

STABILISATEUR D'IMAGE MÉCANIQUE

Q1)

2 doit se déplacer par rapport à 0 mais ne pas tourner suivant \vec{x} et \vec{y}

$$\{V_{2/1}\} = \{V_{2/0}\} - \{V_{1/0}\}$$

$$\{V_{2/0}\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \omega_z(2/0) \vec{z} \\ V_x(2/0) \vec{x} + V_y(2/0) \vec{y} + V_z(2/0) \vec{z} \end{array} \right\}_O$$

$$\{V_{2/1}\}_O = \left\{ \begin{array}{l} -\omega_x(1/0) \vec{x} - \omega_y(1/0) \vec{y} + (\omega_z(2/0) - \omega_z(1/0)) \vec{z} \\ (V_x(2/0) - V_x(1/0)) \vec{x} + (V_y(2/0) - V_y(1/0)) \vec{y} + \\ (V_z(2/0) - V_z(1/0)) \vec{z} \end{array} \right\}_O$$

$\vec{V}(O,2/1) = \vec{0}$ car on veut transmettre les vitesses à la caméra.

Si on choisit $\omega_z(2/0) - \omega_z(1/0) = 0$ alors la liaison est une rotule à doigt en O bloquée suivant \vec{z} .

Si on choisit $\omega_z(2/0) - \omega_z(1/0) \neq 0$ alors la liaison est une rotule en O.

Q2)

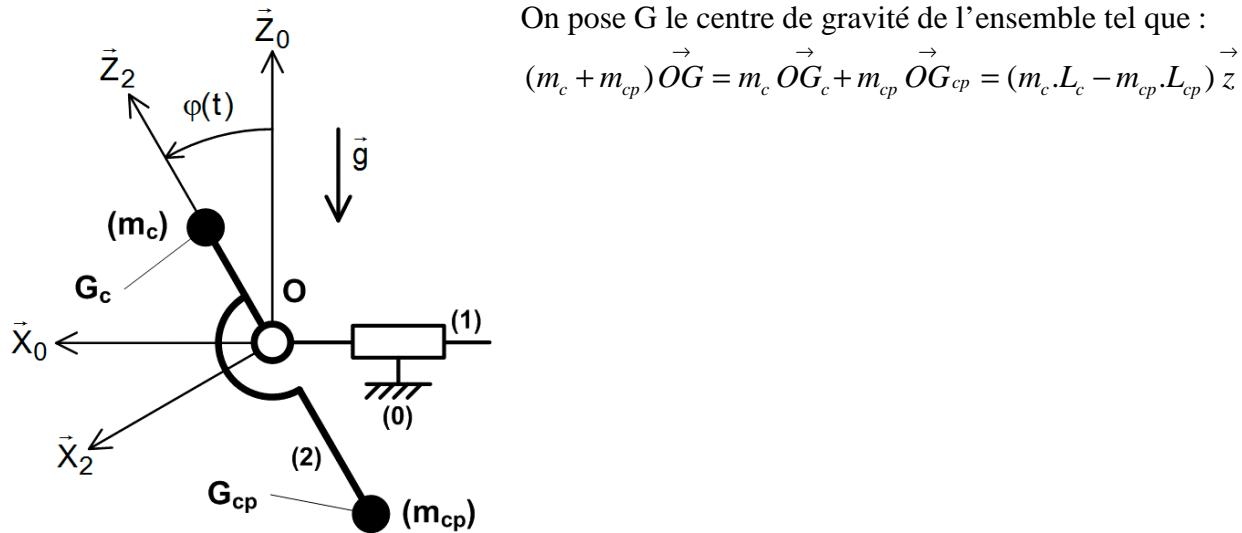
$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} \text{ et } \{T_{pesenteur \rightarrow 2}\}$$

Les moments en O donnent $\vec{OG}_c \wedge -mc \cdot g \vec{z}_0 = \vec{0}$ pour que 2 soit en équilibre.

Soit $\vec{OG}_c \parallel \vec{z}_0$

Sans contrepoids G_c est au-dessus de O donc l'équilibre est instable (quand on éloigne G_c de la position d'équilibre l'angle augmente et le moment du poids augmente).

