

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun INP

Année : 2025

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](#) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles).

La distribution et la publication de ce document sont strictement interdites !

Conditions de diffusion

Ce document n'a pas vocation à être diffusé, et sa consultation est exclusivement réservée aux adhérents de l'UPSTI.

Les adhérents peuvent en revanche s'en inspirer librement pour toute utilisation pédagogique.

Si vous constatez que ce document est disponible en téléchargement sur un site tiers, veuillez s'il vous plaît nous en informer [à cette adresse](#), afin que nous puissions protéger efficacement le travail de nos adhérents.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

L'équipe UPSTI

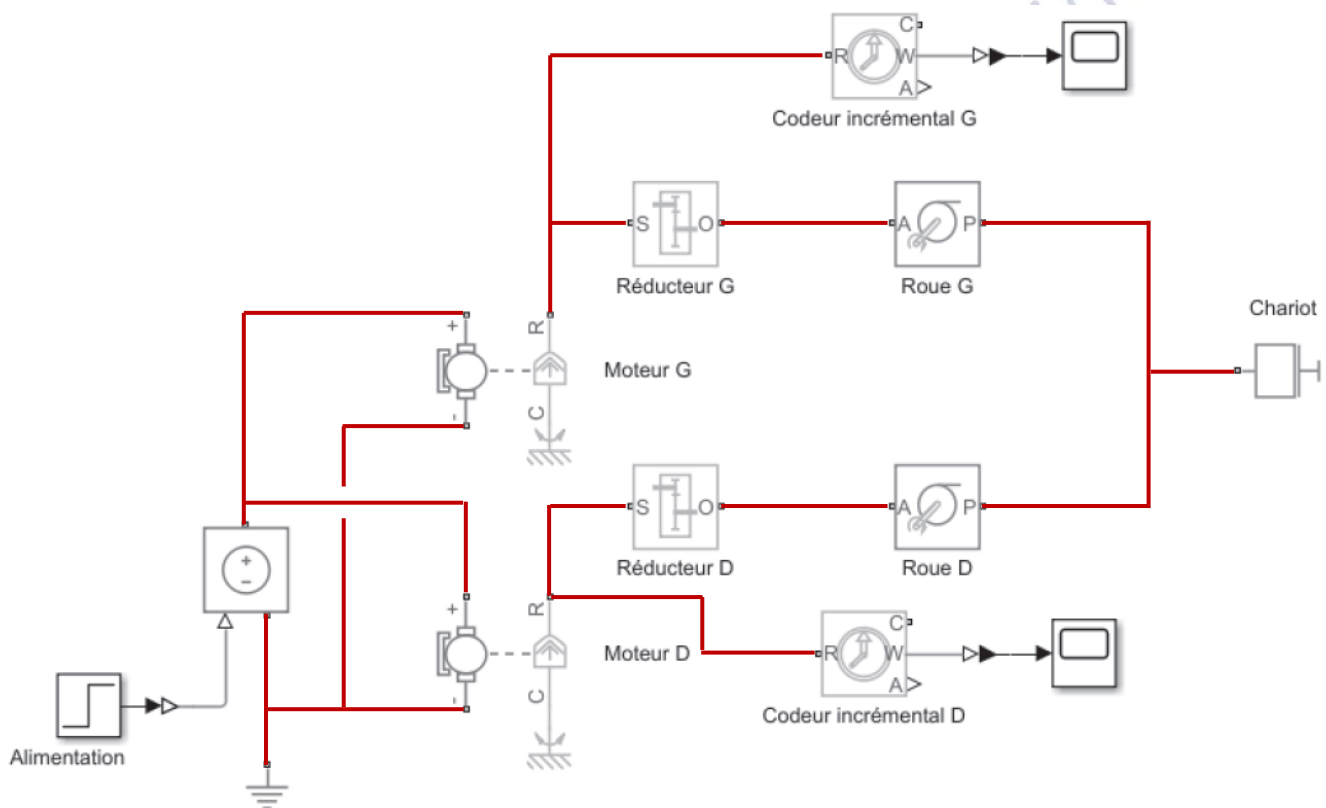
Pont roulant électrique

Corrigé UPSTI

I - Performances du pont roulant

I.1 - Analyse de la structure du pont

Question 1 Relier les blocs correctement sur le DR.



