } H_{\Delta}(p) = 1 - \frac{Y(p)}{Y_{ini}(p)}.$$

D'où $\frac{Y(p)}{Y_{ini}(p)} = 1 - H_{\Delta}(p)$.



Stabilité	Stable car ordre 2 standard (ω_0 et ξ strictement positifs)
Précision	Insensible à une perturbation en échelon car $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$
Rapidité	$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,69$ donc $t_{r5\%} \approx \frac{3}{\omega_0} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{L}{v_0}$

Pour une vitesse v_0 fixée, seule la rapidité dépend de L .

1.3 Validation du modèle linéaire et condition sur la valeur du paramètre L

- Objectif -

Comparer les performances obtenues en simulation du suivi d'un segment de route du droïde à la vitesse v_0 , en utilisant d'une part l'algorithme « pure pursuit » et, d'autre part, le modèle linéaire du suivi de trajectoire. Choisir une valeur de L .

1.3.1 Simulation du déplacement du droïde avec le modèle linéaire de suivi de trajectoire

Question 7 À partir des équations (I.5), réécrire et compléter les lignes 22 et 24 du code python donné en annexe B.

$$M1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & C_2 & C_1 \end{bmatrix}; M0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ligne 22 : `M1=np.array([[1,0,0],[0,1,0],[0,C2,C1]])`

Ligne 24 : `M0=np.array([[0,0,0],[0,0,-1],[0,1,0]])`

Question 8 En utilisant le schéma d'Euler explicite, donner l'expression de $\dot{X}(t = i \times Te)$ en fonction de $X(t + Te)$, $X(t)$ et Te . Réécrire et compléter alors la ligne 40 du code python de l'annexe B.

$$\dot{X}(t = i \times T_e) = \frac{X(t + T_e) - X(t)}{T_e}$$

D'après (I.6), $M1 \cdot \dot{X}(t) + M0 \cdot X(t) = F$ donc $\dot{X}(t) = M1^{-1} \cdot (F - M0 \cdot X(t))$

Donc, $X(t + T_e) = X(t) + T_e \times (M1^{-1} \cdot (F - M0 \cdot X(t)))$

Ligne 40 : `X[:,i+1]=invM1.dot(F-M0.dot(X[:,i]))*Te+X[:,i]`

1.3.2 Analyse comparative des résultats de simulation

Question 9 En comparant les performances obtenues en simulation avec le modèle linéaire et l'algorithme « pure poursuit », justifier qu'il est pertinent d'utiliser le modèle linéaire pour choisir le paramètre L de l'algorithme « pure poursuit ».

Lorsque $L = 0,5$ m, le résultat de simulation obtenu avec le modèle linéaire est très proche du résultat obtenu avec l'algorithme « pure poursuit ». L'écart maximal est d'environ 0,02 cm lorsque $y(t) \approx 4$ cm.

Lorsque $L = 0,05$ m, le résultat de simulation obtenu avec le modèle linéaire surestime l'écart par rapport à la trajectoire comparé au résultat de simulation obtenu avec l'algorithme « pure poursuit ».

Il paraît donc pertinent d'utiliser le modèle linéaire pour choisir le paramètre L de l'algorithme « pure poursuit ».

Question 10 Dans le cadre d'un suivi de trajectoire urbain avec « droïde parfait » dont le cahier des charges est donné sur le tableau 1, choisir une valeur de L qui vérifie la condition de linéarisation ($L > 10|y|_{MAXI}$) et conclure vis-à-vis du cahier des charges. Justifier la réponse.

La condition de linéarisation impose $L > 10|y|_{MAXI}$ et le cahier des charges demande $|y|_{MAXI} = 5$ cm. Il faut donc $L \geq 0,5$ m.

De plus, la distance à convergence $t_{r5\%} \times v_0 = \frac{3L}{\sqrt{2}}$ doit être la plus faible possible donc on choisit $L = 0,5$ m.

