# DS 1 : Problème 1

## SLCI : Table basculante Industrielle

**Calculatrice autorisée**

**Les résultats doivent être encadrés et mis sous forme simplifiée**

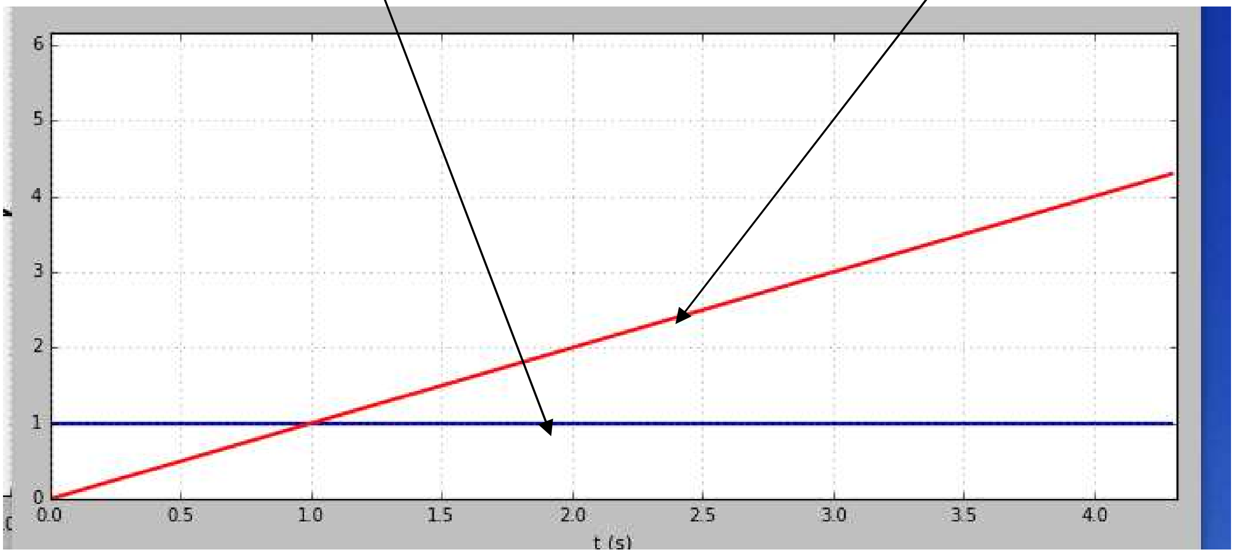
**Les copies seront numérotées**

**Soin et justifications devront être apportés dans les réponses**

1) $q(t) = S\dot{x}(t)$

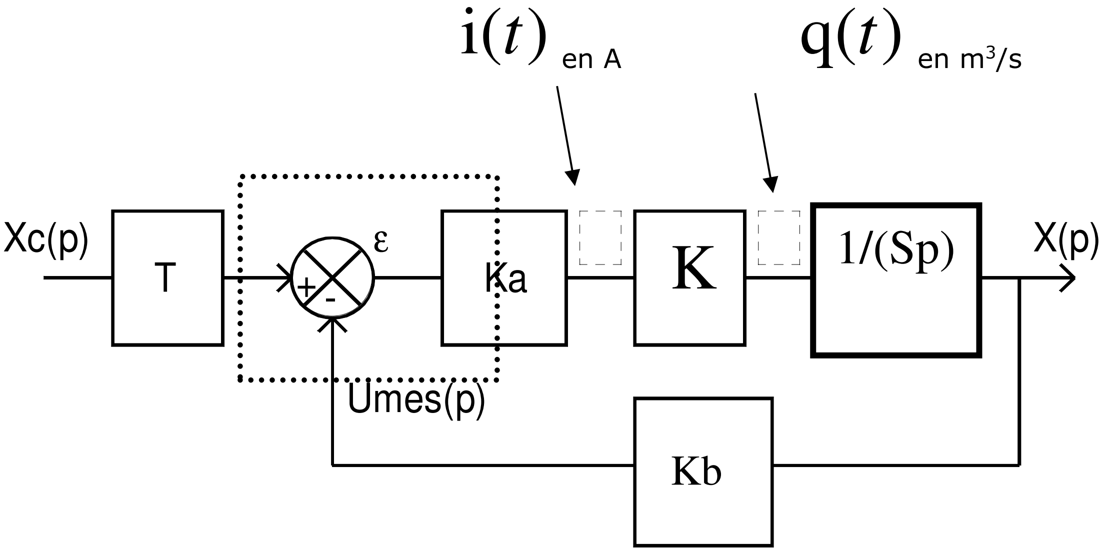
2) $H(p) = \dfrac{X(p)}{Q(p)} = \dfrac{1}{pS}$

si $q(t) = q_0.u(t)$ avec u(t) , l'échelon et $x(t) = \dfrac{q_0}{S}t.u(t)$




**Ici q0=1 et S=1**

**3) Et 4)**




Kb en V/m

**5)** $\varepsilon(t) = U(t) - U_{mes}(t) \Leftrightarrow \varepsilon(p) = Xc(p)T - X(p)Kb$

$T = Kb$

**6)** $H(p) = \dfrac{X(p)}{Xc(p)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{pS}{KaKT}}$ $\tau = \dfrac{S}{KaKT}$ $K = 1$