Question 2 Déterminer la vitesse théorique maximale V_{max} du pont. En supposant qu'il y a roulement sans glissement entre les roues et les rails et que le pont se translate à la vitesse maximale supposée constante, vérifier si la performance de temps de déplacement indiquée dans le cahier des charges peut être vérifiée.

S'il y a roulement sans glissement entre les roues et les rails, on a :

$$\vec{V}(I, \text{roue}/\text{rail}) = \vec{0} = \vec{V}(I, \text{roue}/\text{pont}) + \vec{V}(I, \text{pont}/\text{rail}) = -r \omega_{\text{roue}/\text{pont}} \vec{x} + V_{max} \vec{x}$$

$$\Rightarrow V_{max} = r \omega_{\text{roue}/\text{pont}} = k r \omega_{max} = \frac{0,2 \times 180}{24} = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Avec les hypothèses $V_{max} = D/T$.

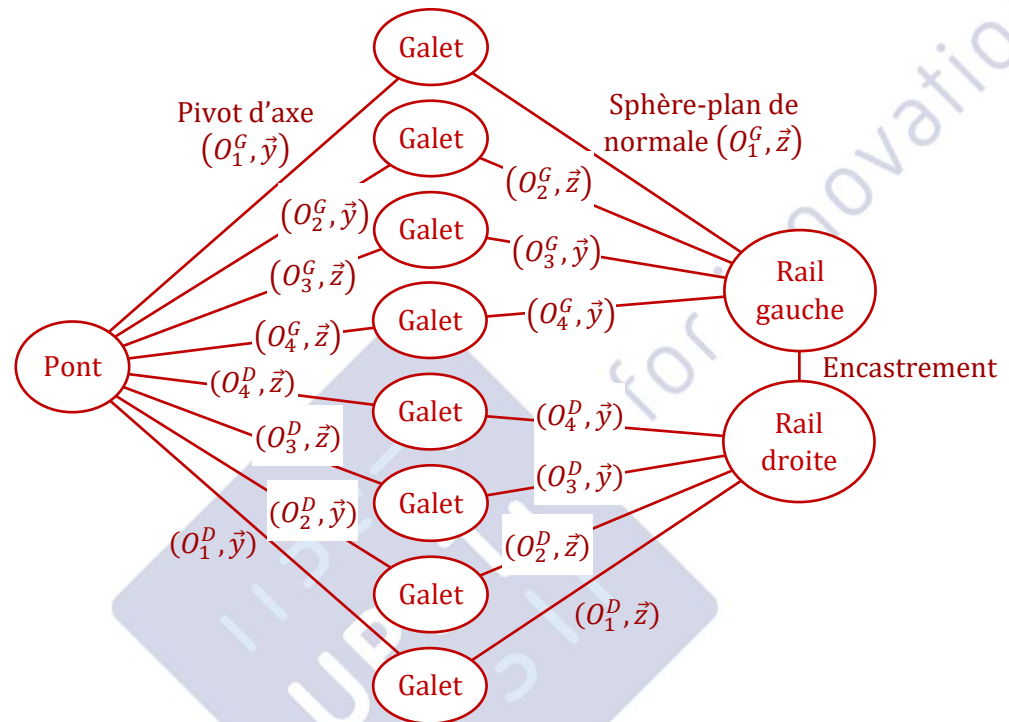
$$V_{max} = \frac{D}{T} \Rightarrow T = \frac{D}{V_{max}} = \frac{4}{1,5} \approx 2,7 \text{ s}$$

Le temps de déplacement est donc bien inférieur à 6 s comme le demande le cahier des charges.

Question 3 Réaliser un graphe de liaisons du modèle complet pont/rail en prenant en compte les 2 rails et les 8 galets.

Toutes les liaisons galets/pont sont des liaisons pivots dont l'axe est précisé.

Toutes les liaisons galet/rail sont des liaisons sphère-plan dont la normale est précisée.