2 Conception de la commande du droïde TH03

- Objectif

Concevoir une commande du droïde afin de piloter la vitesse de lacet ω conformément à ce que nécessite le guidage avec l'algorithme « pure poursuit »

2.1 Modélisation du comportement dynamique du droïde

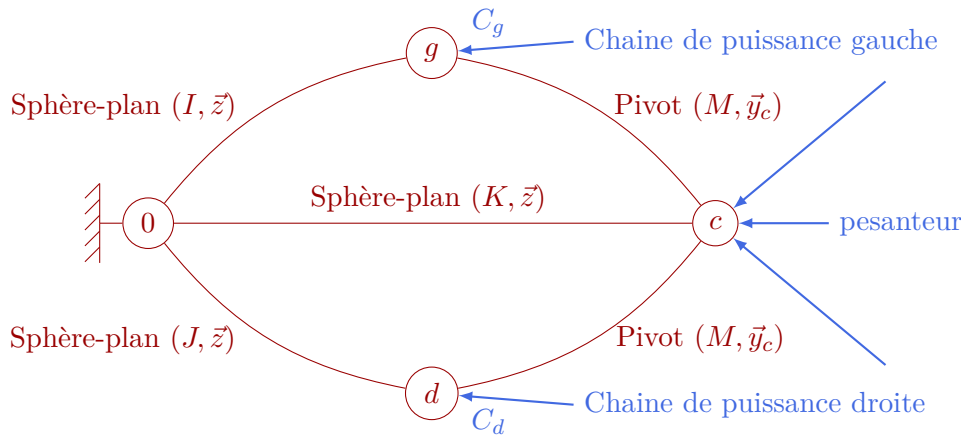
- Objectif

Déterminer un modèle reliant les variables v_0 , ω , $\dot{\omega}$, C_g et C_d et les grandeurs caractéristiques du système sans perturbation extérieure.

Question 11 Expliquer en quoi une approche énergétique est insuffisante pour atteindre l'objectif fixé.

Une étude énergétique ne fournit qu'une seule équation donc il ne sera pas possible de découpler dans cette équation les mouvements de translation et de rotation du droïde.

Question 12 Après avoir représenté un graphe de structure mettant en évidence les solides (c), (g) et (d), les liaisons et les actions mécaniques qui agissent sur ou au sein du droïde, isoler successivement chacune des roues motrices et appliquer le Théorème du Moment Dynamique (TMD) au point M en projection sur $\vec{y}_c$.



Les effets d'inertie sur les roues sont négligeables et la liaison pivot d'axe $(M, \vec{y}_c)$ entre g et c est parfaite donc le TMD appliqué à g au point M projeté sur $\vec{y}_c$ permet d'écrire $\vec{\delta}_{M,g/0} \cdot \vec{y}_c = 0 = 0 + C_g + (\vec{M}\vec{I} \wedge \vec{R}_{0 \rightarrow g}) \cdot \vec{y}_c$
D'où $C_g - RX_g = 0$

De même le TMD appliqué à d au point M projeté sur $\vec{y}_c$ donne $C_d - RX_d = 0$

Question 13 À partir de l'analyse de la forme de l'opérateur d'inertie $I_{G,c}$, préciser l'(les) hypothèse(s) supplémentaire(s) émise(s) au sujet du corps (c) , sachant que le chargement des colis est aléatoire.

$$I_{G,c} = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{G,(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)} \quad \text{donc le plan } (G, \vec{x}_c, \vec{z}_c) \text{ est un plan de symétrie matériel pour le solide } (c).$$

Question 14 Exprimer sous leur forme la plus simple le moment cinétique en G de (c) par rapport à $\mathcal{R}$ noté $\vec{\sigma}_{G,c/\mathcal{R}}$, puis le moment dynamique en G de (c) par rapport à $\mathcal{R}$ noté $\vec{\delta}_{G,c/\mathcal{R}}$ en fonction de $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ et des éléments d'inertie de (c) . Exprimer également sous leur forme la plus simple la vitesse de G de (c) par rapport à $\mathcal{R}$ notée $\vec{v}_{G,c/\mathcal{R}}$ et son accélération notée $\vec{\Gamma}_{G,c/\mathcal{R}}$.

G est le centre d'inertie du solide (c) et $\vec{\Omega}_{c/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{z}_c$ donc $\vec{\sigma}_{G,c/\mathcal{R}} = I_{G,c} \vec{\Omega}_{c/\mathcal{R}} = -E \dot{\theta} \vec{x}_c + C \dot{\theta} \vec{z}_c$

$$\vec{\delta}_{G,c/\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{\sigma}_{G,c/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = -E \ddot{\theta} \vec{x}_c + C \ddot{\theta} \vec{z}_c - E \dot{\theta} \left. \frac{d\vec{x}_c}{dt} \right|_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \text{or} \quad \left. \frac{d\vec{x}_c}{dt} \right|_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \dot{\theta} \vec{y}_c$$

$$\text{Donc } \vec{\delta}_{G,c/\mathcal{R}} = -E \ddot{\theta} \vec{x}_c - E \dot{\theta}^2 \vec{y}_c + C \ddot{\theta} \vec{z}_c = \begin{pmatrix} -E \ddot{\theta} \\ -E \dot{\theta}^2 \\ C \ddot{\theta} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)}$$