**7)**

$\tau = 2.34s$ **ATTENTION AUX UNITES**

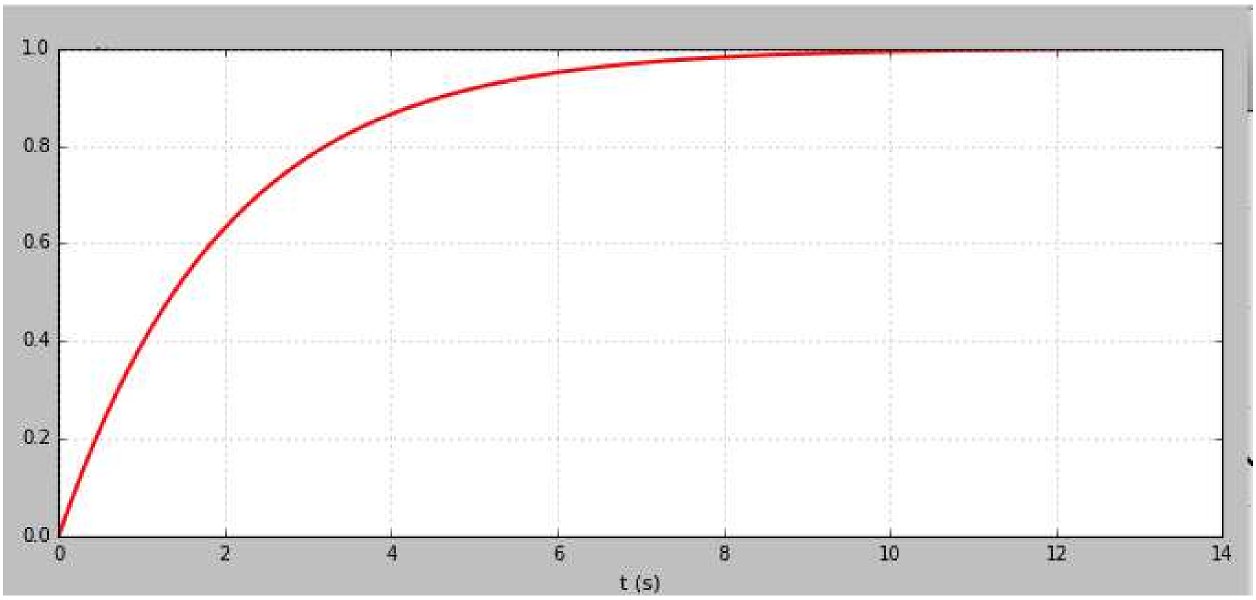
**8)**

$H(p) = \dfrac{X(p)}{Xc(p)} = \dfrac{1}{1+2p}$ $Xc(p) = \dfrac{A}{p}$

$x(t) = A(1 - e^{(-t/2)})$

$E(t) = x(t) - x_c(t) = -Ae^{(-t/2)}$

Avec A=1



**9)** $E(\infty) \to 0$

**10)**

trep95% $= 3\tau$

$$3\tau = \frac{3S}{KaKT} = 6s$$

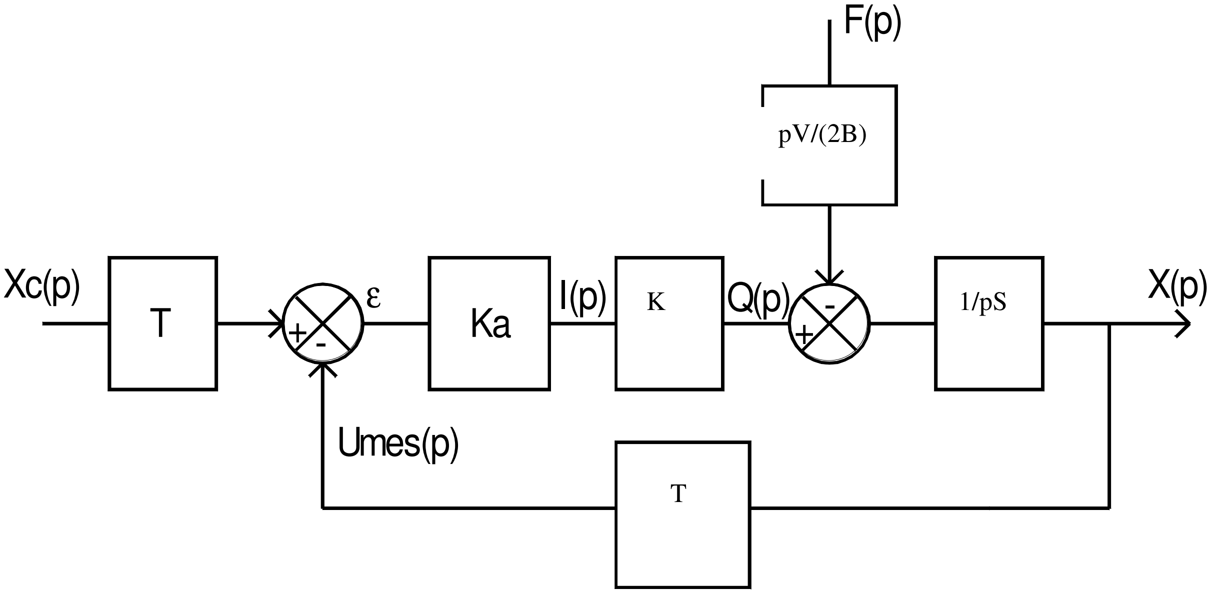
S $= 66\text{cm}^2$

**ATTENTION AUX UNITES**

**11)**

$$Q(p) = SpX(P) + \frac{V}{2B}\,pF(p) \to \frac{Q(p) - \frac{V}{2B}\,pF(p)}{Sp} = X(P)$$