Question 4 En considérant les liaisons parfaites, calculer le degré d'hyperstatisme du modèle ainsi établi en précisant clairement les mobilités utiles et internes.

On utilise l'approche cinématique. Il y a $E_c = 6 \times 7 = 42$ équations cinématique car 7 chaînes fermée indépendantes. Il y a $I_c = 8 \times 1 + 8 \times 5 + 1 \times 0 = 48$ inconnues cinématiques (1 par liaison pivot, 5 par liaison sphère-plan et 0 pour la liaison encastrement).

Le mécanisme comporte une mobilité utile, la translation de direction $\vec{x}$ du pont par rapport aux rails ($m_u = 1$). Il y a de plus 8 mobilités internes, qui correspondent aux 8 rotations des 8 galets par rapport au pont ($m_i = 8$). Ainsi il y a $m = m_u + m_i = 9$ mobilités.

Le degré d'hyperstatisme vaut alors $[h = m + E_c - I_c = 9 + 42 - 48 = 3]$.

Question 5 Pour pallier les problèmes de montage induits par le degré d'hyperstatisme déterminé précédemment, il est nécessaire de prévoir des réglages de position de plusieurs galets parmi les 8 galets disponibles. Indiquer les galets à régler pour rendre le modèle isostatique.

La liaison équivalente rail gauche/pont par l'intermédiaire des 4 galets est un pivot glissant d'axe parallèle à $\vec{x}$, isostatique. Pour obtenir une liaison équivalente rails/pont de type glissière, il suffirait donc d'un seul galet en contact ponctuel de normale $\vec{z}$ avec le rail droit pour bloquer la rotation autour de $\vec{x}$. Les 3 galets restant doivent donc disposer d'un réglage selon leur normale pour compenser l'hyperstatisme du système : ainsi les galets 3 et 4 de normales $\vec{y}$ ainsi que le galet 1 ou 2 de normale $\vec{z}$ doivent être réglés.

I.2 - Détermination de l'accélération limite

Question 6 Montrer que $T_2 = 0$ en précisant le système isolé et l'équation utilisée issue du Principe Fondamental de la Dynamique.

On isole la roue 2 non motrice dans son mouvement par rapport au rail 0 supposé galiléen. La masse étant négligée, elle est soumise à 2 actions mécaniques :

$$\mathcal{F}(\text{rail} \rightarrow 2) = \underset{I_2}{\left\{ \begin{array}{c} N_2 \vec{z} - T_2 \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \text{ et } \mathcal{F}(\text{pont} \rightarrow 2) = \underset{o_2}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(\text{pont} \rightarrow 2) \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

En appliquant le théorème du moment dynamique en O_2 :

$$\vec{M}(O_2, \text{rail} \rightarrow 2) + \vec{M}(O_2, \text{pont} \rightarrow 2) = \vec{\delta}(O_2, 2/0) = \vec{0} \text{ (masse et inertie de la roue négligées)}$$

Ainsi $(N_2 \vec{z} - T_2 \vec{x}) \wedge r \vec{z} = \vec{0}$ et on en déduit $\boxed{T_2 = 0}$.

Question 7 En isolant l'ensemble {roue 1 + roue 2 + pont} et en appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique, déterminer 3 relations reliant N_1 , N_2 , T_1 et l'accélération γ .

On isole l'ensemble {roue 1 + roue 2 + $\frac{1}{2}$ pont} dans son mouvement par rapport au rail 0 supposé galiléen. Il est soumis à 3 actions mécaniques :

$$\mathcal{F}(\text{rail} \rightarrow 1) = \underset{I_1}{\left\{ \begin{array}{c} N_1 \vec{z} - T_1 \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \text{ et } \mathcal{F}(\text{rail} \rightarrow 2) = \underset{I_2}{\left\{ \begin{array}{c} N_2 \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \text{ et } \mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ pont}) = \underset{G}{\left\{ \begin{array}{c} -\frac{Mg}{2} \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

