

**DM**

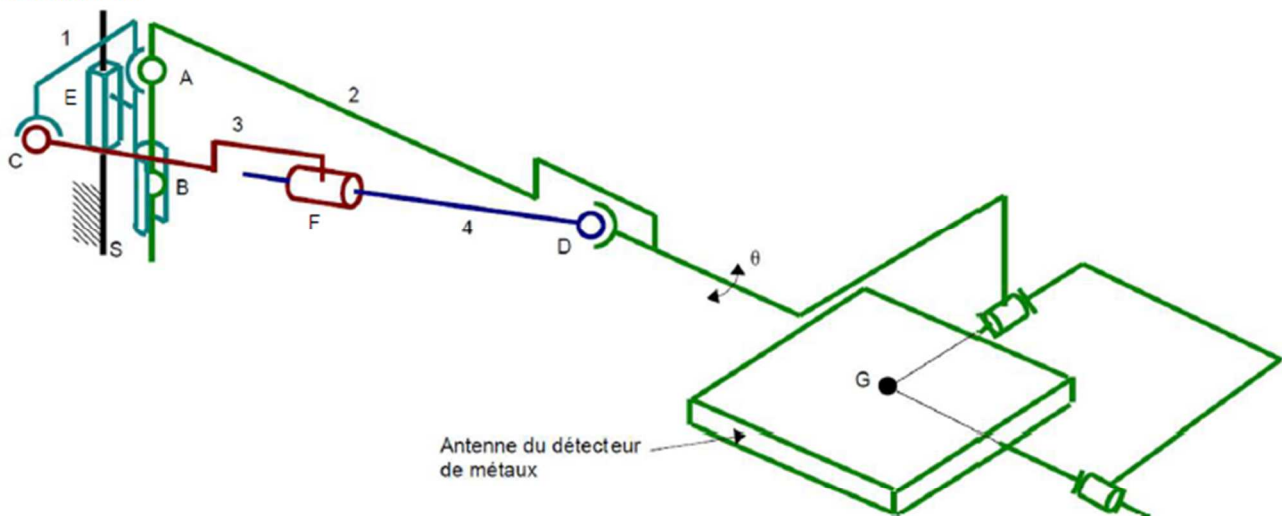
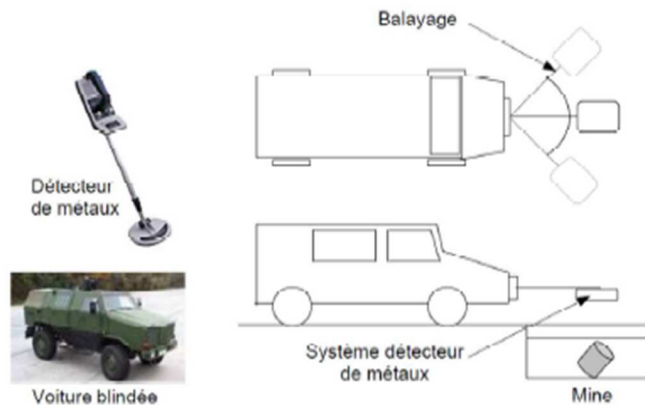
**TOUSSAINT**

# Statique

## Système de positionnement de radar

Afin d'assurer la sécurité des personnes chargées de déminer les terrains militaires, les ingénieurs ont imaginé d'intégrer un détecteur de métaux à un véhicule blindé. Grâce à ce système, les démineurs peuvent rester à l'abri dans le véhicule au cas où la mine venait à exploser.

On donne ci-dessous le schéma d'architecture de la solution retenue ainsi qu'un extrait du cahier des charges fonctionnel.



Exigences	Critères	Niveaux
...	...	...
Le système doit permettre de positionner un radar par rapport à un véhicule.	Balayage angulaire à effectuer Masse radar à déplacer	$\pm 60^\circ$ 40 Kg
...	...	...