**12)**




**13) Théorème de superposition**

$$\text{H1(p)} = \left(\frac{X(p)}{Xc(p)}\right)_{F(p)=0} = \frac{1}{1 + \frac{pS}{KaKT}}$$

$$H2(p) = \left(\frac{X(p)}{F(p)}\right)_{Xc(p)=0} = -\frac{pV}{2B}\frac{\frac{1}{KaKT}}{1+\frac{pS}{KaKT}}$$

$$X(p) = \left(\frac{X(p)}{Xc(p)}\right)_{F(p)=0} Xc(p) + \left(\frac{X(p)}{F(p)}\right)_{Xc(p)=0} F(p)$$

$$C = \tau = \frac{S}{KaKT} \quad \text{et} \quad D = -\frac{V}{2B}\times\frac{1}{KaKT} \approx 0.045$$

$$\tau = \frac{pS}{KaKT} = 4.68\text{s}$$

**14)**

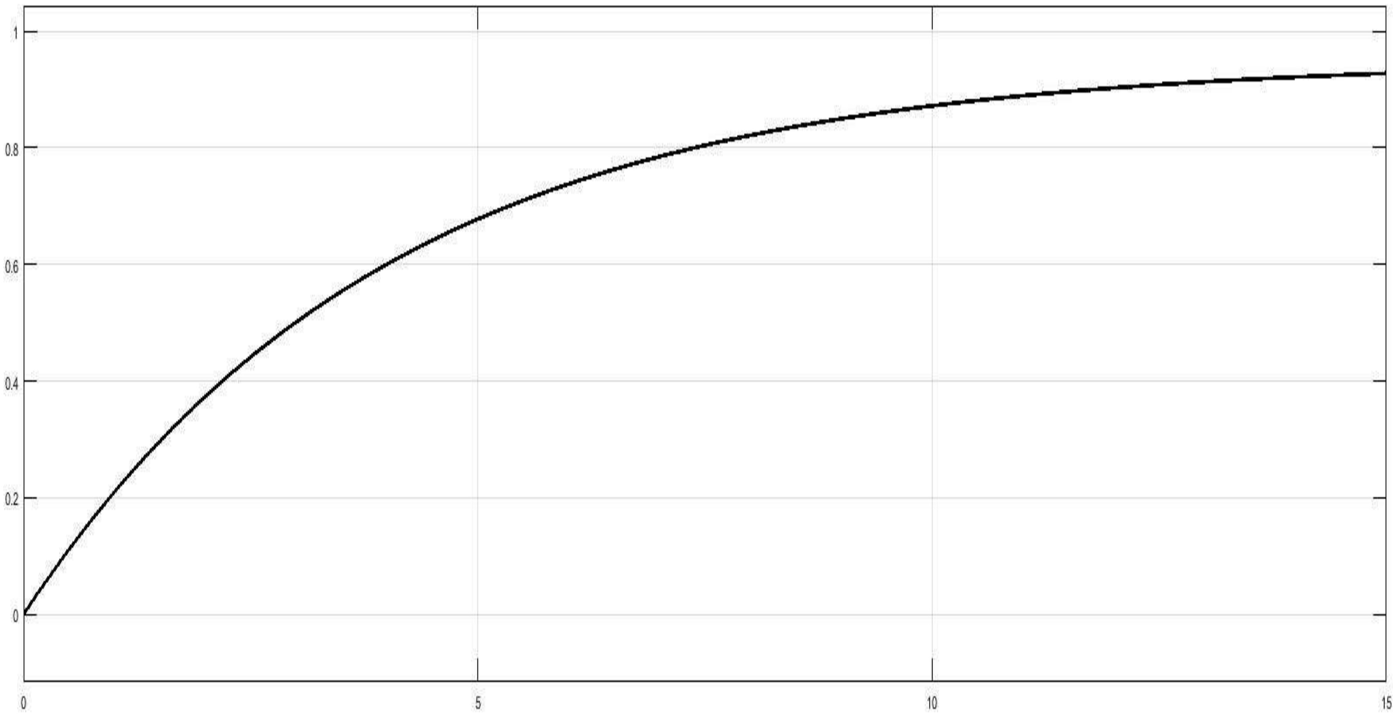
$$Xc(p) = \frac{A}{p} \qquad F(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$X(p) = \left(\frac{X(p)}{Xc(p)}\right)_{F(p)=0} Xc(p) + \left(\frac{X(p)}{F(p)}\right)_{Xc(p)=0} F(p)$$

$$X(p) = \frac{1}{4p+1} Xc(p) - 0.05\frac{p}{4p+1} F(p)$$

$$X(p) = \frac{1}{4p+1}\frac{A}{p} - 0.05\frac{p}{4p+1}\frac{1}{p^2}$$

$$x(t) = (A-0.05)(1-e^{(-t/4)})$$




**15)** $x(\infty) \to A - 0.05$ $\qquad E(\infty) \to 0.05$

# DS 1 : Problème 2

## Etude de la commande d'un robot de manutention

## 3ème partie : Asservissement de la position du fût

### 1 Transformée de Laplace de $\Omega m(p)$

Transformation de LAPLACE des quatre équations différentielles caractérisant le moteur

$U(p) = R\, I(p) + E(p)$

$Cm(p) = Kt\, I(p)$

$E(p) = Ke\, \Omega m(p)$

$Jm\, p\, \Omega m(p) = Cm(p)$

En combinant ces quatre équations on obtient : $\Omega m(p) = \dfrac{Kt}{Kt\, Ke + p\, R\, Jm} U(p)$