En appliquant le théorème de la résultante dynamique, puis en projetant sur $\vec{x}$ et $\vec{z}$:

$$N_1 \vec{z} - T_1 \vec{x} + N_2 \vec{z} - \frac{Mg}{2} \vec{z} = \frac{M}{2} \vec{a}(G, \text{pont}/0) = -\frac{M\gamma}{2} \vec{x} \text{ (masse des roues négligée)}$$

$$\boxed{N_1 + N_2 = \frac{Mg}{2}} \text{ et } \boxed{T_1 = \frac{M\gamma}{2}}$$

En appliquant le théorème du moment dynamique en G :

$$\vec{M}(G, \text{rail} \rightarrow 1) + \vec{M}(G, \text{rail} \rightarrow 2) + \vec{M}(G, \text{pes} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ pont}) = \vec{\delta}(G, \text{pont}/0) + \vec{\delta}(G, 2/0) + \vec{\delta}(G, 1/0) = \vec{0}$$

Le premier moment dynamique est nul car le mouvement $\text{pont}/0$ est une translation et car G est le centre d'inertie du pont. Les autres moments dynamiques sont nuls car la masse et l'inertie des roues sont négligées.

$$(N_1 \vec{z} - T_1 \vec{x}) \wedge \left(\frac{L_c}{2} \vec{x} + h_c \vec{z} \right) + N_2 \vec{z} \wedge \left(-\frac{L_c}{2} \vec{x} + h_c \vec{z} \right) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{T_1 h_c + N_1 \frac{L_c}{2} - N_2 \frac{L_c}{2} = 0}$$

Question 8 Montrer que $N_1 = \frac{M}{2}(B - A\gamma)$ et $N_2 = \frac{M}{2}(B + A\gamma)$ où les expressions de A et B seront exprimées en fonction des données.

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 + N_2 = \frac{M}{2} g \\ -N_1 + N_2 = \frac{2 T_1 h_c}{L_c} = \frac{M}{2} \left(\frac{2 \gamma h_c}{L_c} \right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} N_2 = \frac{M}{2} \left(\frac{g}{2} + \frac{\gamma h_c}{L_c} \right) = \frac{M}{2} (B + A\gamma) \\ N_1 = \frac{M}{2} \left(\frac{g}{2} - \frac{\gamma h_c}{L_c} \right) = \frac{M}{2} (B - A\gamma) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{A = \frac{h_c}{L_c}} \\ \boxed{B = \frac{g}{2}} \end{array}$$

Question 9 Exprimer la valeur limite de l'accélération γ_{lim} à partir de laquelle la roue motorisée patine en fonction de A , B et de f . Faire l'application numérique en prenant $A = 0,5$ et $B = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. C'est cette valeur qui sera utilisée pour le critère d'accélération limite du cahier des charges.

Il y a glissement (patinage) si $T_1 = f N_1$.

$$\frac{M \gamma_{lim}}{2} = f \frac{M}{2} (B - A \gamma_{lim}) \Leftrightarrow \gamma_{lim} = f B - f A \gamma_{lim} \Leftrightarrow \boxed{\gamma_{lim} = \frac{f B}{1 + f A}}$$

On trouve donc comme accélération limite :

$$\boxed{\gamma_{lim} = \frac{0,4 \times 5}{1 + 0,4 \times 0,5} = \frac{5}{3} \approx 1,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

I.3 - Modélisation de la motorisation et dynamique

Question 10 Démontrer l'équation de mouvement du pont en précisant le système isolé, le théorème utilisé, l'expression de la constante J et celle du terme $C_r(t)$ intervenant dans l'équation :

$$2 C_m(t) - C_r(t) = J \frac{d\omega_m(t)}{dt} \text{ avec } J \approx 0,016 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