$$\vec{v}_{G,c/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M,c/\mathcal{R}} + \vec{GM} \wedge \vec{\Omega}_{c/\mathcal{R}} = v_0 \vec{x}_c + (a \vec{x}_c + h \vec{z}_c) \wedge \dot{\theta} \vec{z}_c \Rightarrow \vec{v}_{G,c/\mathcal{R}} = v_0 \vec{x}_c - a \dot{\theta} \vec{y}_c$$

$$\vec{\Gamma}_{G,c/\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{v}_{G,c/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \dot{v}_0 \vec{x}_c + v_0 \dot{\theta} \vec{y}_c - a \ddot{\theta} \vec{y}_c + a \dot{\theta}^2 \vec{x}_c \Rightarrow \vec{\Gamma}_{G,c/\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \dot{v}_0 + a \dot{\theta}^2 \\ v_0 \dot{\theta} - a \ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)}$$

Question 15 En isolant l'ensemble $\{(c), (g), (d)\}$, proposer et mettre en œuvre une démarche rigoureuse (inventaire des actions mécaniques, théorème(s) utilisé(s) et projection(s)) permettant de déterminer les équations de mouvement.

Ensemble isolé : $\{(c), (g), (d)\}$

$$\text{BAME : } T_{0 \rightarrow g} = \begin{Bmatrix} X_g & 0 \\ Y_g & 0 \\ Z_g & 0 \end{Bmatrix}_{I,(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)} ; T_{0 \rightarrow d} = \begin{Bmatrix} X_d & 0 \\ Y_d & 0 \\ Z_d & 0 \end{Bmatrix}_{J,(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)} ; T_{0 \rightarrow c} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{0 \rightarrow c} = N_K \vec{z}_c \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_K ;$$

$$T_{pes \rightarrow c} = \begin{Bmatrix} -mg\vec{z}_c \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

Le TRD projeté sur $\vec{x}_c$ donne : $m(v_0 + a\dot{\theta}^2) = X_g + X_d$

Le TRD projeté sur $\vec{y}_c$ donne : $m(v_0\dot{\theta} - a\ddot{\theta}) = Y_g + Y_d$

Le TMD au point G projeté sur $\vec{z}_c$ donne : $C\ddot{\theta} = (\vec{G}\vec{J} \wedge \vec{R}_{0 \rightarrow d}) \cdot \vec{z}_c + (\vec{G}\vec{I} \wedge \vec{R}_{0 \rightarrow g}) \cdot \vec{z}_c + (\vec{G}\vec{K} \wedge \vec{R}_{0 \rightarrow c}) \cdot \vec{z}_c$
 $= (a\vec{x}_c - l\vec{y}_c - (R-h)\vec{z}_c) \cdot (-X_d\vec{y}_c + Y_d\vec{x}_c) + (a\vec{x}_c + l\vec{y}_c - (R-h)\vec{z}_c) \cdot (-X_g\vec{y}_c + Y_g\vec{x}_c) \Rightarrow C\ddot{\theta} = a(Y_d + Y_g) + l(X_d - X_g)$

Question 16 En tenant compte des résultats obtenus aux quatre questions précédentes, montrer que le modèle dynamique du droïde se réduit finalement au système d'équations (II.1), où λ_1 , λ_2 , λ_3 et λ_4 sont des constantes à exprimer en fonction de a , m , R , l et/ou C .

Grâce à la question 12, nous savons que $X_d = \frac{C_d}{R}$ et $X_g = \frac{C_g}{R}$. Donc, en notant $\omega = \dot{\theta}$, on obtient les équations suivantes : $v_0 + a\omega^2 = \frac{1}{mR}(C_d + C_g)$ et $C\dot{\omega} = am(v_0\omega - a\dot{\omega}) + \frac{l}{R}(C_d - C_g)$ d'où

$$\begin{cases} v_0 + a\omega^2 = \frac{1}{mR}(C_d + C_g) \\ \dot{\omega} - \frac{am}{C + ma^2}\omega v_0 = \frac{l}{R(C + ma^2)}(C_d - C_g) \end{cases}$$

On obtient bien le système d'équation demandé avec $\lambda_1 = a$; $\lambda_2 = \frac{l}{R(C + ma^2)}$; $\lambda_3 = \frac{1}{mR}$; $\lambda_4 = \frac{-am}{C + ma^2}$

2.2 Conception de la loi de commande de la vitesse de lacet

- Objectif

Déterminer les correcteurs de l'asservissement de la vitesse de lacet ω et tenir compte des performances de cet asservissement pour affiner les réglages de L et v_0 .