Q3)



On pose G le centre de gravité de l'ensemble tel que :

$$(m_c + m_{cp}) \vec{OG} = m_c \vec{OG}_c + m_{cp} \vec{OG}_{cp} = (m_c \cdot L_c - m_{cp} \cdot L_{cp}) \vec{z}$$

Equilibre stable si $\vec{OG} < \vec{0}$ soit $m_c \cdot L_c < m_{cp} \cdot L_{cp}$

Q4)

On isole $E' = 2 + c + c_p$ et on applique le th du moment dynamique en projection sur \vec{y}_0 :

$$\vec{M}_{O, pes \rightarrow 2+c} \cdot \vec{y}_0 + \vec{M}_{O, pes \rightarrow c_p} \cdot \vec{y}_0 + \underbrace{\vec{M}_{O, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{y}_0}_{=0L \text{ parf}} = \vec{\delta}_{O, 2+c+c_p/0} \cdot \vec{y}_0$$

- $\vec{M}_{O, pes \rightarrow 2+c} \cdot \vec{y}_0 = \left(\vec{OG}_c \wedge -m_c \cdot g \vec{z}_0 \right) \vec{y}_0 = L_c \vec{z}_2 \cdot m_c \cdot g \vec{x}_0 = L_c \cdot m_c \cdot g \cdot \sin \varphi$
- $\vec{M}_{O, pes \rightarrow c_p} \cdot \vec{y}_0 = \left(\vec{OG}_{cp} \wedge -m_{cp} \cdot g \vec{z}_0 \right) \vec{y}_0 = -L_{cp} \vec{z}_2 \cdot m_{cp} \cdot g \vec{x}_0 = -L_{cp} \cdot m_{cp} \cdot g \cdot \sin \varphi$
- $\vec{\delta}_{O, 2+c+c_p/0} \cdot \vec{y}_0 = \vec{\delta}_{O, 2+c/0} \cdot \vec{y}_0 + \vec{\delta}_{O, c_p/0} \cdot \vec{y}_0$

$$\vec{\delta}_{O, 2+c/0} \cdot \vec{y}_0 = \underbrace{\vec{\delta}_{G_c, 2+c/0} \cdot \vec{y}_0}_0 + \left(\vec{OG}_c \wedge m_c \cdot a_{G_c, 2/0} \right) \cdot \vec{y}_0 = \left(\vec{y}_0 \wedge L_c \vec{z}_2 \right) \cdot m_c \cdot a_{G_c, 2/0} = L_c \cdot m_c \cdot a_{G_c, 2/0} \cdot \vec{x}_2$$

$$\vec{V}_{G_c, 2/0} = \vec{V}_{O, 2/0} + \vec{G}_c \cdot \vec{O} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} = \vec{x} \cdot \vec{x}_0 - L_c \vec{z}_2 \wedge \vec{\varphi} \cdot \vec{y}_0 = \vec{x} \cdot \vec{x}_0 + L_c \vec{\varphi} \cdot \vec{x}_2$$

$$\vec{a}_{G_c, 2/0} = \frac{d}{dt} \vec{V}_{G_c, 2/0} = \vec{x} \cdot \vec{x}_0 + L_c \vec{\varphi} \cdot \vec{x}_2 - L_c \vec{\varphi} \cdot \vec{z}_2$$

$$\text{On a donc } \vec{\delta}_{O, 2+c/0} \cdot \vec{y}_0 = L_c \cdot m_c \cdot \left(\vec{x} \cdot \vec{x}_0 + L_c \vec{\varphi} \cdot \vec{x}_2 - L_c \vec{\varphi} \cdot \vec{z}_2 \right) \cdot \vec{x}_2 = L_c \cdot m_c \cdot \vec{x} \cdot \cos \varphi + m_c \cdot L_c^2 \vec{\varphi}$$

$$\text{De même } \vec{\delta}_{O, c_p/0} \cdot \vec{y}_0 = -L_{cp} \cdot m_{cp} \cdot \vec{x} \cdot \cos \varphi + m_{cp} \cdot L_{cp}^2 \vec{\varphi}$$

$$\text{Finalement } \left(L_c \cdot m_c - L_{cp} \cdot m_{cp} \right) g \cdot \sin \varphi = \left(L_c \cdot m_c - L_{cp} \cdot m_{cp} \right) \vec{x} \cdot \cos \varphi + \left(m_c \cdot L_c^2 + m_{cp} \cdot L_{cp}^2 \right) \vec{\varphi}$$

$Q_1 = -\left(m_c \cdot L_c^2 + m_{cp} \cdot L_{cp}^2 \right)$	$Q_2 = \left(L_c \cdot m_c - L_{cp} \cdot m_{cp} \right) g \cdot \sin \varphi$	$Q_3 = \left(L_c \cdot m_c - L_{cp} \cdot m_{cp} \right) \cos \varphi$
---	---	---

Q5)