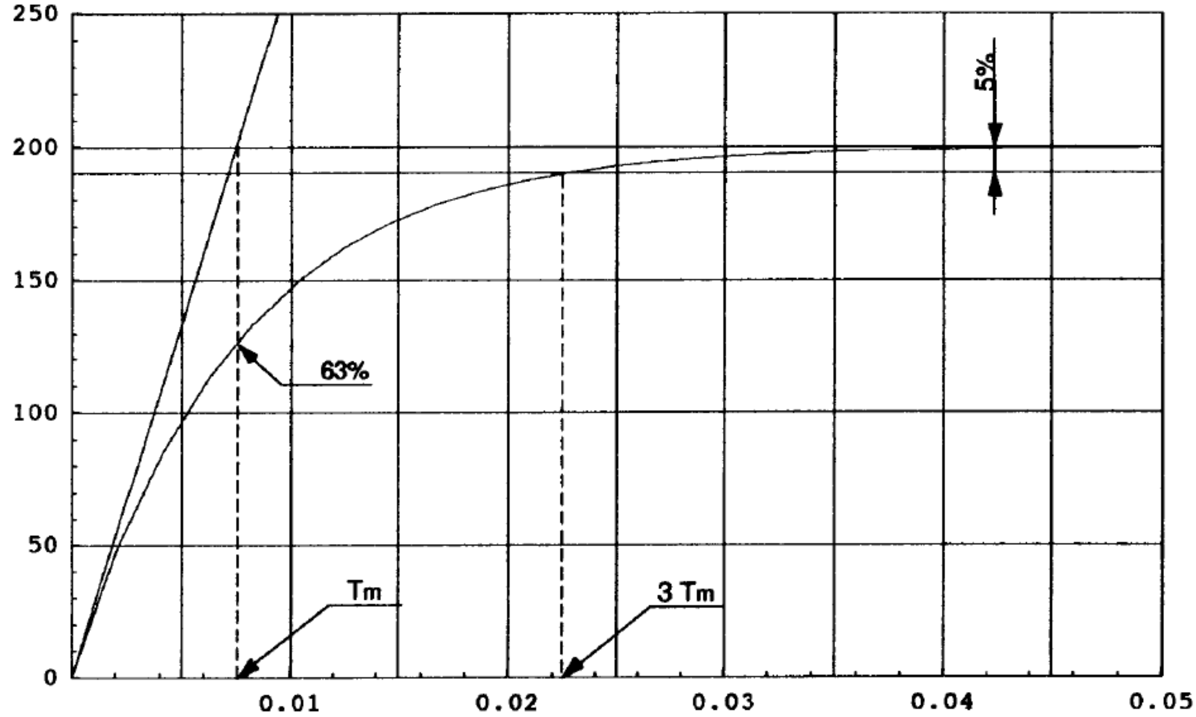
### 2 Expressions de $K_m$ et $T_m$

L'expression obtenu à la question précédente peut s'crire sous la forme :

$$\Omega m(p) = \frac{\frac{1}{Ke}}{1 + p\,\frac{R\, Jm}{Ke\, Kt}} U(p) \quad \Omega m(p) = \frac{K_m}{1 + T_m\, p} U(p)$$

On obtient : $K_m = \dfrac{1}{Ke}$ et $T_m = \dfrac{R\, Jm}{Ke\, Kt}$

## 3 Éléments caractéristiques de la réponse




La courbe proposée correspond a un modèle du premier ordre car :

- Le signal de sortie tend vers une limite égale à K fois l'entrée $U_0$ (K = 4) sans aucun dépassement de cette asymptote ;
- Le signal de sortie entre dans la bande des 5% pour une valeur t = 3 Tm. Pour la valeur Tm l'amplitude du signal de sortie est égal à 63% de l'amplitude maximale.
- La pente à l'origine est égale à 26667 V/rad/s

## 4 Valeurs expérimentales de Km et Tm

Sur la courbe expérimentale on lit :

3 $\Gamma_m = 0.0225$ s $K_m = 4$ V/rad/s $\quad Jm = \dfrac{Ke\ Kt\ Tm}{R} = 9{,}7\ 10^{-4}$ kg m$^2$

## 5 Commenter le rapport valeur expérimentale / la valeur théorique

Le coefficient de gain statique obtenu expérimentalement est égal à 4 V/rad/s

La documentation constructeur donne une valeur égale à 25,5 V/1000tr/mn pour le coefficient Ke, c'est à dire 0.243 V/rad/s On en déduit que le gain statique pour le constructeur est égal à 4.106. Ces deux valeurs sont très proches l'une de l'autre, le modèle du premier ordre convient comme aproximation.

## 6 Expression de Ωm(p)en fonction de U(p) et Cre(p)

Transformation de LAPLACE des quatre équations différentielles caractérisant le moteur

$U(p) = R\ I(p) + E(p)$

$Cm(p) = Kt\ I(p)$

$E(p) = Ke\ \Omega m(p)$

$Cm(p) = Jme\ p\ \Omega m(p) + Cre(p)$

En combinant ces quatre équations on obtient :

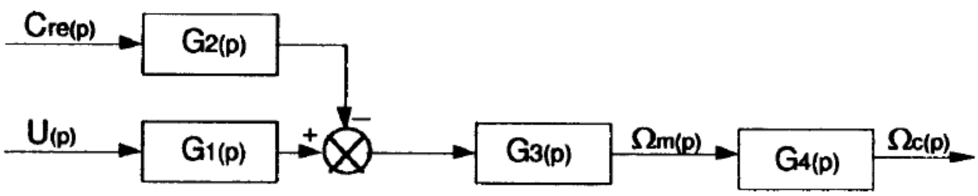
$$\Omega m(p) = \frac{\frac{1}{Ke}}{1 + p\frac{R\ Jme}{Ke\ Kt}}U(p) - \frac{\frac{R}{Ke\ Kt}}{1 + p\frac{R\ Jme}{Ke\ Kt}}Cre(p)$$

$F_1(p) = \frac{K_m}{1 + T_{me}}$ avec $K_m = \frac{1}{Ke}$ et $T_{me} = \frac{R\ Jme}{Ke\ Kt}$

$F_2(p) = \frac{K'_m}{1 + p\ T_{me}}$ avec $K'_m = \frac{R}{Ke\ Kt}$

## 7 Détermination de $G_3(p)$

On considère le schéma fonctionnel ci-dessous, associé au système moteur + réducteur + charge :




De l'identification des blocs de ce schéma fonctionnel et de l'équation donnant Ωm(p) obtenu à la question précédente peut écrire immédiatement que :

$G_1(p) = K_m = \frac{1}{Ke}$ $G_2(p) = K'_m = \frac{R}{Ke\ Kt}$ $G_3(p) = \frac{1}{1 + p\ T_{me}}$

