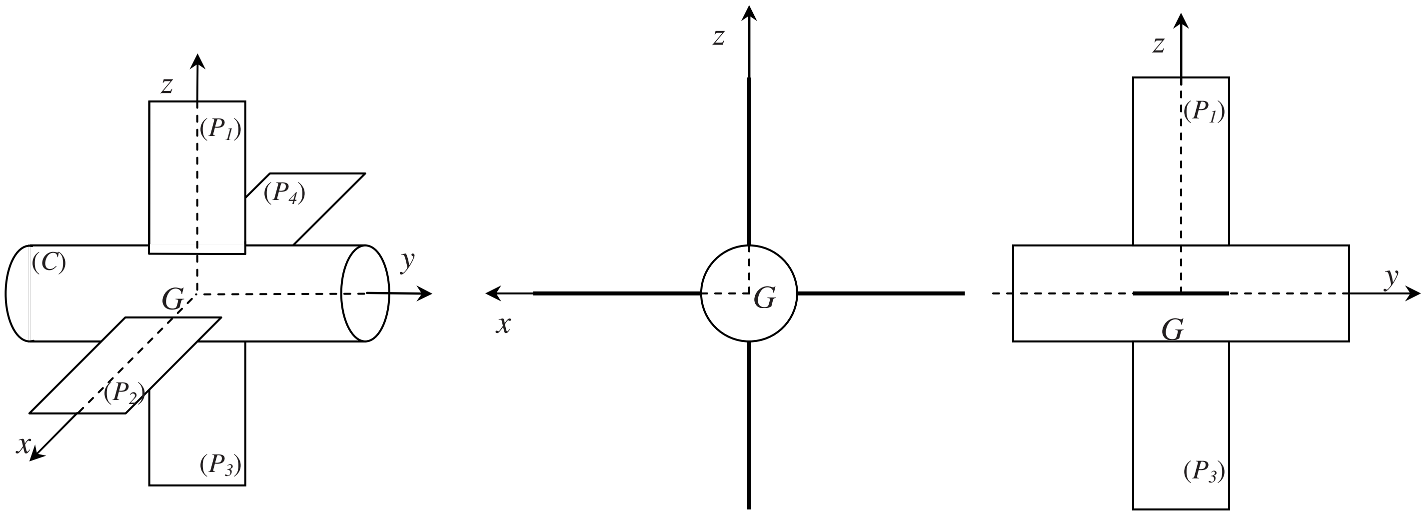
DS 3 : Position de centre d'inertie et matrice d'inertie

Exercice 1: Rotor de pompe. Le rotor de certaines pompes à eau peut être modélisé par un cylindre central homogène (C), de rayon a, de longueur $6a$, de masse volumique ρ et de masse m_c et quatre pales (P_1), (P_2), (P_3) et (P_4), d'épaisseur négligeable, de largeur $2a$ et de longueur $4a$, de masse surfacique σ *et* de masse m_p.



1. Expliquer pourquoi le centre d'inertie du rotor complet correspond aussi au centre d'inertie du cylindre.

2. Donner la matrice d'inertie du cylindre centrale en G. Sans redémontrer le résultat.

$$I(G,C)=\begin{bmatrix} m_c\left(\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{36a^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m_c\left(\dfrac{a^2}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m_c\left(\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{36^2}{12}\right) \end{bmatrix}_{(-,\vec{y},-)} = \begin{bmatrix} m_c\left(\dfrac{13a^2}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m_c\left(\dfrac{a^2}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m_c\left(\dfrac{13a^2}{4}\right) \end{bmatrix}_{(-,\vec{y},-)}$$

3. Donner la matrice d'inertie de la pale (P_1) en son centre de gravité G_1, notée $\left[I_{G_1}(P_1)\right]$. Déplacer la en G.

$$I(G_1,P_1)=\begin{bmatrix} \dfrac{m_p\left(20a^2\right)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{m_p\left(16a^2\right)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m_p\left(4a^2\right)}{12} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{bmatrix} \dfrac{m_p\left(5a^2\right)}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{m_p\left(4a^2\right)}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m_p\left(a^2\right)}{3} \end{bmatrix}$$

Le théorème de huygens donne :

$$I(G,P_1)=I(G_1,P_1)+\mathrm{m_p}\begin{bmatrix}9a^2 & 0 & 0\\ 0 & 9a^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \overrightarrow{\mathrm{G_1G}}=\begin{pmatrix}0\\0\\-3a\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$I(G,P_1)=\begin{bmatrix}\dfrac{m_p\left(32a^2\right)}{3} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{m_p\left(31a^2\right)}{3} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{m_p\left(a^2\right)}{3}\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

4. Donner la matrice d'inertie de la pale (P_2) en son centre de gravité G_2, notée $\left[I_{G_2}(P_2)\right]$. Déplacer la en G.

$$I(G_2,P_2)=\begin{bmatrix}\dfrac{m\left(a^2\right)}{3} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{m\left(4a^2\right)}{3} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{m\left(5a^2\right)}{3}\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Le théorème de huygens donne :

$$I(G,P_2)=I(G_2,P_2)+\mathrm{m_p}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 9a^2 & 0\\ 0 & 0 & 9a^2\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \overrightarrow{\mathrm{G_2G}}=\begin{pmatrix}-3a\\0\\0\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$I(G,P_2)=\begin{bmatrix}\dfrac{m_p\left(a^2\right)}{3} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{m_p\left(31a^2\right)}{3} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{m_p\left(32a^2\right)}{3}\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

5. Par analogie, donner $\left[I_G(P_3)\right]$ et $\left[I_G(P_4)\right]$.

$$I(G,P_4)=\begin{bmatrix} \frac{m_p\left(a^2\right)}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_p\left(31a^2\right)}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_p\left(32a^2\right)}{3} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$I(G,P_3)=\begin{bmatrix} \frac{m_p\left(32a^2\right)}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_p\left(31a^2\right)}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_p\left(a^2\right)}{3} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

6. En déduire la matrice d'inertie en *G*, notée $\left[I_G(S)\right]$, de l'ensemble (*S*) constitué des 4 pales et du cylindre.

On fait la somme des 5 matrices en G :

$$I(G,S)=\begin{bmatrix} \frac{m_p\left(66a^2\right)}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_p\left(124a^2\right)}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_p\left(66a^2\right)}{3} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \begin{bmatrix} m_c\left(\frac{13a^2}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m_c\left(\frac{a^2}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m_c\left(\frac{13a^2}{4}\right) \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$I(G,S)=\begin{bmatrix} m_p\left(22a^2\right)+m_c\left(\frac{13a^2}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_p\left(124a^2\right)}{3}+m_c\left(\frac{a^2}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m_p\left(22a^2\right)+m_c\left(\frac{13a^2}{4}\right) \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$