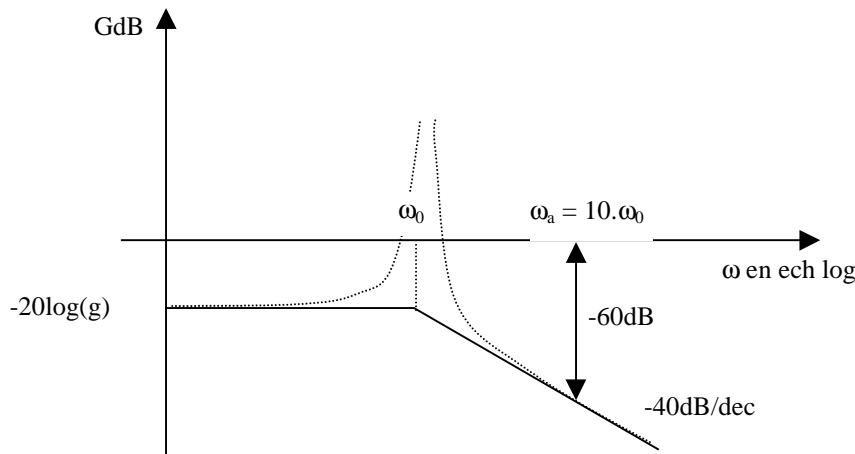
Si G est confondu avec O alors $m_c \cdot L_c = m_{cp} \cdot L_{cp}$ et $\ddot{\varphi} = 0$ d'où $\dot{\varphi} = \text{cste}$. Donc le mouvement dépend des conditions initiales mais pas de l'accélération a . L'attitude n'est pas modifiée.

Si G n'est pas confondu avec O alors $m_c \cdot L_c \neq m_{cp} \cdot L_{cp}$ et φ est régi par l'équation différentielle trouvée en Q4) dans laquelle il y a \ddot{x} . Donc le mouvement dépend de l'accélération a . L'attitude est modifiée.

Q6)

$$H(p) = \frac{\Phi(p)}{A(p)} = \frac{L_{cp} \cdot m_{cp} - L_c \cdot m_c}{(L_{cp} \cdot m_{cp} - L_c \cdot m_c)g + (m_c \cdot L_c^2 + m_{cp} \cdot L_{cp}^2)p^2}$$

$$\omega_0 = \left(\frac{(L_{cp} \cdot m_{cp} - L_c \cdot m_c)g}{m_c \cdot L_c^2 + m_{cp} \cdot L_{cp}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ (homogène à temps}^{-1}\text{)}$$



$$20\log(\|H(j\omega_a)\|) = -20\log(g) - 40 = -60\text{dB}$$

$$\|H(j\omega_a)\| = 10^{\frac{-60}{20}} = 10^{-3} \text{ d'où } \varphi_{\max} = a_0 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 5 \times \frac{180}{\pi} \cdot 10^{-4} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ deg}$$

Conclusion : $3 \cdot 10^{-2} \text{ deg} < 0,5^\circ$ donc l'exigence id 2.1.2 est satisfaite pour $\omega_a = 10\omega_0$.

Mais pas autour de ω_0 .

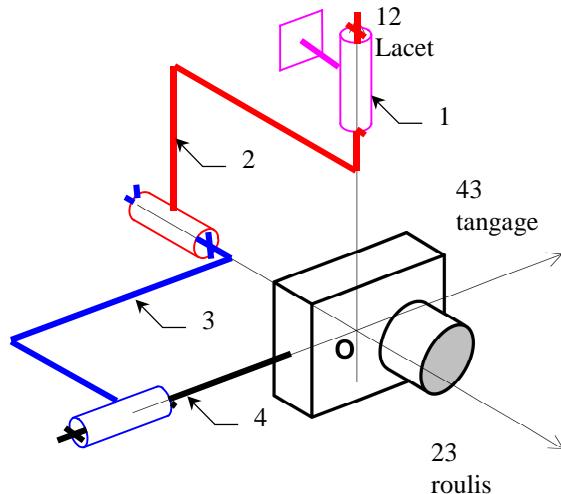
Q7)

Comportement observé	G au dessus de O	G au dessous de O	G confondu avec O
Attitude de (E') assurée en phase statique ?	non	oui	oui
(E') est en position d'équilibre stable ?	non	oui	indifférent
Attitude de (E') modifiée en phase dynamique ?	oui	oui	non

Q8)

Solides concernés	1 et 2	2 et 3	3 et 4
Désignation liaison proposée	Pivot	Pivot	Pivot
Caractéristiques	axe (O, \vec{z}_2)	axe (O, \vec{y}_3)	axe (O, \vec{x}_4)

Q9)



Q10)

Dans le cas où l'axe 21 (lacet) est confondu avec l'axe 43 (tangage) le nombre de degrés de libertés entre 4 et 1 n'est plus que de 2. Le mécanisme a toujours 3 mobilités.