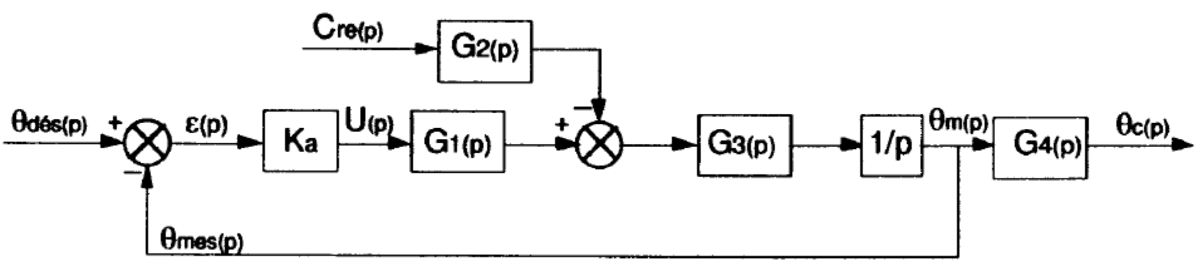
## 8 Relation entre Tm et Tme

Nous avons obtenu les deux relations suivante :

$T_{me} = \frac{R\ Jme}{Ke\ Kt}$ et $T_m = \frac{R\ Jm}{Ke\ Kt}$ On en déduit que $\frac{T_{me}}{T_m} = \frac{J_{me}}{J_m}$

Pour la valeur moyenne de $J_{me} = 6.5\ 10^{-3}$ kg m$^2$, on obtient un rapport égal à 6.7 entre $T_{me}$ et $T_m$.

## 9 Expression de la fonction F(p)



$$\theta_{mes}(p) = \theta m(p) = \frac{K_a\, G_1(p)\, G_3(p)}{p}\, \varepsilon(p) - \frac{G_2(p)\, G_3(p)}{p}\, Cre(p)$$

$$\theta_{mes}(p) = \frac{K_a\, K_m}{p\,(1 + p\, T_{me})}\, \varepsilon(p) - \frac{R}{p\, Ke\, Kt\,(1 + p\, T_{me})}\, Cre(p)$$

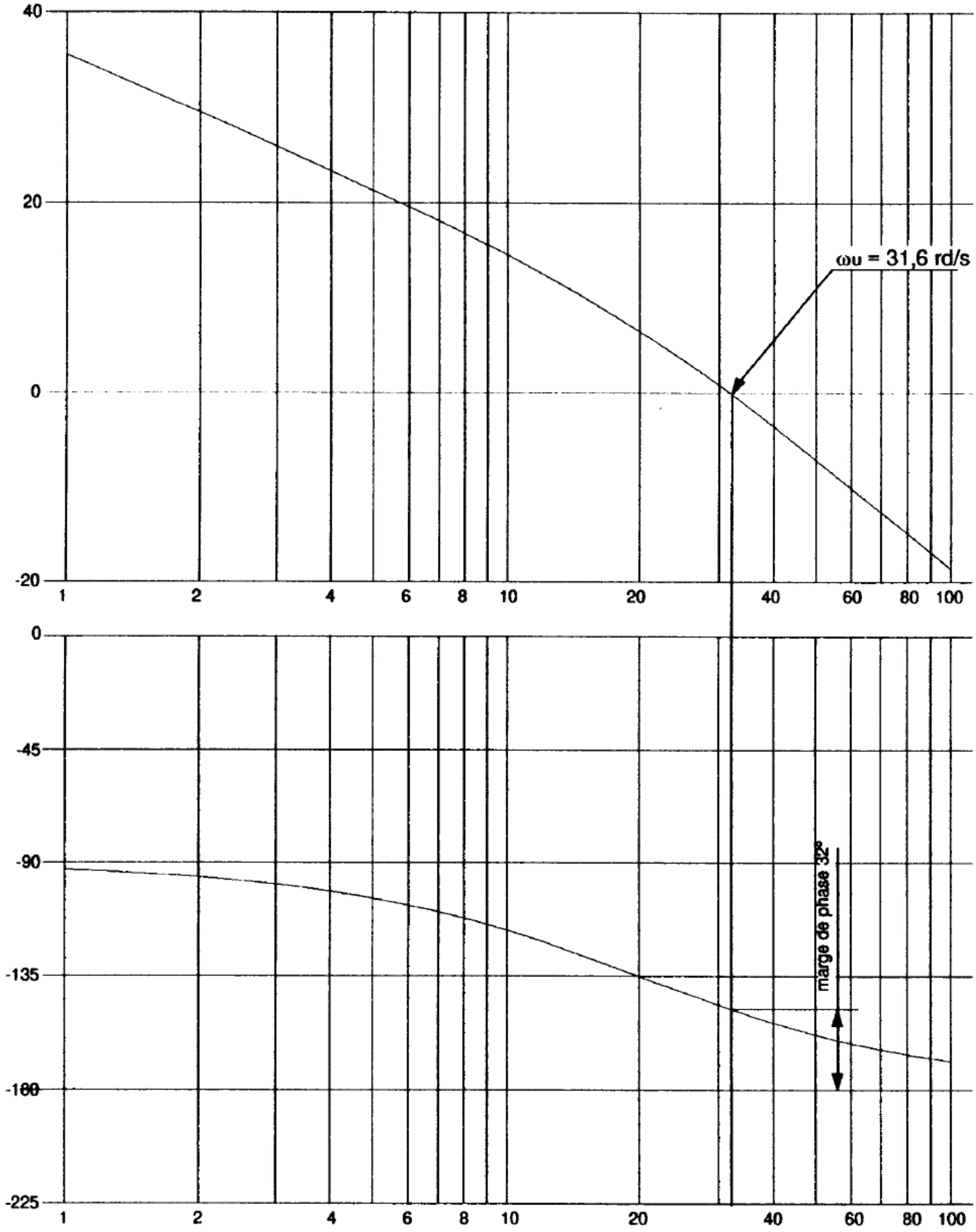
On en déduit la fonction de transfert en boucle ouverte F(p) en supposant la perturbation Cre(p) nulle :

$$F(p) = \frac{\theta_{mes}(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{K_a\, K_m}{p\,(1 + p\, T_{me})}$$

Application numérique

$$F(p) = \frac{60}{p\,(1 + 0.05\, p)}$$

| 10 | **Diagrammes de BODE** |
|---|---|




| 10 | **Marge de gain, de phase** |
|---|---|

On obtient une marge de gain infinie et une marge de phase de 32°.
Le système est stable mais la marge de phase est un peu faible.