2.2.1 Réglage du gain $K_{p\Omega}$ du correcteur de la commande en lacet ω

- Objectif

Prendre en compte les limites en courant des motorisations afin de régler le gain $K_{p\Omega}$ du correcteur de la commande en lacet.

Question 17 À partir du modèle de la figure 8 et du cahier des charges du tableau 2, justifier le choix d'une correction de type Proportionnel Intégral.

L'écart à la trajectoire en régime permanent suite à la rencontre d'un obstacle doit être nul. Il faut donc un intégrateur en amont de la perturbation dans la boucle d'asservissement. Le correcteur PI permet ainsi de rejeter la perturbation en échelon (résistance au roulement constante et non nulle modélisée par un échelon).

Question 18 En utilisant le modèle de la figure 8 et le théorème de la valeur initiale, montrer qu'il est nécessaire de vérifier $K_{p\Omega} \leq \frac{|i_m|_{MAX}}{2|\sin \alpha|_{MAX}} \times \frac{L}{v_0}$ afin de limiter le courant dans les moteurs.

Si $i_g = -i_d$ alors $I_d(p) = PI_\Omega(p) \times \frac{|\omega_{cons}|_{MAX}}{p}$ car $\varepsilon_\Omega(p)$ est un échelon d'amplitude $|\omega_{cons}|_{MAX}$.

Le théorème de la valeur initiale permet d'écrire $\lim_{t \rightarrow 0} i_d(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pI_d(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} K_{p\Omega} \frac{1 + T_{i\Omega}p}{T_{i\Omega}p} |\omega_{cons}|_{MAX} = K_{p\Omega} |\omega_{cons}|_{MAX}$

Il faut $\lim_{t \rightarrow 0} i_d(t) < |i_m|_{MAX}$ car le courant moteur est maximal au démarrage.

D'où
$$K_{p\Omega} < \frac{|i_m|_{MAX}}{|\omega_{cons}|_{MAX}} = \frac{|i_m|_{MAX} L^2}{2v_0 |y_{LA}|_{MAX}} = \frac{|i_m|_{MAX} L}{2v_0 |\sin \alpha|_{MAX}}$$