Si on suppose que le stabilisateur passif est réalisé par une liaison rotule avec contact sphère - sphère, alors le nombre de degrés de liberté de cette liaison est invariant quelle que soit la position.

Q11)

a) $m_c = 1$ et $I_c = 2 \times 3 + 2 \times 4 = 14$ donc on aura $r_c = I_c - m_c = 13$ équations indépendantes.

Le mécanisme a $\gamma = L - N + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$ boucles d'où $h = 6\gamma - r_c = 18 - 13 = 5$

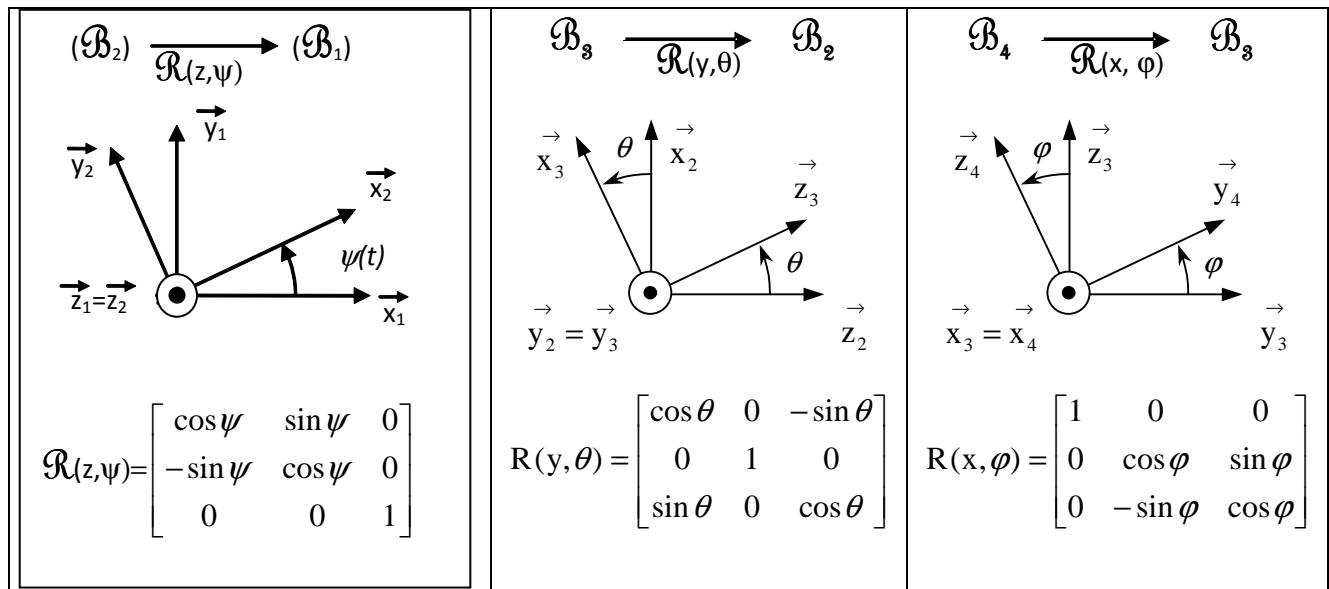
b) $m_c = 1$ et $I_c = 2 \times 3 = 6$ donc on aura $r_c = I_c - m_c = 5$ équations indépendantes.

Le mécanisme a $\gamma = L - N + 1 = 2 - 2 + 1 = 1$ boucles d'où $h = 6\gamma - r_c = 6 - 5 = 1$

c) Identique au précédent, d'où $h = 6\gamma - r_c = 6 - 5 = 1$

d) Si on suppose que le stabilisateur passif est réalisé par une liaison rotule avec contact sphère - sphère alors il n'a pas de boucle et $h = 0$.

Q12)



Q13)

En posant $R(x, \phi) = R_{43}$, $R(y, \theta) = R_{32}$ et $R(z, \psi) = R_{21}$ on trouve la matrice de passage de la base 4 à la base 1 :

$$R_{41} = R_{43} \cdot R_{32} \cdot R_{21} = R(x, \phi) \cdot R(y, \theta) \cdot R(z, \psi)$$

$$R_{41} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi & \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi \\ \sin \psi \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \cos \phi & -\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}$$

Q14)

$$\vec{a}_{B_4} = R_{41} \cdot \vec{G}_{B_1}$$

$$a_x = g \cdot \sin \theta$$

$$a_y = -g \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi$$

$$a_z = -g \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi$$

La première équation permet de trouver θ dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Les deux autres équations permettent alors de trouver ϕ dans l'intervalle $[0, 2\pi]$

Mais on n'a aucune information sur ψ . Le vecteur accélération est donc insuffisant pour déterminer l'attitude de la caméra.