On isole l'ensemble {roues + pont} dans son mouvement par rapport au rail 0 supposé galiléen. On applique alors le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_c(\Sigma/0)}{dt} = P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/0) + P_{int}(\Sigma)$$

$$E_c(\Sigma/0) = \underbrace{E_c(\text{roues}/0)}_{=0 \text{ car masse et inertie négligées}} + \underbrace{E_c(\text{mot}/0)}_{\text{composition d'une rotation à la vitesse } \omega_m \text{ et d'une translation à la vitesse } V} + \underbrace{E_c(\text{pont}/0)}_{\text{translation à la vitesse } V} = \frac{1}{2} (2 J_m \omega_m^2 + M V^2) = \frac{1}{2} (2 J_m + M r^2 k^2) \omega_m^2$$

$$P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/0) = P(F_r \rightarrow \text{pont}/0) + \underbrace{P(\text{pes} \rightarrow \text{pont}/0)}_{=0 \text{ car le poids est } \perp \text{ à la vitesse}} + \underbrace{P(0 \rightarrow \text{roues}/0)}_{=0 \text{ car roulement sans glissement}} = -F_r V = -F_r r k \omega_m$$

$$P_{int}(\Sigma) = \underbrace{P(\text{roues}_{pivot} \leftrightarrow \text{pont})}_{=0 \text{ car liaison parfaite}} + P(\text{roues}_{mot} \leftrightarrow \text{pont}) = 2 C_m \omega_m$$

Ainsi :

$$(2 J_m + M r^2 k^2) \omega_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} = 2 C_m \omega_m - F_r r k \omega_m \Rightarrow \boxed{2 C_m(t) - F_r r k = (2 J_m + M r^2 k^2) \frac{d\omega_m(t)}{dt}}$$

On retrouve la forme recherchée pour l'équation de mouvement avec :

$$\boxed{J = 2 J_m + M r^2 k^2} \text{ et } \boxed{C_r(t) = F_r r k}$$

Question 11 Montrer que la fonction de transfert reliant $\frac{V(p)}{U_m(p)}$ est une fonction du premier ordre où l'expression des constantes caractéristiques sera donnée en supposant que $C_r(t) = 0$ en notant $V(p)$ la transformée de Laplace de la vitesse $V(t)$ du pont.

En se plaçant dans les conditions de Heaviside, et avec $C_r(t) = 0$ et en passant dans le domaine de Laplace :

$$2 C_m(p) = J p \Omega_m(p)$$

$$U_m(p) = R_m I_m(p) + k_m \Omega_m(p) = \frac{R_m}{k_m} C_m(p) + k_m \Omega_m(p) = \left(\frac{R_m J p}{2 k_m} + k_m \right) \Omega_m(p)$$

$$\frac{V(p)}{U_m(p)} = \frac{r k \Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{r k}{\frac{R_m J p}{2 k_m} + k_m} \Rightarrow \boxed{\frac{V(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{r k}{k_m}}{1 + \frac{R_m J p}{2 k_m^2}} = \frac{k_1}{1 + \tau_1 p}}$$

On retrouve bien une fonction de transfert du premier ordre, ayant pour gain statique $k_1 = \frac{r k}{k_m}$ et pour constante de temps $\tau_1 = \frac{R_m J}{2 k_m^2}$.

Question 12 En déduire l'expression de l'accélération maximale γ_{max} (valeur initiale de l'accélération) que peut fournir la motorisation du pont lorsque la tension d'alimentation est un échelon de 36 V. Faire l'application numérique et en déduire que le critère d'accélération n'est pas respecté.

Pour un système du premier ordre, de gain statique k_1 et de constante de temps τ_1 , soumis à une entrée en échelon d'amplitude U_0 on sait que le coefficient directeur de la tangente à l'origine vaut :

$$\frac{k_1 U_0}{\tau_1}$$

Il s'agit du coefficient directeur de la tangente à la vitesse à l'origine, donc de l'accélération initiale :

$$\gamma_{max} = \frac{k_1 U_0}{\tau_1} = \frac{2 r k U_0 k_m}{R_m J}$$

On trouve une accélération maximale de :

$$\gamma_{max} = \frac{2 \times 0,2 \times 36 \times 0,2}{24 \times 2 \times 0,016} = \frac{15}{4} = 3,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

L'accélération est donc supérieure à la valeur de $1,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ trouvée en question 9, donc le critère d'accélération n'est pas respecté (il y aura patinage dès le démarrage).

II - Commande par loi trapèze

Question 13 En supposant que le pont se déplace sur la distance maximale $D = 4$ m à une vitesse correspondant à un trapèze, déterminer l'expression de T_m en fonction de V_{max} , t_a et de D , puis faire l'application pour obtenir le temps de maintien à vitesse constante T_m .