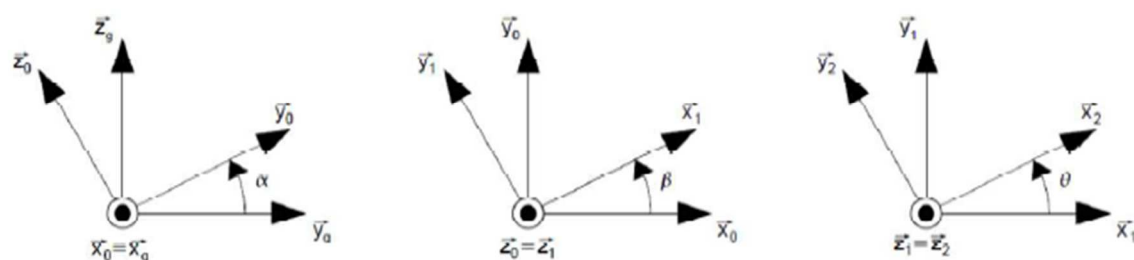
Le balayage par l'antenne de la zone à nettoyer est réalisé grâce à la rotation d'axe (AB) de la pièce 2 actionnée par un vérin hydraulique 3-4. L'antenne du détecteur de métaux est fixée sur un support permettant une double rotation suivant deux axes perpendiculaires de façon à ce qu'elle puisse toujours rester parallèle au sol. Ces deux rotations sont générées par deux moteurs électriques. Le support S est fixé sur le châssis du véhicule. Le support peut être réglé en hauteur par rapport au châssis du véhicule par un vérin.

L'objectif de cette étude est de vérifier que le positionneur de radar permet de satisfaire ou non les critères de balayage angulaire à effectuer et de masse de radar à déplacer.

Hypothèses de modélisation :

- La pesanteur n'agit que sur l'antenne en son centre G.
- La base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est liée au sol. Le sol est en pente selon un angle  $\alpha = 15^\circ$  par rapport à la verticale ascendante de la base  $(\vec{x}_g = \vec{x}_0, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$ .
- La base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z}_0)$  est liée au véhicule 1 qui se déplace sur le sol selon un angle  $\beta$  ( $0 \leq \beta \leq 2\pi$ ).

- La base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2 = \vec{z}_1)$  est liée au bras 2 du positionneur de radar. La position du bras 2 par rapport à la voiture est paramétrée par l'angle  $\theta$ .
- La section du vérin 3-4 est notée  $S_p$ .
- La pression dans le vérin est notée  $p$ , et est supposée constante.
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites.



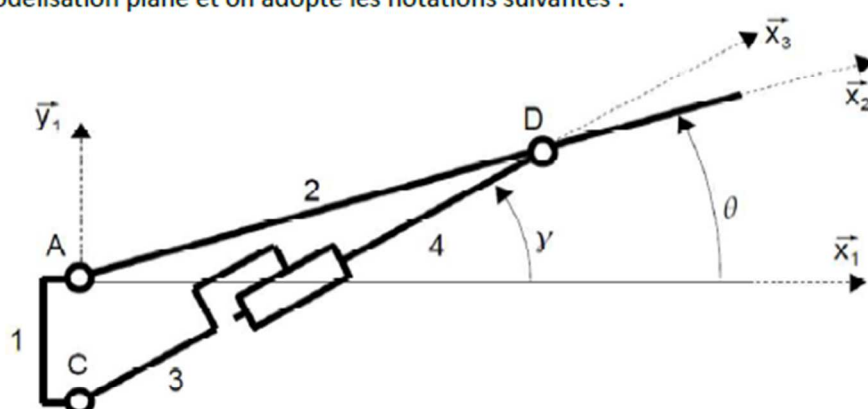
### Etude du critère de balayage angulaire

On se place dans le cas d'une modélisation plane et on adopte les notations suivantes :

$$\overrightarrow{CD} \cdot \vec{x}_3 = x$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{y}_1 = -d$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \vec{x}_2 = \lambda$$