Q15)

$\vec{ma}_{B_4} = R_{41} \cdot \vec{M}_{B_1}$ donne 3 équations supplémentaires.

$$m_x = M \cdot (\cos \gamma \cos \psi \cos \theta + \sin \gamma \sin \theta)$$

$$m_y = M \cdot \cos \gamma (-\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi) - M \cdot \sin \gamma \cos \theta \sin \phi$$

$$m_z = M \cdot \cos \gamma (\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \cos \phi) - M \cdot \sin \gamma \cos \theta \cos \phi$$

On peut donc déterminer l'angle ψ .

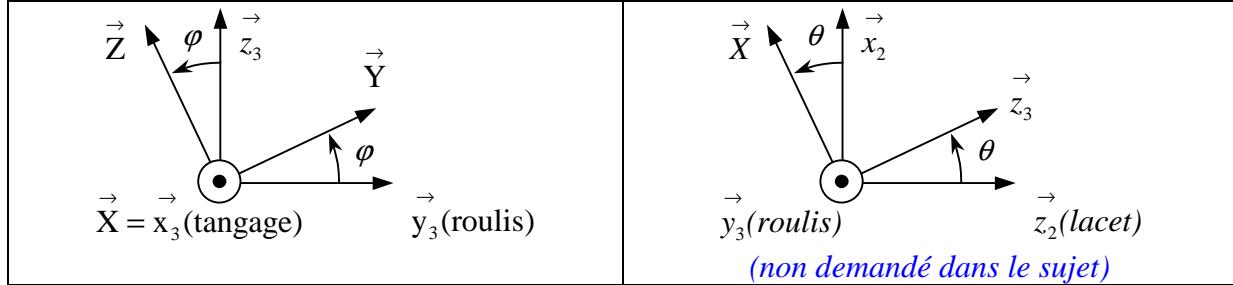
Q16)

X	Tangage
Y	Roulis
Z	Lacet

Q17)

Gyromètre X aligné avec l'axe de Tangage (43).

Q18)



$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_x$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_y \cdot \cos \varphi - \omega_z \sin \varphi$$

$$\frac{d\psi}{dt} = (\omega_y \cdot \sin \varphi + \omega_z \cos \varphi) \cos \theta - \omega_x \cdot \sin \theta$$

(l'énoncé suppose certainement $\theta=0$ car il manque une vue plane de rotation)

Q19)

$$G_s \in (M, \vec{u})$$

Solution 1 : Ajouter de la matière

Solution 1 : Enlever de la matière

Q20)

Ensemble : 4 + caméra

$$(m_4 + m_c) \vec{O'G}_{4c} = m_4 \vec{O'G}_4 + m_c \vec{O'G}_c$$

$$\text{Projection sur } \vec{y_c} : m_c(b_c + y_c) = 0$$

$$\text{Projection sur } \vec{z_c} : -m_4 c_4 + m_c(c_c + z_c) = 0$$

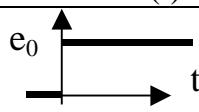
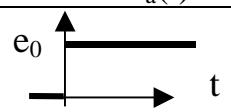
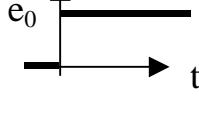
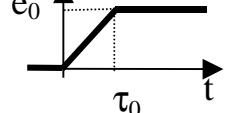
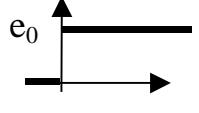
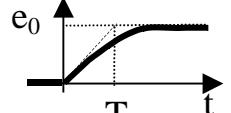
$$y_c = -b_c = -20mm = -2cm \text{ et } z_c = \frac{m_4 c_4 - m_c c_c}{m_c} = \frac{350 \times 4 - 1000 \times 48}{1000} = -46,6mm = -4,6cm$$

$$\vec{O'G}_{4c} = \frac{m_4 \vec{O'G}_4 \cdot \vec{x}_4 + m_c \vec{O'G}_c \cdot \vec{x}_4}{m_4 + m_c} \vec{x}_4 = \frac{-m_4 a_4 + m_c (x_c + a_c)}{m_4 + m_c} \vec{x}_4 = \lambda \vec{x}_4$$

Réglages : translations ($i = 2, 3$ ou 4)