La distance parcourue correspond à l'aire sous le graphe des vitesses en forme de trapèze :

$$D = \frac{V_{max} (T_m + t_a + T_m + t_a)}{2} = V_{max} (T_m + t_a) \Rightarrow T_m = \frac{D}{V_{max}} - t_a$$

Le temps de maintien à vitesse constante vaut donc :

$$T_m = \frac{4}{1} - 0,4 = 3,6 \text{ s}$$

Question 14 Vérifier les critères du cahier des charges.

Par lecture graphique :

- la distance parcourue vaut $D = 4$ m et correspond à la limite maximale du cahier des charges ;
- l'accélération maximale vaut $\gamma_{max} = 1,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et est donc bien inférieure à la limite déterminée à la question 9 $\gamma_{lim} \approx 1,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
- le temps de déplacement est très proche de 6 s, en effet à 6 s la vitesse est presque nulle ($\approx 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).

On pourra donc considérer que le cahier des charges est vérifié.

Question 15 Indiquer combien de données sont disponibles dans la base et combien de données sont utilisées pour réaliser des tests de validation du modèle.

La base de données complète comporte $X.shape[0] = 1481$ échantillons. La base de données de tests de validation comporte $X.shape[0] - X_{train}.shape[0] = 1481 - 1281 = 200 = \text{test_size échantillons}$ (le nombre d'échantillons total moins le nombre d'échantillons d'entraînement).

Question 16 Préciser le type d'IA utilisée en donnant les paramètres de la méthode utilisée (apprentissage supervisé ou non, régression ou classification, méthode k plus proches voisins ou réseau de neurones) et commenter les résultats obtenus (notamment les deux grandeurs affichées).

Il s'agit :

- d'un apprentissage supervisé car les données sont étiquetées (valeurs attendues des sorties Y fournies pour les entrée X) ;
- d'une régression car les valeurs à prédire $\hat{Y}$ peuvent prendre n'importe quelles valeurs dans un intervalle donnée ($-50 \leq \hat{Y} \leq 50$) ;
- d'un réseau de neurones (la fonction `MLPRegressor` est extraite de la bibliothèque `sklearn.neural_network`).

Le coefficient de détermination (r^2) pour les données d'apprentissage vaut 0,98 et est donc très proche de 1. Cela montre qu'il n'y a pas de problème de sous-apprentissage. Le coefficient de détermination (r^2) pour les données de validation vaut 0,97 et est à peine inférieur à celui des données d'apprentissage. Cela montre qu'il n'y a pas de

problème de sur-apprentissage. Cet algorithme d'IA est donc apte à prédire l'effort résistant en fonction de la vitesse.

Question 17 Donner des valeurs numériques approximativement pour l'ordonnée à l'origine F_0 et la pente A_0 de la partie affine du modèle approché. Expliquer à quoi correspondent physiquement ces deux quantités.

$$\text{Si } V > 0, F_r = A_0 V + F_0$$

F_0 correspond à l'ordonnée à l'origine et se lit directement sur le graphique $[F_0 \approx 25 \text{ N}]$; cette quantité correspond à la force de frottement sec.

A_0 correspond au coefficient directeur et se lit directement sur le graphique $[A_0 \approx \frac{50-25}{1150} \approx 2,2 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}]$; cette quantité correspond au coefficient de frottement visqueux.

III - Déplacement de la charge

III.1 - Établissement des équations de mouvements avec charge

Question 18 Calculer la vitesse du point B_c par rapport à 0 : $\vec{V}(B_c, c/0)$. En déduire son accélération $\vec{a}(B_c, c/0)$.