2.2.2 Influence du couplage entre les asservissements de v_0 et de ω

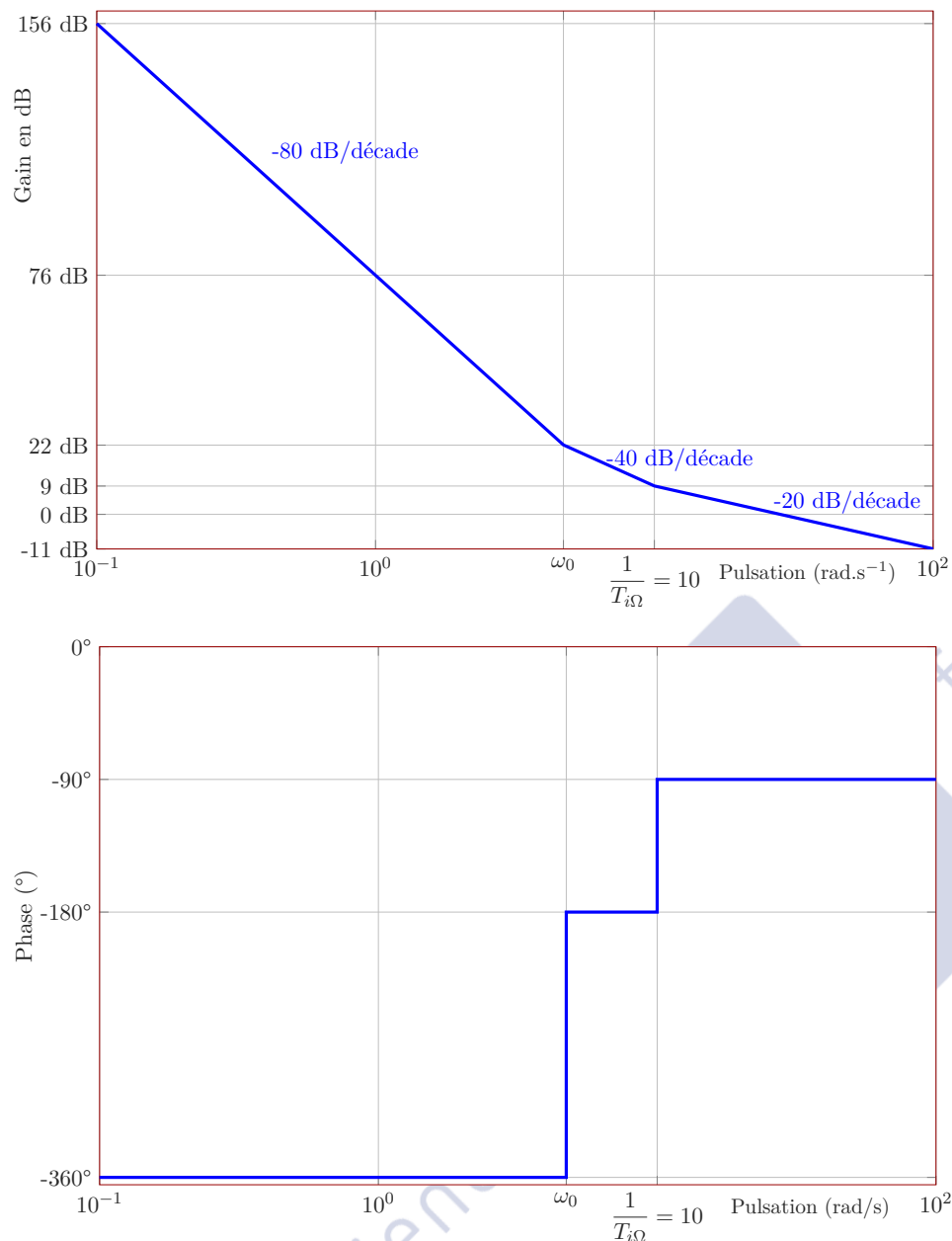
- Objectif

Évaluer l'influence du couplage des asservissements sur le réglage du correcteur de l'asservissement de la vitesse de lacet ω et celle de la valeur de L sur les performances obtenues.

Question 19 À partir du modèle de la figure 9, montrer qu'il est possible d'exprimer $FTBO_\Omega(p) = -\frac{S(p)}{E(p)}$ sous la forme : $FTBO_\Omega(p) = K_{BO} \frac{v_0}{T_{i\Omega} p^4} \left(1 + T_{i\Omega} p \right) \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)$ avec $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\omega_0 = \sqrt{2} \frac{v_0}{L}$. Exprimer K_{BO} en fonction des paramètres du modèle de la figure 9.

$$\begin{aligned} S(p) &= -K_{p\Omega} \frac{1 + T_{i\Omega} p}{T_{i\Omega} p} \left(\frac{2v_0}{L^2} \frac{v_0}{p} \frac{1}{p} \frac{\lambda_2}{p} 2K_m K_r + \frac{2v_0}{L^2} \frac{1}{p} \frac{\lambda_2}{p} 2K_m K_r + \frac{\lambda_2}{p} 2K_m K_r \right) E(p) \\ FTBO_\Omega(p) &= \frac{-S(p)}{E(p)} = K_{p\Omega} \frac{v_0}{T_{i\Omega} p^4} (1 + T_{i\Omega} p) \left(\frac{2v_0}{L^2} \lambda_2 2K_m K_r + \frac{2}{L} \lambda_2 2K_m K_r p + \frac{p^2}{v_0} \lambda_2 2K_m K_r \right) \\ &= K_{p\Omega} \frac{2v_0}{L^2} \lambda_2 2K_m K_r \frac{v_0}{T_{i\Omega} p^4} (1 + T_{i\Omega} p) \left(1 + \frac{L}{v_0} p + \frac{L}{2v_0^2} p^2 \right) = K_{BO} \frac{v_0}{T_{i\Omega} p^4} (1 + T_{i\Omega} p) \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right) \\ \text{avec } \omega_0 &= \frac{v_0}{L} \sqrt{2}, \xi = \frac{L}{v_0} \times \frac{\omega_0}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } K_{BO} = K_{p\Omega} \frac{4v_0}{L^2} \lambda_2 2K_m K_r \end{aligned}$$

Question 20 Tracer sur la copie les diagrammes de Bode asymptotiques de la fonction $FTBO_\Omega(p)$, pour les pulsations comprises entre 0,1 et 100 rad.s⁻¹, $FTBO_\Omega(p) = \frac{6300}{p^4} (1 + 0,1p) \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4,72} p + \frac{p^2}{4,72^2} \right)$ obtenue en prenant en compte le couplage et avec $K_{p\Omega} = 37$ et $T_{i\Omega} = 0,1$ s. Indiquer les valeurs des pentes, des pulsations, des gains et des phases remarquables tout en situant les origines des repères (axe 0 dB et 0 degrés).