Ordre	Nom de l'axe	Solides concernés	$\pm \vec{X}_i$	$\pm \vec{Y}_i$	$\pm \vec{Z}_i$
1 ^{er}	tangage	4 + caméra		✓	✓
2 ^{ème}	roulis	3 + 4 + caméra	✓		
3 ^{ème}	lacet	2 + 3 + 4 + caméra		✓	

Q21)

	$\alpha^*(t)$	$A_i(p)$	$\alpha_{a(t)}^*$
[i=1]		1	
[i=2]		$\frac{1-e^{-\tau_0 \cdot p}}{\tau_0 \cdot p}$	
[i=3]		$\frac{1}{1+\varphi p}$	

Q22)

Code	Définition	Expression ou définition
Non codé	Fonction de transfert du mécanisme tangage	$\frac{A \cdot K_m}{1 + \tau_m \cdot p}$
$C_{OT}(p)$	Correcteur de tangage (partiel)	K_p
$g_1(p)$	Grandeur physique associée	Vitesse de rotation
$K_d \alpha_T$	Coefficient du correcteur dérivé	K_D

Lien entre $g_1(t)$ et $\dot{\varphi}(t)$:

$$\dot{g}_1(t) = \dot{\varphi}(t)$$

Q23)

$$FTBO(p) = \frac{K_p \cdot K_m \cdot A}{p(1 - K_m \cdot A \cdot K_D + \tau_m \cdot p)} = \frac{K_p}{p(1 - K_D + \tau_m \cdot p)}$$

$$FTBF(p) = \frac{K_p \cdot K_m \cdot A \cdot A_i(p)}{p(1 - K_m \cdot A \cdot K_D + \tau_m \cdot p) + K_p \cdot K_m \cdot A} = \frac{K_p \cdot A_i(p)}{K_p + (1 - K_D)p + \tau_m \cdot p^2}$$

Q24)

Il faut que les pôles de la FTBF soient à partie réelle négative.

$$\text{Donc } \text{Re}(p_i) = \frac{K_m \cdot A \cdot K_D - 1}{2\tau_m} < 0 \text{ soit } K_D < \frac{1}{A \cdot K_m} = 1$$

$$K_{D_{\max}} = \frac{1}{A \cdot K_m} = 1 \text{ (limite de stabilité)}$$

Q25)

$$\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{1 - K_m \cdot A \cdot K_D}{K_m \cdot A \cdot K_P} \text{ et } \omega_0 = \frac{K_m \cdot A \cdot K_P}{\tau_m} \text{ donne}$$

$$\xi = \frac{1 - K_m \cdot A \cdot K_D}{2\sqrt{K_m \cdot A \cdot K_P \cdot \tau_m}} = \frac{1 - 0,5}{2\sqrt{10 \times 0,2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \approx 0,17 < 1$$

La réponse comportera donc des dépassements et des oscillations.

Q26)

Le mouvement évolue rapidement pendant les 4 premières secondes et lentement ensuite sans dépassements (réponse exponentielle apériodique).

L'exigence id1.12 est donc respectée.

Q27)

$$\varepsilon_1(p) = P_e(p) + \frac{K_m \cdot A}{1 + \tau_m \cdot p} \text{Com}(p) \quad \varepsilon_2(p) = -\frac{\varepsilon_1(p)}{p} \quad \varepsilon_3(p) = K_P \cdot \varepsilon_2(p) + K_D \cdot \varepsilon_1(p)$$

$$\text{Com}(p) = \left(-\frac{K_P}{p} + K_D \right) \left(P_e(p) + \frac{K_m \cdot A}{1 + \tau_m \cdot p} \text{Com}(p) \right)$$

$$p \cdot (1 + \tau_m \cdot p) \text{Com}(p) = (-K_P + p \cdot K_D)((1 + \tau_m \cdot p)P_e(p) + K_m \cdot A \cdot \text{Com}(p))$$

$$(p \cdot (1 + \tau_m \cdot p) + (K_P - p \cdot K_D)K_m \cdot A) \text{Com}(p) = (-K_P + p \cdot K_D)(1 + \tau_m \cdot p)P_e(p)$$

$$\boxed{\text{Stab}(p) = \frac{\text{Com}(p)}{P_e(p)} = \frac{(-K_P + p \cdot K_D)(1 + \tau_m \cdot p)}{p \cdot (1 + \tau_m \cdot p) + (K_P - p \cdot K_D)K_m \cdot A}}$$

Q28)