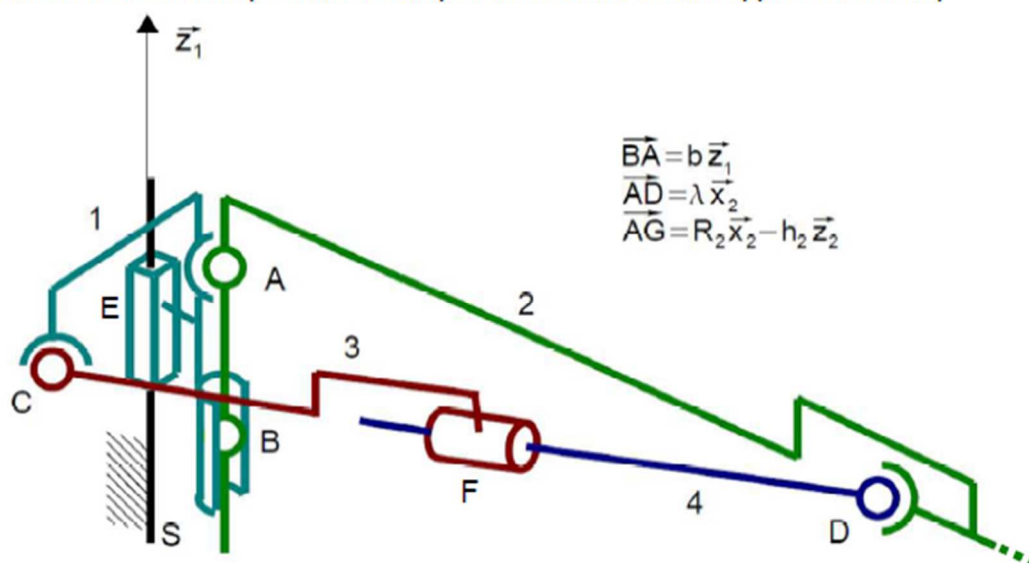


Q.1. Exprimer l'angle de balayage  $\theta$  en fonction de la longueur du vérin  $x$ . Cette relation fera intervenir  $d$  et  $\lambda$ .

Q.2. On donne  $d = 230\text{mm}$  et  $\lambda = 710\text{mm}$ . Le vérin 3-4 permet de faire varier la distance  $CD$  entre 500 et 920 mm. Conclure quant à la capacité du positionneur de radar à satisfaire le critère de balayage angulaire du cahier des charges.

### Etude du critère de masse à déplacer

On retient le modèle 3D suivant. (Le solide 2 comprend l'antenne et son support orientable)



$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} &= b \vec{z}_1 \\ \overrightarrow{AD} &= \lambda \vec{x}_2 \\ \overrightarrow{AG} &= R_2 \vec{x}_2 - h_2 \vec{z}_2 \end{aligned}$$

Q2 bis . Calculer le degré d'hyperstaticité  $h$  à l'aide des formules rapides et en justifiant précisément votre raisonnement

**Q.3.** Etablir le graphe de structure du système. Indiquer sur ce graphe le nombre d'inconnues des torseurs d'actions mécaniques transmissibles par chacune des liaisons.

L'action mécanique de la pesanteur sur le solide 2 est modélisée par le torseur suivant :

$$\left\{ F_{\text{pesanteur} \rightarrow 2} \right\}_G = \begin{Bmatrix} -P \cdot \vec{z}_g \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

**Q.4.** Donner la forme des torseurs d'actions transmissibles des liaisons 1-3, 3-4 et 2-4 dans la base 3.

Action mécanique exercée par le solide i sur le solide j au point P dans la base 3 :

$$\left\{ F_{i \rightarrow j} \right\}_P = \begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_{(B3)} \quad \text{avec } \vec{R}_{i \rightarrow j} = X_{ij} \cdot \vec{x}_3 + Y_{ij} \cdot \vec{y}_3 + Z_{ij} \cdot \vec{z}_3 \quad \text{et} \quad \vec{M}_{P(i \rightarrow j)} = L_{ij} \cdot \vec{x}_3 + M_{ij} \cdot \vec{y}_3 + N_{ij} \cdot \vec{z}_3$$

**Q.5.** Déterminer les directions de  $\vec{R}_{1 \rightarrow 3}$  et de  $\vec{R}_{2 \rightarrow 4}$  puis en déduire des simplifications dans les torseurs précédents.

**Q.6.** Déterminer l'expression de  $\left\| \vec{R}_{2 \rightarrow 4} \right\|$  en fonction de p et  $S_p$ .

Q7. Isoler le solide 2 et proposer un théorème (résultante selon ..., moment en .... selon...) permettant d'exprimer  $X_{42}$  en fonction seulement de P et des paramètres géométriques utiles.

On donne :  $\vec{BA} = 180 \cdot \vec{z}_0$  ;  $\vec{AC} = -230 \cdot \vec{y}_1$  ;  $\vec{AD} = 710 \cdot \vec{x}_2$  ;  $\vec{AG} = 1200 \cdot \vec{x}_2 - 270 \cdot \vec{z}_2$  où les dimensions sont en mm.  
 $P = 400 \text{ N}$  ;  $S = 28 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ .

**Q.8.** Calculer la valeur de la pression p maximale pour la position  $\theta = 0^\circ$  (et donc  $\gamma = 18^\circ$ ) et  $\beta = 0^\circ$  avec les valeurs numériques données.

**Q.9.** Le vérin utilisé peut supporter une pression de 10 bars maximum. Conclure quant à la capacité du système à satisfaire le critère de masse de radar à déplacer.

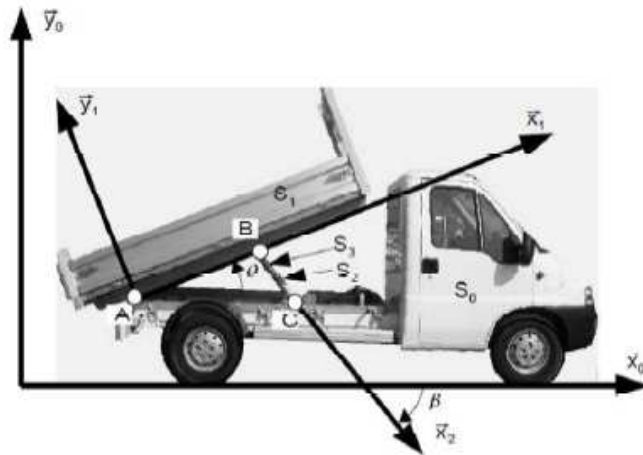


# Loi entrée / sortie

## Benne de camion

On s'intéresse à un camion en phase de déchargement dont on donne une description structurale ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel.

Le camion noté  $S_0$  en déchargement soulève l'ensemble  $S_1$  (benne + chargement) de centre de gravité  $G$  et de masse  $M = 7000$  kg constitué de la benne et de la matière transportée. Un vérin (corps de vérin  $S_2$  et tige  $S_3$ ) commande le mouvement.



Exigence technique	Critère	Niveau
1.5	Vitesse angulaire de la benne	< 0,5 tr/min

L'objectif est de déterminer la vitesse de rotation de la benne 1 en fonction du débit dans le vérin afin de vérifier la performance en vitesse angulaire de cette benne.

On donne les caractéristiques géométriques suivantes :

$$\overrightarrow{AB} = L \cdot \vec{x}_1 \quad \overrightarrow{AG} = x_G \cdot \vec{x}_1 + y_G \cdot \vec{y}_1 \quad \overrightarrow{BC} = \lambda \cdot \vec{x}_2 \quad \overrightarrow{AC} = x_C \cdot \vec{x}_0 + y_C \cdot \vec{y}_0 \quad \theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) \quad \beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$$

**Q.1.** Réaliser le schéma cinématique du système et représenter les figures géométrales.

**Q1 bis.** Parmi  $\beta$ ,  $\theta$ ,  $\lambda$ ,  $L$ ,  $x_C$ ,  $y_C$ , donner la liste des paramètres géométriques (angulaires ou linéaires) variables et la liste des paramètres géométriques constants dans ce problème.

On donne les caractéristiques du vérin :

- débit volumique d'huile injectée dans le vérin  $Q$  (en  $m^3/s$ ),
- Surface du piston du vérin  $S$  (en  $m^2$ ),
- vitesse de déploiement du vérin  $V$  (en  $m/s$ ).

**Q.2.** Exprimer le débit  $Q$  dans le vérin en fonction de sa vitesse de déploiement  $V$  et de la surface du piston  $S$ .

**Q.3.** Écrire l'équation vectorielle de fermeture géométrique linéaire et projeter l'équation vectorielle obtenue dans la base 0.

**Q.4.** A partir des équations issues de la fermeture géométrique, exprimer  $\lambda$  en fonction de  $\theta$ .

**Q.5.** Dériver l'expression obtenue question précédente et déterminer  $Q$  en fonction de  $\dot{\theta}$  et de  $\theta$ .