## 11 Détermination de H(p)

On néglige la perturbation Cre(p). La fonction transfert en boucle fermée pour un système à retour unitaire s'écrit :

$$FTBF = \frac{FTBO}{1 + FTBO}$$

On obtient dans le cas présent :

$$H(p) = \frac{\dfrac{K_a G_1(p)\, G_3(p)}{p}}{1 + \dfrac{K_a G_1(p)\, G_3(p)}{p}} = \frac{K_a G_1(p)\, G_3(p)}{p + K_a G_1(p)\, G_3(p)}$$

$$H(p) = \frac{K_a K_m}{p\,(1 + p\,T_{me}) + K_a K_m}$$

$$H(p) = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{K_a K_m}p + \dfrac{T_{me}}{K_a K_m}p^2} \quad \text{avec} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K_a K_m}{T_{me}}} \qquad 2\,\xi = \sqrt{\frac{1}{K_a K_m T_{me}}}$$

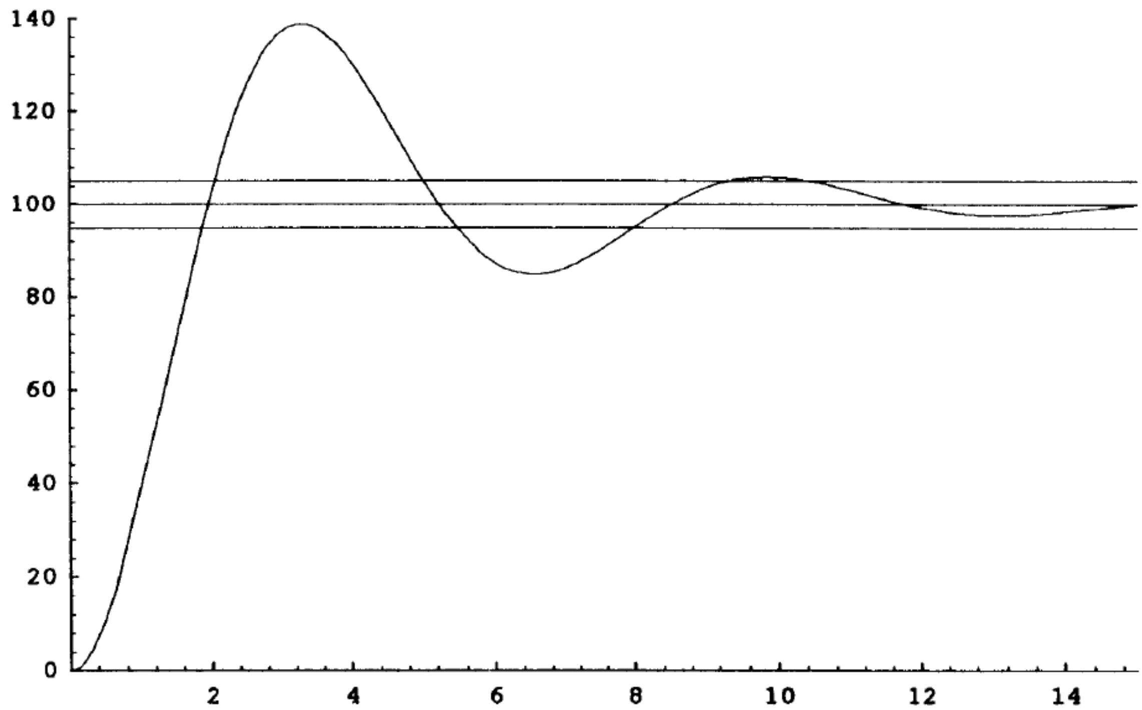
## 12 Valeurs limites de Ks, $\xi$, et $\omega_n$

$$T_{me} = \frac{R\,Jme}{Ke\,Kt} \quad \text{avec} \quad 5.7\ 10^{-3} \le Jme \le 8.4\ 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad 0.044 \le T_{me} \le 0.065$$