Par composition de mouvement :

$$\begin{aligned} \vec{V}(B_c, c/0) &= \underbrace{\vec{V}(B_c, c/1)}_{\substack{\text{mouvement} \\ \text{de rotation} \\ \text{d'axe } (B_2, \vec{y})}} + \underbrace{\vec{V}(B_c, 1/0)}_{\substack{\text{mouvement} \\ \text{de translation} \\ \text{de direction } \vec{x}}} = \vec{\Omega}(c/1) \wedge \overrightarrow{B_2 B_c} + V \vec{x} = \dot{\theta} \vec{y}_c \wedge (-L \vec{z}_c) + V \vec{x} \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{V}(B_c, c/0) = V \vec{x} - L \dot{\theta} \vec{x}_c} \end{aligned}$$

Par dérivation vectorielle :

$$\vec{a}(B_c, c/0) = \left[\frac{d \vec{V}(B_c, c/0)}{dt} \right]_0 = \gamma \vec{x} - L \ddot{\theta} \vec{x}_c - L \dot{\theta} \left[\frac{d \vec{x}_c}{dt} \right]_0 \Rightarrow \boxed{\vec{a}(B_c, c/0) = \gamma \vec{x} - L \ddot{\theta} \vec{x}_c + L \dot{\theta}^2 \vec{z}_c}$$

Question 19 Indiquer les équations issues du Principe Fondamental de la Dynamique permettant d'obtenir les deux équations de mouvements en $x(t)$ et en $\theta(t)$ (et leurs dérivées). Préciser les solides isolés, les bilans d'actions mécaniques extérieures et les équations obtenues sans développer les calculs.

Pour obtenir les équations de mouvements, il faut :

- isoler le solide (c) par rapport à (0) supposé galiléen et le BAME donne alors :

$$\mathcal{F}(pes \rightarrow c) = {}_{B_c} \begin{Bmatrix} -m g \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \qquad \mathcal{F}(1 \rightarrow c) = {}_{B_2} \begin{Bmatrix} X_{1c} \vec{x} + Z_{1c} \vec{z} \\ -f_c \dot{\theta} \vec{y} \end{Bmatrix}$$

On applique alors le théorème du moment dynamique en B_2 en projection sur $\vec{y}$ pour ne pas faire apparaître les inconnues de la liaison pivot :

$$\boxed{\vec{M}(B_2, pes \rightarrow c) \cdot \vec{y} + \vec{M}(B_2, 1 \rightarrow c) \cdot \vec{y} = \vec{\delta}(B_2, c/0) \cdot \vec{y} \quad (6')}$$

- isoler le système {1, c} par rapport à (0) supposé galiléen et le BAME donne alors :

$$\mathcal{F}(pes \rightarrow c) = \begin{Bmatrix}_{B_c} -m g \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{F}(pes \rightarrow 1) = \begin{Bmatrix}_G -M g \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{F}(0 \rightarrow c) = \begin{Bmatrix}_{B_1} -F_r \vec{x} + Z_{0c} \vec{z} \\ N_{0c} \vec{y} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{F}(mot \rightarrow c) = \begin{Bmatrix}_{B_1} F \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

On applique alors le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\vec{x}$ pour ne pas faire apparaître les inconnues de la liaison glissière :

$$\vec{R}(pes \rightarrow c) \cdot \vec{x} + \vec{R}(pes \rightarrow 1) \cdot \vec{x} + \vec{R}(0 \rightarrow c) \cdot \vec{x} + \vec{R}(mot \rightarrow c) \cdot \vec{x} = M \vec{a}(G, 1/0) \cdot \vec{x} + m \vec{a}(B_c, c/0) \cdot \vec{x} \quad (5')$$

Question 20 Réaliser les calculs et montrer en linéarisant autour de $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$ que l'on obtient les équations suivantes avec $f_v = \frac{f_c}{mL}$:

$$(M + m) \ddot{x} - L m \ddot{\theta} = F(t) - F_r(t) \quad \text{et} \quad (5)$$

$$L \ddot{\theta} - \ddot{x} + g \theta + f_v \dot{\theta} = 0 \quad (6)$$

L'équation (5'), avec $\gamma = \ddot{x}$, devient :

$$0 + 0 - F_r + F = M \ddot{x} + m \ddot{x} - m L \ddot{\theta} \cos \theta + m L \dot{\theta}^2 \sin \theta$$