Question 21 À partir des tracés asymptotiques et des résultats de simulation de l'annexe C, justifier qu'il est pertinent d'utiliser le modèle de boucle ouverte sans prise en compte du couplage (figure 9). Quelle est alors l'influence d'une diminution du seul paramètre L (v_0 et $K_{p\Omega}$ inchangés) sur les performances de l'asservissement de vitesse de lacet ω ?

Pour $T_{i\Omega} = 0,1$ s, l'annexe C montre que les diagrammes de Bode obtenus avec et sans couplage sont superposés. Les allures obtenues pour les autres valeurs de $T_{i\Omega}$ sont similaires au profil asymptotique déterminé à la question précédente (pente de -80 dB/décade puis de -40 dB/décade puis de -20 dB/décade) donc la prise en compte du couplage pour l'étude de la FTBO ne semble pas nécessaire.

Diminuer L permet d'augmenter K_{BO} et ω_0 . Donc la pulsation de coupure à 0 dB de la FTBO sera peu impactée mais la marge de phase diminuera (la phase asymptotique passe de -360° à -180° à la pulsation ω_0 donc si ω_0 augmente, la phase sera proche de -360° pour une plus grande bande passante).

Si L diminue, le système en boucle fermée sera moins stable.

2.2.3 Réglage du temps $T_{i\Omega}$ de la commande en lacet ω

- Objectif -

Utiliser des résultats de simulation et l'analyse fréquentielle de la boucle ouverte afin de choisir une valeur pour le paramètre $T_{i\Omega}$ du correcteur de la commande en lacet.

Question 22 Que modélisent les composantes d'action mécanique T_I , T_J et Y_J ? Justifier le choix d'avoir modélisé $\vec{R}_{0 \rightarrow g} \cdot \vec{y}_c = Y_I = 0$ du point de vue de la résolution du système d'équations issu de l'application du PFD à l'ensemble $\{(c), (d), (g)\}$.

T_I est l'action mécanique tangentielle due au frottement de la roue gauche sur le trottoir.

T_J est l'action mécanique tangentielle due au frottement sec de la roue droite sur et la route dans la direction $\vec{x}$.

Y_J est l'action mécanique tangentielle due au frottement sec de la roue droite sur et la route dans la direction $\vec{y}$.

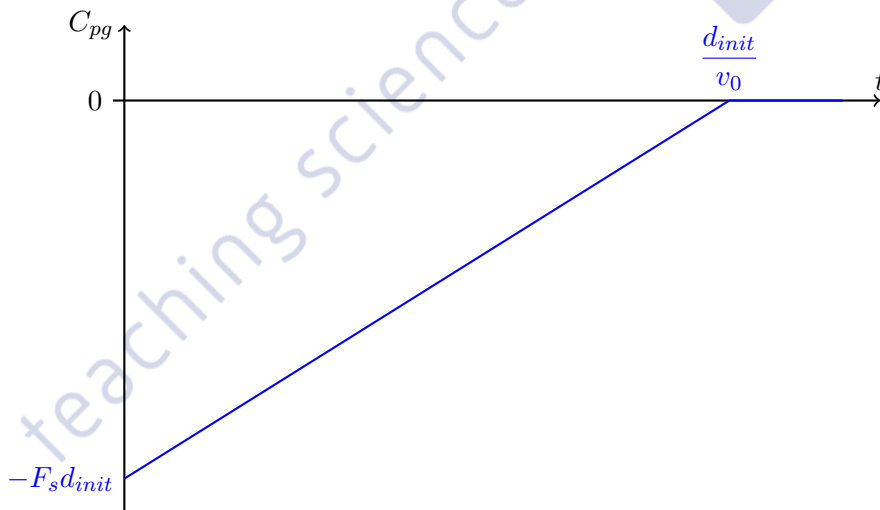
L'application du PFD à l'ensemble $\{(c), (d), (g)\}$ permet d'écrire 6 équations. $\vec{R}_{0 \rightarrow g} \cdot \vec{y}_c = Y_I = 0$ pour pouvoir résoudre le système d'équation (6 équations et 6 inconnues : T_I , N_I , T_J , Y_J , N_J et N_K).