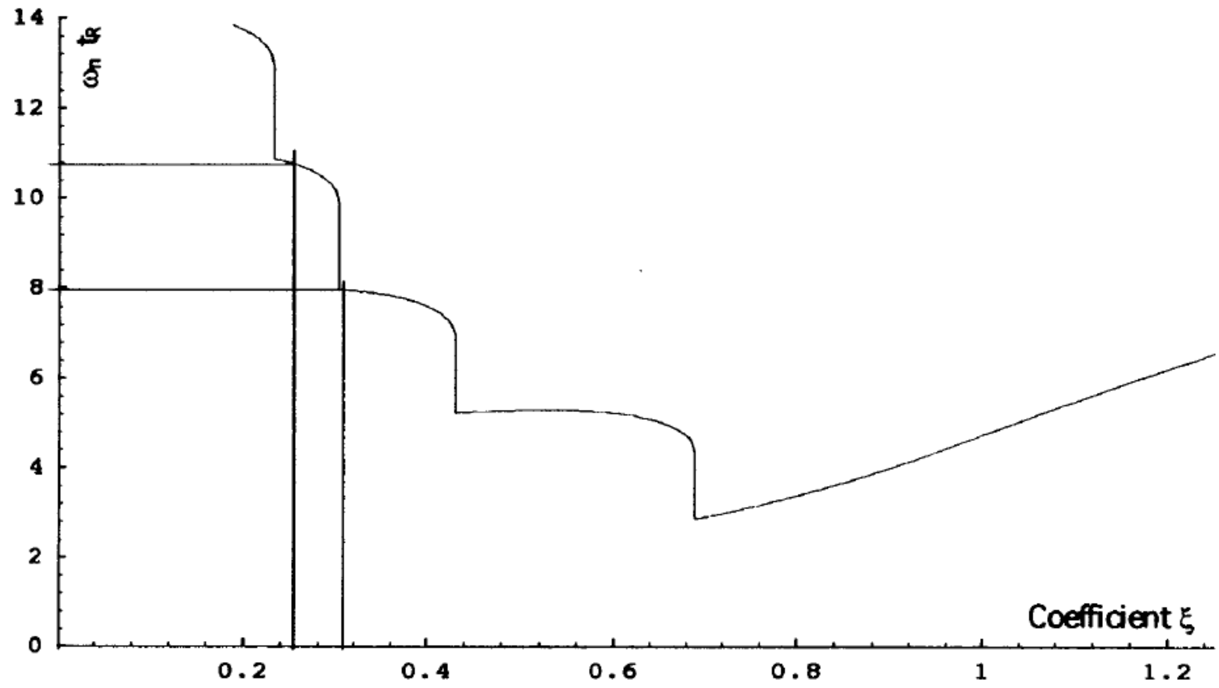
On en déduit que :

$30.37 \le \omega_n \le 36.87$ et $0.253 \le \xi \le 0.307$

## 13 Allure de la réponse indicielle




Si on trace la courbe représenatnt le produit (temps de réponse x $\omega_n$) en fonction du coefficient d'amortissement $\xi$ (voir figure page suivante) on obtient pour les deux valeurs extrêmes de la pulsation un temps de réponse compris entre 0.215s et 0.356s. Ces valeurs semblent tout à fait convenable pour l'application envisagée.




## 14 Calcul de l'erreur permanente

L'écart en régime permanent $\varepsilon(p) = \theta_{des}(p) - \theta_{mes}(p) = \theta_{des}(p)\ (1 - FTBF) = \theta_{des}(p)\ \dfrac{1}{1 + FTBO}$

Pour une consigne d'entrée en échelon tel que $\theta_{des}(t) = \theta_0\ u(t)$, on obtient :

$$\varepsilon(p) = \frac{\theta_0}{p\ (1 + FTBO)}$$

Pour déterminer l'erreur statique on utilise le théorème de la valeur finale : $\varepsilon_s = \lim_{p \to 0} p\ \varepsilon(p)$

On obtient immédiatement que $\varepsilon_\sigma = 0$.