**Q.6.** L'étude de l'application numérique de la formule précédente aboutit à  $\dot{\theta}_{\max} = 70 \cdot Q$ . Le vérin délivrant 0,4 Litres/s, conclure quant à la capacité de la benne à satisfaire la performance en vitesse angulaire.

fonction	dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$uv$	$u'v + uv'$
$u/v$	$(vu' - uv')/v^2$
$u \circ v$	$v'(u' \circ v)$
$1/u$	$-u'/u^2$
$\sqrt{u}$	$u'/(2\sqrt{u})$
$u^\alpha$	$\alpha u^{\alpha-1} u'$
$u^{-1}$	$1/(u' \circ u^{-1})$

RAPPEL :

fonction	dérivée
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$
$1/x$	$-1/x^2$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$
$e^x$	$e^x$
$\ln(x)$	$1/x$

## Cinématique

### Robot de peinture

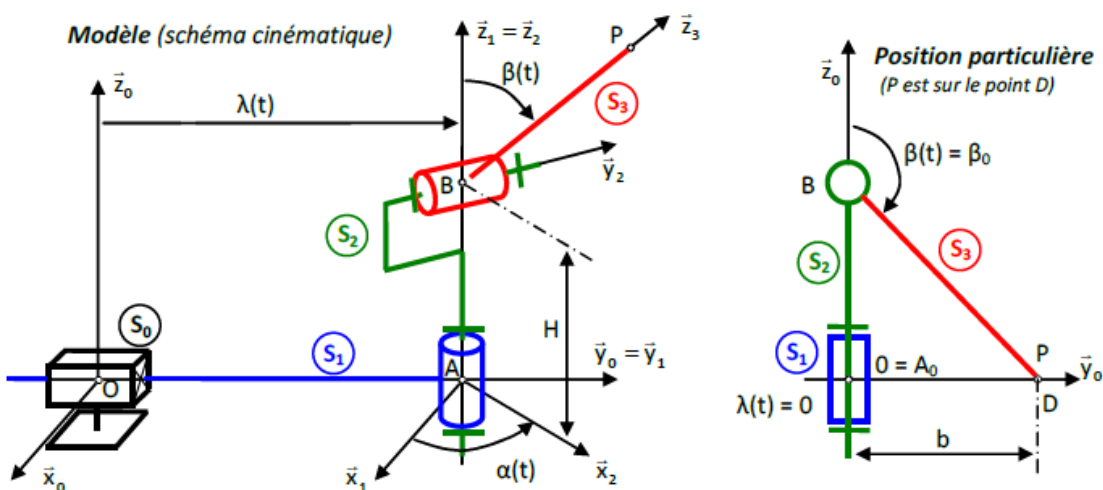
On étudie un robot de peinture de voiture. Ce robot se déplace par rapport à une carrosserie de voiture, et projette dessus de la peinture. L'objectif est de déterminer les lois du mouvement du robot, pour lui permettre de vérifier le critère de vitesse de déplacement relatif (entre le robot et la carrosserie de voiture) du cahier des charges.



Exigences techniques	Critère	Niveau
1.7	Vitesse de déplacement relatif	Vitesse constante

La modélisation cinématique du robot est donnée sur la figure suivante :

On donne  $\overrightarrow{AB} = H\vec{z}_1$ ,  $\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{y}_1$  et  $\overrightarrow{BP} = L\vec{z}_3$



Le chariot  $S_1$ , auquel on associe le repère  $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , est en mouvement de translation de direction  $\vec{y}_0$  par rapport au bâti  $S_0$ , de repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Le corps  $S_2$ , auquel on associe le repère  $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , est en mouvement de rotation autour de l'axe  $(B, \vec{z}_0)$  avec le chariot  $S_1$ . Le bras  $S_3$ , auquel on associe le repère  $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ , est en mouvement de rotation autour de l'axe  $(B, \vec{y}_2)$  avec le corps  $S_2$ .

**Q0.** Donner la liste des paramètres géométriques (angulaires ou linéaires) variables et la liste des paramètres géométriques constants dans ce problème.

**Q.1.** Construire les figures planes de repérage/paramétrage puis exprimer les vecteurs vitesse instantanée de rotation  $\vec{\Omega}_{1/0}$ ,  $\vec{\Omega}_{2/1}$ ,  $\vec{\Omega}_{3/2}$ .

**Q.2.** Déterminer  $\vec{V}_{A,1/0}$ ,  $\vec{V}_{B,2/0}$  et  $\vec{V}_{P,3/0}$ .

**Q2 bis.** Calculer l'accélération du point P appartenant au solide 3 dans son mouvement par rapport à 0 que l'on notera  $\vec{\Gamma}_{P,3/0}$ . On fera l'hypothèse que  $\dot{\beta} = 0$ .

On désire que P décrive la droite  $(D, \vec{x}_0)$  à vitesse constante, conformément au cahier des charges. On a  $\vec{OD} = b \cdot \vec{y}_0$  avec  $b = \sqrt{(L^2 - H^2)}$ .