Question 23 Donner l'expression du couple perturbateur issu de l'action du trottoir sur la roue gauche, noté C_{pg} , en fonction de d et F_s . L'exprimer à nouveau en fonction de F_s , v_0 , d_{init} et du temps t écoulé depuis l'instant du contact de la roue avec le trottoir.

$$C_{pg} = \vec{M}_{M,0 \rightarrow g} \cdot \vec{y}_c = (\vec{M}\vec{I} \wedge \vec{R}_{0 \rightarrow g}) \cdot \vec{y}_c = \vec{M}\vec{I} \cdot (-F_s \vec{x}) \Rightarrow \boxed{C_{pg} = -dF_s}$$

$$\text{Si } v_0 \text{ est constante alors } d = \begin{cases} d_{init} - v_0 t & \text{si } t \in \left[0; \frac{d_{init}}{v_0}\right] \\ 0 & \text{si } t > \frac{d_{init}}{v_0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{C_{pg} = -F_s(d_{init} - v_0 t) \text{ si } t \in \left[0; \frac{d_{init}}{v_0}\right]}$$

Question 24 En exploitant l'expression obtenue, tracer l'allure de l'évolution temporelle de C_{pg} pour un droïde avançant à la vitesse $\vec{v}_{M,c/\mathcal{R}} = v_0 \vec{x}$ avec v_0 constante lors du contact avec un trottoir. Préciser les points caractéristiques de la courbe.



Question 25 À partir des résultats de simulation de la figure 10 et des analyses fréquentielles de l'annexe C, choisir une valeur de $T_{i\Omega}$ pour $K_{p\Omega} = 37$ qui respecte le cahier des charges du tableau 2.

L'écart maximal à la trajectoire lors de la rencontre d'un obstacle doit être inférieur à 1,5 cm donc, d'après la

figure 10, il faut choisir $T_{i\Omega} = 0,1$ s ou $T_{i\Omega} = 0,01$ s.

La marge de phase, mesurée sur l'annexe C, pour $T_{i\Omega} = 0,01$ s vaut environ 25° , ce qui est inférieur à 50° . La valeur $T_{i\Omega} = 0,01$ s ne convient pas.

La marge de phase pour $T_{i\Omega} = 0,1$ s vaut $65^\circ > 50^\circ$.

De plus, la question 18 a montré que si $K_{p\Omega} = 37$ alors la commande en courant reste inférieure à 25 A.

Et quelle que soit la valeur de $T_{i\Omega}$, l'écart à la trajectoire en régime permanent suite à la rencontre d'un obstacle est nul.

On choisit $T_{i\Omega} = 0,1$ s afin de respecter l'ensemble des exigences du cahier des charges.

3 Stratégie de planification de trajectoire

- Objectif -

Concevoir et valider un algorithme de planification de trajectoire en vue d'organiser une tournée de livraison de colis qui :

- minimise la quantité d'énergie consommée par le robot ;
- ne passe qu'une et une seule fois par chaque point de livraison.

3.1 Matrice des quantités d'énergies

- Objectif -

Modéliser la dépense énergétique du droïde lors des trajets entre deux points de livraison.

Question 26 Expliquer ce que représentent les termes notés « inf » et, compte-tenu du graphe de la figure 11, préciser les valeurs des termes : $\text{cout}[3,4]$, $\text{cout}[2,3]$ et $\text{cout}[2,1]$. Au vu du contexte d'utilisation du droïde, donner deux raisons possibles qui expliquent pourquoi la matrice « cout » n'est pas complètement symétrique.

« inf » correspond à un coût ou à une distance infinie entre deux nœuds du graphe, sa présence dans la matrice **cout** indique donc les nœuds non directement connectés. Par exemple, $\text{count}[0,2]=\text{inf}$, i.e. les nœuds 0 et 2 ne sont pas connectés.

Les valeurs des termes demandés sont : $\text{cout}[3,4]=3$, $\text{count}[2,3]=4$ et $\text{count}[2,1]=\text{inf}$.

La matrice **count** n'est pas symétrique, elle représente un graphe orienté et pondéré (figure 11) : les coûts des trajets ne sont pas forcément symétriques pour des raisons de topographie par exemple, de plus il peut exister des sens uniques sur les trajets et ainsi le nœud 2 est atteint directement via le nœud 1 mais la réciproque est fausse.

3.2 Formalisation du sous-problème

- Objectif -

Écrire une ou plusieurs équations permettant de déterminer la trajectoire passant une seule fois par tous les points de livraison et qui minimise la quantité d'énergie totale consommée par le droïde sur sa tournée.