Le système est stable. On peut donc appliquer le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Com}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \text{Com}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \text{Stab}(p) \cdot \frac{P_0}{p} = -\frac{P_0}{K_m \cdot A} = -P_0$$

$$\text{Si } P_0 = 1 \text{ deg.s}^{-1} \text{ alors } \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Com}(t) = -1 \text{ deg.s}^{-1}$$

Sens physique : la vitesse de rotation de la commande du moteur est l'opposée de la vitesse de rotation de la perturbation. La somme des deux vitesses s'explique par la composition des

mouvements : $\omega_{4/0} = \omega_{4/3} + \omega_{3/0} = \dot{\varphi}(t) + P_e(t)$. Si $\lim_{t \rightarrow 0} \dot{\varphi}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \text{Com}(t) = -P_e$ alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} \omega_{4/0} = 0.$$

La caméra aura une vitesse de rotation par rapport à 3 nulle en régime établi.

Q29)

$$\text{On a déjà trouvé } FTBO(p) = \frac{K_P \cdot K_m \cdot A}{p(1 - K_m \cdot A \cdot K_D + \tau_m \cdot p)}$$

$$\text{Pert}(p) = \frac{K_p \cdot K_m \cdot A \left(\frac{1 + \tau_m \cdot p}{K_m \cdot A} \right)}{p(1 - K_m \cdot A \cdot K_D + \tau_m \cdot p) + K_p \cdot K_m \cdot A} = \frac{1 + \tau_m \cdot p}{p(1 - K_m \cdot A \cdot K_D + \tau_m \cdot p) + K_p \cdot K_m \cdot A}$$

Q30)

Le système est stable. On peut donc appliquer le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varphi(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \text{Pert}(p) \cdot \frac{P_0}{p} = \frac{P_0}{K_m \cdot A \cdot K_p} = \frac{P_0}{K_p}$$

Si $P_0 = 1 \text{ deg.s}^{-1}$ et $K_p = 10 \text{ s}^{-1}$ alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0,1^\circ$

Sens physique : l'orientation de la caméra par rapport au sol change suite à la perturbation en échelon. Le temps de réaction du moteur ne permet pas de compenser complètement la vitesse perturbatrice au début du mouvement.

L'erreur sera d'autant plus faible que K_p sera grand.

Q31)

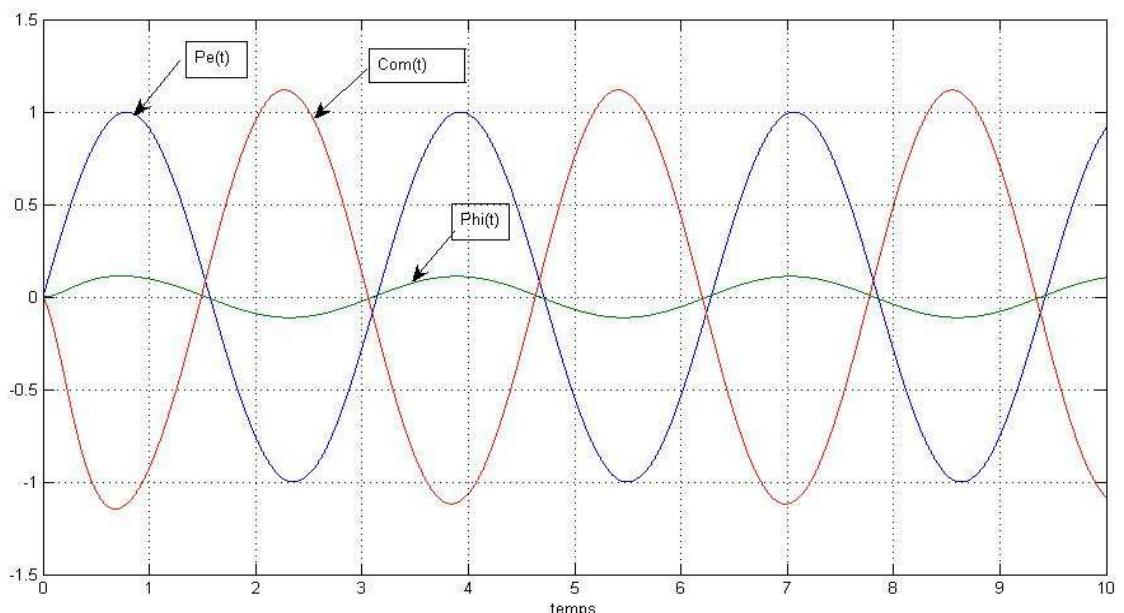
$\text{FTBO}(p) = \frac{2 \cdot K_p}{p(1 + 0,4 \cdot p)}$ est un ordre 2, donc $\varphi > -180^\circ$ et la marge de gain $MG = \infty$.