**Q.5.** Représenter le robot en position extrême (lorsque A est en D et P sur  $(D, \vec{x}_0)$ ).

**Q.6.** Traduire, à l'aide de l'expression de  $\vec{V}_{P,3/0}$  exprimé dans le repère  $R_0$ , le fait que P se déplace à la vitesse V selon  $\vec{x}_0$ .

**Q.7.** En constatant que  $\dot{\beta} = 0$ , exprimer alors  $\dot{\lambda}$  et  $\dot{\alpha}$  en fonction de L, V,  $\alpha$  et  $\beta_0$ .

**Q.8.** A l'aide de la figure précédente, exprimer  $\beta_0$  en fonction de b et L.

**Q.9.** Exprimer  $\dot{\lambda}$  et  $\dot{\alpha}$  en fonction de V, b et  $\alpha$ .

# Statique

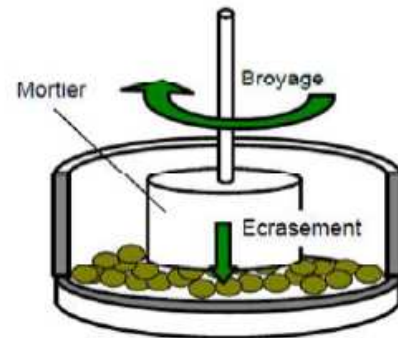
## Broyeur

On s'intéresse à un broyeur dont on donne une description structurale ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel. La fonction principale de ce système est de réduire en poudre des matériaux dur et cassant (levures, charbon, clinker, sels, substances homéopathiques, ...).

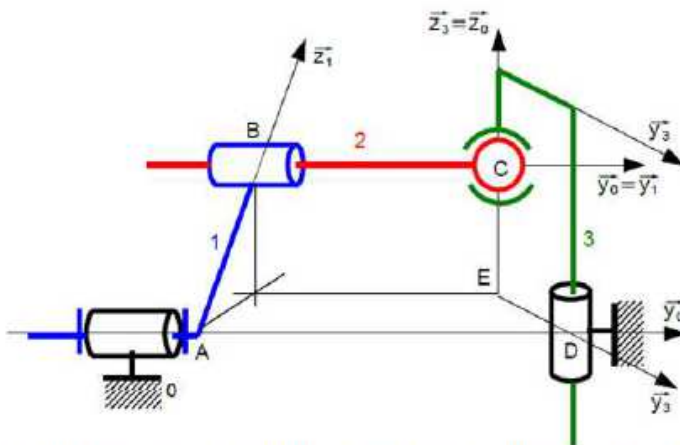
Exigences	Critères	Niveaux
...	...	...
1.1 Le système doit réduire en poudre des granulats de matériaux	Taille initiale granulat Taille finale granulat Effort écrasement minimal	Diamètre 8 mm Diamètre 0,001 mm 5 N mini
...	...	...



Pour réduire en poudre les matériaux, on utilise un mortier (pièce cylindrique) qui effectue un mouvement combiné de rotation et de translation, afin de broyer et d'écraser les agglomérats de matériaux.



On donne ci-dessous le modèle cinématique du mécanisme permettant la mise en mouvement du mortier 3 :



Un motoréducteur (non représenté ici) entraîne le volant 1 en rotation autour de l'axe  $(A, \vec{y}_0)$ . Le déplacement de la bielle 2 provoque la rotation et la translation simultanées du mortier 3 par rapport au bâti 0 réalisant ainsi la réduction en poudre correcte du produit.

Données :

$$\overrightarrow{AB} = R \cdot \vec{z}_1, \quad \overrightarrow{BC} = \lambda(t) \cdot \vec{y}_1, \quad \overrightarrow{AD} = d \cdot \vec{y}_1, \quad \overrightarrow{EC} = h(t) \cdot \vec{z}_0, \quad \overrightarrow{ED} = L \cdot \vec{y}_3$$

Les dimensions géométriques sont les suivantes :  $R = 3 \text{ cm}$ ,  $d = 7 \text{ cm}$ ,  $L = 4 \text{ cm}$ .

$R_0 = (A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , le repère lié au bâti 0.