Question 27 Compléter la deuxième équation du système (III.1), en fonction de count_{ij} , P et j , afin d'établir la relation de récurrence qui permet de traduire correctement la fonction objectif.

si $P \neq \emptyset$, $E(i, P) = \min_{j \in P} (\text{cout}_{ij} + E(j, P \setminus j))$.

3.3 Implémentation de l'équation de la programmation dynamique et résolution du problème

- Objectif -

Analyser et compléter le script python qui implémente l'algorithme de planification de trajectoire, puis valider les résultats obtenus.

Question 28 Compléter la ligne 26 du script de l'annexe D afin d'implémenter complètement l'équation de la programmation dynamique (III.1).

Ligne 26 : `if cout[i,j] + e < e_mini :`

Question 29 Expliquer le rôle des lignes 32 à 42 du script de l'annexe D et compléter en conséquence les lignes 40 et 41.

Les lignes 32 à 42 permettent de calculer le trajet optimal par l'algorithme type Dijkstra. L'algorithme détermine pas à pas, le trajet optimal, dont le coût (ou l'énergie dépensée) est le moins élevé qui passe par tous les points de livraison une seule fois. Lorsqu'un point de livraison a été ajouté au trajet, il est retiré de la liste des points non encore livrés.

Ligne 40 : `tr_opt.append(j)`

Ligne 41 : `P = soustraction(P,j)`

Question 30 Interpréter les résultats obtenus.

$e_{opt}=18$ est le coût du trajet optimal. $tr_{opt}=0,4,1,2,3,0$ représente le trajet optimal, ce qui fait d'après le graphe de la figure 11, un coût de $3 + 4 + 5 + 4 + 2 = 18$.

4 Synthèse

- Objectif -

À l'aide des résultats de simulation du suivi d'un parcours liant plusieurs points de livraison, valider les choix et les réglages élaborés dans les parties précédentes.

Question 31 À partir des courbes de simulations fournies, expliquer quelle caractéristique de la trajectoire planifiée impacte directement l'amplitude de l'écart entre le droïde et la trajectoire planifiée. Justifier la réponse en analysant simultanément les courbes de trajectoire et de courant moteur. Quelles sont les conséquences sur le choix de $K_{p\Omega} \leq \frac{|i_m|_{MAX}}{2|\sin \alpha|_{MAX}} \times \frac{L}{v_0}$ et sur la saturation des courants moteurs ?

En analysant les figures 13, 14 et 15, on observe que l'écart entre la trajectoire planifiée et la trajectoire simulée du droïde est plus important lorsque le virage effectué est serré. Cet écart correspond également à une augmentation du courant moteur et parfois à une saturation.

Plus l'angle entre deux segments consécutifs est important plus $|\sin \alpha|$ est important, cela influe donc sur $|\sin \alpha|_{MAX}$ et le réglage du gain $K_{p\Omega}$ ne permet pas d'assurer la limitation des courants moteurs.

Question 32 En indiquant les numéros de figures dont le ratio de simulation $\frac{v_0}{L}$ est identique, indiquer les performances qui sont comparables et celles qui diffèrent (il est possible de focaliser l'analyse sur le voisinage du point P_4). Que permet de vérifier la troisième simulation ? Quelle conséquence le choix de $\frac{v_0}{L}$ a-t-il sur la durée totale d'une tournée de livraison ?

Pour les résultats de simulation des figures 13 et 15, le ratio $\frac{v_0}{L} \approx 3,3 \text{ s}^{-1}$ est identique. On remarque qu'au niveau du point P_4 (virage serré) le suivi est stable pour les deux simulations, mais l'écart diffère : le suivi de trajectoire est très précis dans le cas de la simulation de la figure 15 (v_0 et L petit). En comparaison, les résultats de la simulation de la figure 14, pour laquelle les paramètres sont les mêmes que celle de la figure 13 mais avec un L plus petit, montre un suivi moins stable autour du point P_4 . Pour obtenir des résultats satisfaisants tant du point de vue de la stabilité que de la précision, il faut donc diminuer simultanément L et v_0 .

Question 33 Proposer une solution relative au choix du couple de valeurs (L, v_0) afin de minimiser la durée d'une tournée de livraison, sachant que le droïde se déplace le long d'une trajectoire planifiée à l'avance.

Si la trajectoire est planifiée à l'avance, les angles entre deux segments successifs sont donc connus et il est possible de déterminer un couple de valeur (L, v_0) pour chaque segment permettant un suivi de trajectoire optimal. Dans l'algorithme « pure pursuit », il faudra adapter en temps réel la valeur du couple (L, v_0) pour minimiser la durée d'une tournée de livraison.