Pour $\omega = 7 \text{ rad.s}^{-1}$ on a $20 \log(\|\text{FTBO}(j\omega)\|) = -3 \text{ dB}$ et $\varphi = -160^\circ$.

$20 \log(\|\text{FTBO}(j\omega)\|)$ est une fonction monotone décroissante de ω .

En posant $K_p = \lambda \cdot K_{p_{\text{init}}}$ il faut donc que $20 \log(\lambda) \leq 3 \text{ dB}$ soit $\lambda \leq 10^{\frac{3}{20}} = \sqrt{2}$
 $K_{p_{\text{maxi}}} = \sqrt{2} \cdot K_{p_{\text{init}}} = \sqrt{2} \approx 1,4 \text{ s}^{-1}$

Q32)



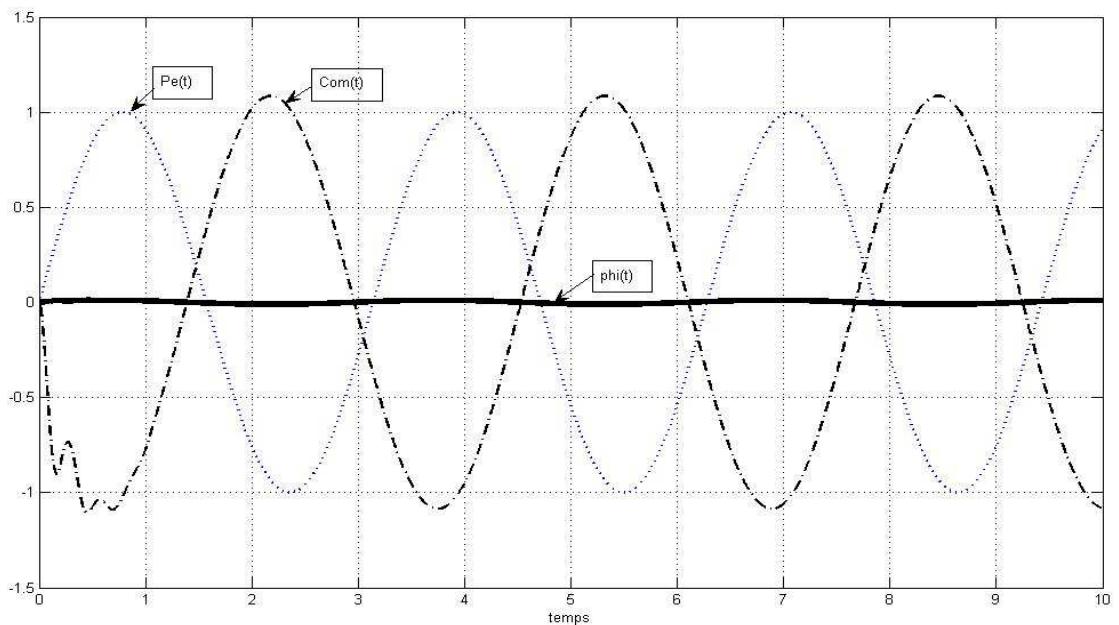
Réponse de l'axe de tangage à une perturbation sinusoïdale

On mesure un $|\phi| < 0,12^\circ$ (hypothèse sur les unités d'angle en degrés) alors que l'exigence 1.13 stipule $|\phi| < 0,1^\circ$. L'exigence 1.13 n'est pas respectée.

On remarque que $Com(t)$ et $Pe(t)$ sont en opposition de phase, ce qui est cohérent avec le résultat de Q28 où on a trouvé $\lim_{t \rightarrow \infty} Com(t) = -P_0$ en régime établi.

Remarque : si P_e en deg.s^{-1} alors K_p de l'ordre de $10 \text{ s}^{-1} > 1,4 \text{ s}^{-1}$ de Q31

Q33)



Réponse de l'axe de tangage à une perturbation sinusoïdale
(Nouveau réglage)

L'exigence 1.13 est respectée car $|\phi| < 0,1^\circ$.

On a certainement augmenté K_p mais cela n'est pas très cohérent avec la valeur initiale de 10 s^{-1} puis la valeur de Q31) de $1,4 \text{ s}^{-1}$ avec une marge de phase de 20° .

On peut donc simultanément diminuer K_D (car $K_D < 1$ pour la stabilité) et même prendre K_D négatif pour augmenter la marge de phase.

Un correcteur PI (proportionnel Intégral) est éventuellement envisageable pour diminuer l'erreur tout en gardant une marge de phase satisfaisante.

Amélioration : diminution du mouvement indésirable de la caméra.