$R_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , le repère lié au volant 1 tel que  $\theta_{01} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$

$R_2 = (B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , le repère lié à la bielle 2 tel que  $\theta_{12} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$

$R_3 = (C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ , le repère lié au volant 1 tel que  $\theta_{23} = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$

**Q.1.** Réaliser le graphe des liaisons du système.

**Q.2.** Poser les trois figures géométrales.

**Q0** . Calculer le degré d'hyperstaticité  $h$  à l'aide des formules rapides et en justifiant précisément votre raisonnement



**Q2 bis.** Parmi  $\theta_{21}$ ,  $R$ ,  $\theta_{30}$ ,  $d$ ,  $L$ ,  $\theta_{10}$ ,  $h$ ,  $\lambda$ , donner la liste des paramètres géométriques (angulaires ou linéaires) variables et la liste des paramètres géométriques constants dans ce problème.

**Q.3.** Réaliser le schéma cinématique du système dans le plan  $(O, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  en utilisant une couleur par classe d'équivalence pour la position particulière  $\theta_{10} = 0^\circ$  et  $\theta_{30} = 0^\circ$ .

**Q.4.** A l'aide d'une fermeture géométrique, donner les expressions de  $h(t)$ ,  $\lambda(t)$  puis de  $\tan\theta_{30}$  uniquement en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $d$  et de l'angle  $\theta_{10}$ .

L'action mécanique exercée par le motoréducteur sur le rotor est modélisée par  $\{F_{M \rightarrow 1}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{y}_0 \end{Bmatrix}$ . Les actions mécaniques exercées par le matériau à écraser sur le mortier 3 sont modélisables par le torseur suivant :  $\{F_{P \rightarrow 3}\}_D = \begin{Bmatrix} Z_P \cdot \vec{z}_0 \\ N_P \cdot \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$ .

On néglige l'action mécanique de la pesanteur devant les autres actions mécaniques et on considère que toutes les liaisons entre les solides sont parfaites. Le repère  $R_0$  est considéré comme galiléen.

Par la suite, on notera  $\{F_{i \rightarrow j}\}_P = \begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_{B_0}$  le torseur d'action mécanique transmissible du solide  $i$  sur le solide  $j$  en un point  $P$  quelconque et dans la base  $0$ .

**Q.5.** Donner le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison 0-1 noté  $\{F_{0 \rightarrow 1}\}$  en A et dans la base 0.

**Q.6.** Donner le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison 2-1 noté  $\{F_{2 \rightarrow 1}\}$  en B et dans la base 0.

**Q.7.** Donner le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison 3-2 noté  $\{F_{3 \rightarrow 2}\}$  en C et dans la base 0.

**Q.8.** Donner le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison 0-3 noté  $\{F_{0 \rightarrow 3}\}$  en D et dans la base 0.

Q9. Proposer et isoler un solide afin de déterminer, par une équation du PFS à préciser, une relation liant  $R$ ,  $X_{21}$ ,  $Z_{21}$ ,  $C_m$  et  $\theta_{10}$ .

Q10. Isoler le solide 2 et déterminer par le PFS les deux relations permettant de relier  $Z_{21}$ ,  $Z_{32}$ ,  $X_{21}$  et  $X_{32}$ . Démontrer que  $Y_{32} = 0$ .

Q11. Proposer et isoler un solide afin de déterminer, par 2 équations du PFS à préciser, 2 relations liant  $Z_P$  et  $Z_{32}$  d'une part et  $N_P$ ,  $X_{32}$ ,  $L$  et  $\theta_{30}$  enfin.

**Q.12.** A partir des résultats obtenus questions précédentes, déterminer la loi entrée statique du système liant  $C_m$  en fonction de  $L$ ,  $R$ ,  $N_p$ ,  $Z_p$ ,  $\theta_{30}$  et  $\theta_{10}$ .

Les caractéristiques du moteur sont les suivantes :

	Puissance nominale (W)	Vitesse nominale (tr/min)	Couple nominal (N.m)	Inertie (kg.m <sup>2</sup> )	Poids (kg)
Moteur P30B04005DX	50	3000	0,16	$0,03 \times 10^{-4}$	0,35

**Q.13.** En considérant le couple de broyage nul, déterminer l'effort d'écrasement minimal que peut obtenir avec le broyeur. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

**Indication pour Q12, on trouve :**

$$C_m = -R \cdot \frac{N_p}{L \cdot \cos \theta_{30}} \cdot \cos \theta_{10} + R \cdot Z_p \cdot \sin \theta_{10}$$