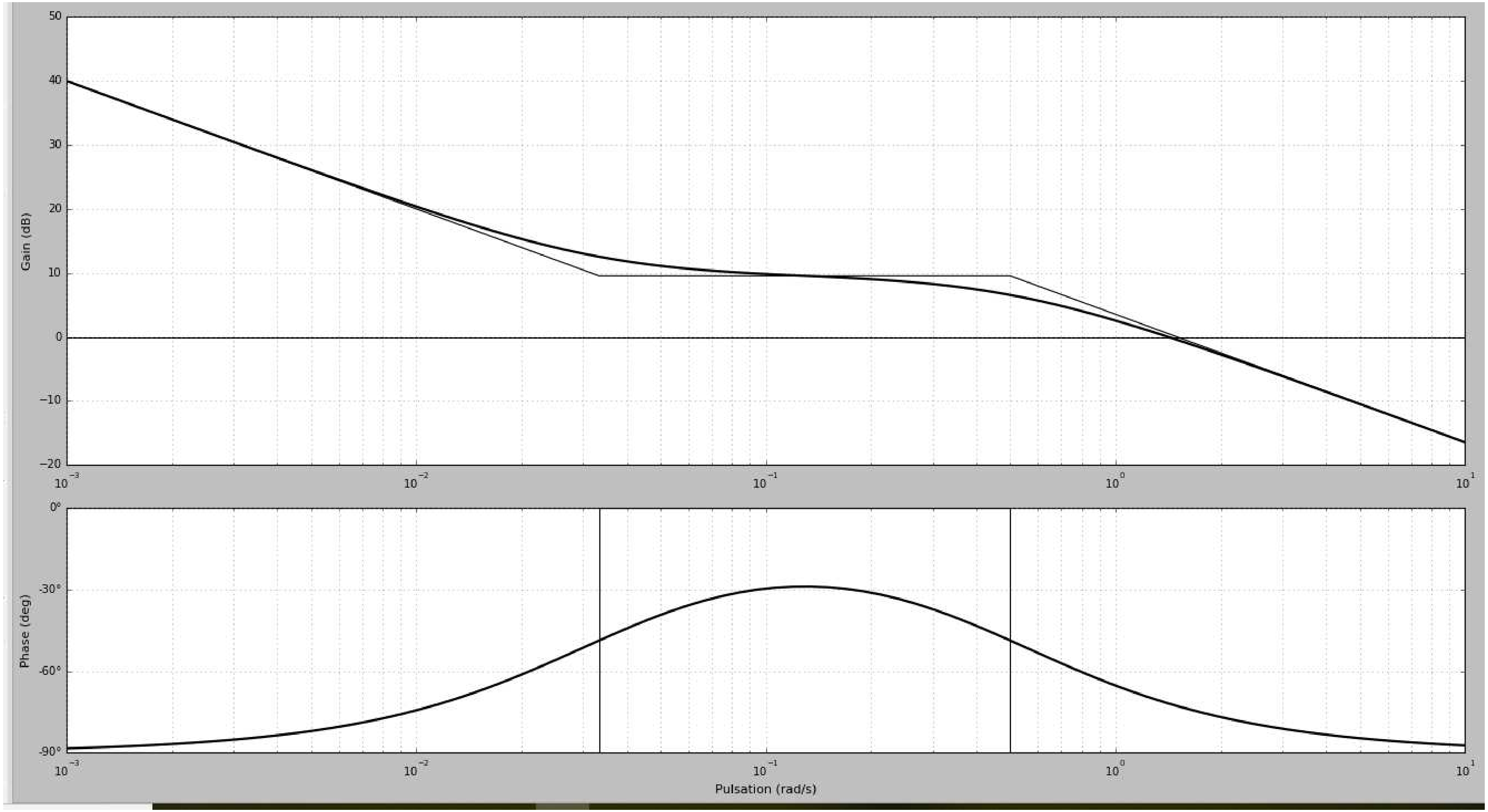
## 15

**Le résultat est indépendant de l'inertie car cette dernière n'influe que le temps de réponse**

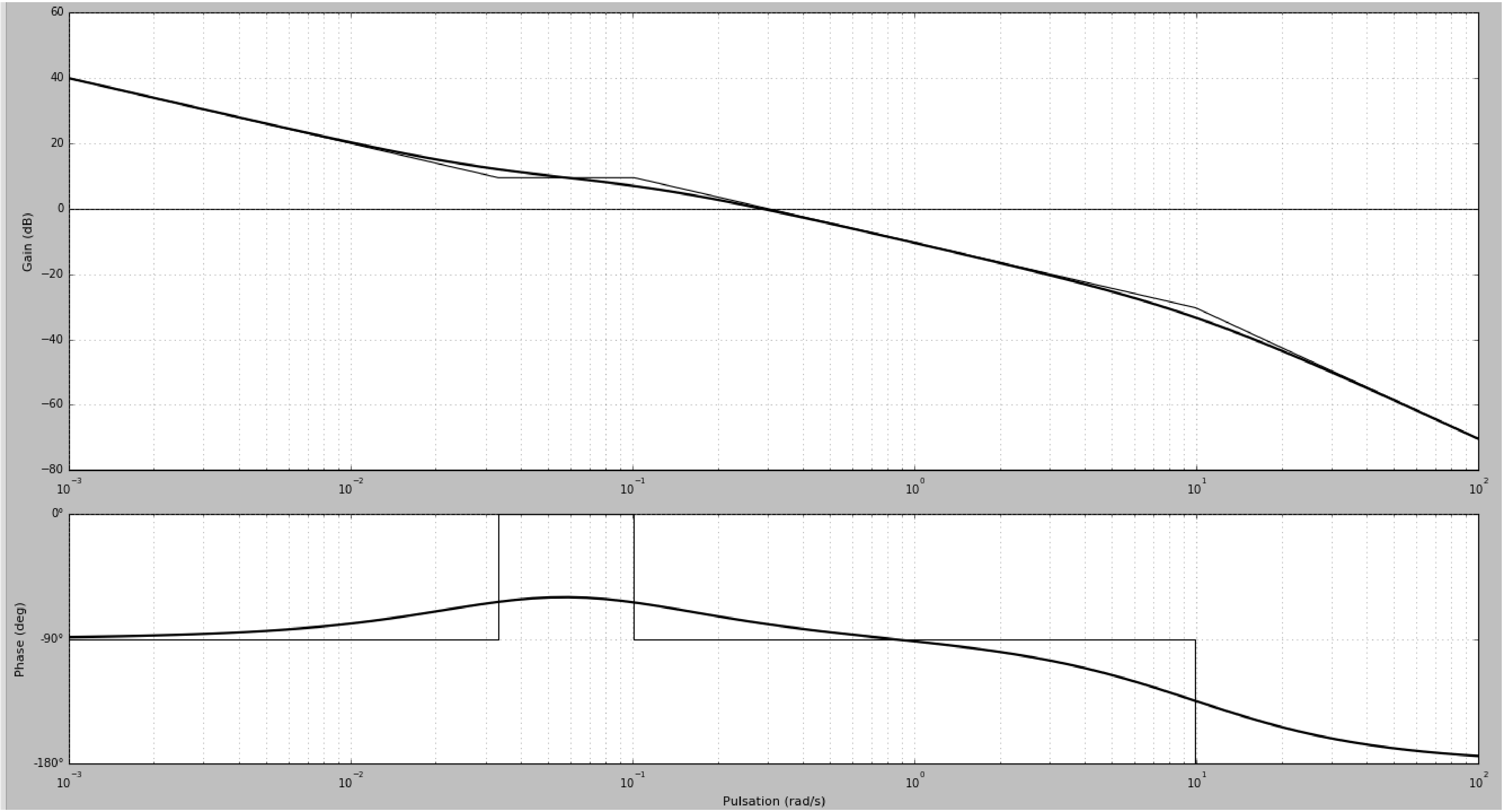
# DS 1 : Exercices

*Exercice 1 : Tracer précisément les diagrammes de bode asymptotique de la fonction :* $H(p) = \dfrac{3(1/30 + p)}{2p(1/2 + p)}$

*Donner l'allure des diagrammes réels*


Gain (dB)
50
40
30
20
10
0
−10
−20
$10^{-3}$
$10^{-2}$
$10^{-1}$
$10^{0}$
$10^{1}$
Phase (deg)
0°
-30°
-60°
-90°
Pulsation (rad/s)

*Exercice 2 : identifier la fonction de transfert suivante* *CORRECTION :* $H(p) = \dfrac{0,1(1+30p)}{p(1+10p+p^2)}$



*Exercice 3 : identifier la fonction de transfert suivante*

*CORRECTION :* $H(p)=\dfrac{0,1(1+30p)}{p(1+0,4p+p^2)}$