En linéarisant autour de $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$, on a $\cos \theta \approx 1$ et $\dot{\theta}^2 \approx 0$ et on retrouve l'équation (5) :

$$(M + m) \ddot{x} - L m \ddot{\theta} = F(t) - F_r(t)$$

L'équation (6'), avec $\gamma = \ddot{x}$, devient :

$$-m g \vec{z} \wedge \overrightarrow{B_c B_2} \cdot \vec{y} - f_c \dot{\theta} = \vec{\delta}(B_2, c/0) \cdot \vec{y} = \underbrace{\vec{\delta}(B_c, c/0)}_{=\vec{0} \text{ car } (c) \text{ est une masse ponctuelle en } B_c} \cdot \vec{y} + m \vec{a}(B_c, c/0) \wedge \overrightarrow{B_c B_2} \cdot \vec{y}$$

$$-m g \vec{z} \wedge (L \vec{z}_c) \cdot \vec{y} - f_c \dot{\theta} = m(\ddot{x} \vec{x} - L \ddot{\theta} \vec{x}_c + L \dot{\theta}^2 \vec{z}_c) \wedge (L \vec{z}_c) \cdot \vec{y}$$

$$-m g L \sin \theta - f_c \dot{\theta} = -m L \ddot{x} \cos \theta + m L^2 \ddot{\theta}$$

En linéarisant autour de $\theta = 0$, on a $\cos \theta \approx 1$ et $\sin \theta \approx \theta$ et on retrouve l'équation (6) :

$$-m g L \theta - f_c \dot{\theta} = -m L \ddot{x} + m L^2 \ddot{\theta} \Leftrightarrow L \ddot{\theta} - \ddot{x} + g \theta + \frac{f_c}{mL} \dot{\theta} = 0$$

Question 21 Déterminer les deux fonctions de transfert : $H_x(p) = \frac{x(p)}{I(p)}$ et $H_\theta(p) = \frac{\theta(p)}{I(p)}$.

Avec $F_r(t) = 0$ et les conditions de Heaviside, et en passant les équations (5) et (6) dans le domaine de Laplace :

$$(M + m) p^2 X(p) - L m p^2 \Theta(p) = F(p) = K I(p)$$

$$(L p^2 + g + f_v p) \Theta(p) = p^2 X(p)$$

Ainsi :

$$(M + m) (L p^2 + g + f_v p) \Theta(p) - L m p^2 \Theta(p) = K I(p)$$

On en déduit :

$$H_\theta(p) = \frac{\Theta(p)}{I(p)} = \frac{K}{(M + m) (L p^2 + g + f_v p) - L m p^2} \Rightarrow H_\theta(p) = \frac{K}{M L p^2 + (M + m) f_v p + (M + m) g}$$

$$H_x(p) = \frac{X(p)}{I(p)} = \frac{X(p)}{\Theta(p)} H_\theta(p) \Rightarrow H_x(p) = \frac{1}{p^2} \times \frac{K (L p^2 + f_v p + g)}{M L p^2 + (M + m) f_v p + (M + m) g}$$

III.2 - Commande directe

Question 22 Compte tenu des expressions des fonctions de transfert, justifier la forme des courbes. Relever la valeur asymptotique de l'angle et vérifier que la valeur obtenue est cohérente avec l'expression théorique obtenue.

$H_x(p) = \frac{X(p)}{I(p)}$ est une fonction de transfert de classe 2 et $i(t)$ est un échelon de courant. En régime permanent, $x(t)$ aura donc une allure de parabole comme le montre la figure 10.

$$H_\theta(p) = \frac{\frac{K}{(M + m) g}}{1 + \frac{f_v}{g} p + \frac{M L}{(M + m) g} p^2}$$

$H_\theta(p) = \frac{\Theta(p)}{I(p)}$ est une fonction de transfert de classe 0 et d'ordre 2 et $i(t)$ est un échelon de courant. En régime permanent, $\theta(t)$ tendra donc vers une constante. En régime transitoire, on observe un régime pseudopériodique typique d'une fonction de transfert d'ordre 2 lorsque le coefficient d'amortissement vérifie $\xi < 1$.

La valeur asymptotique de l'angle se détermine à partir du gain statique de $H_\theta(p)$ et de l'amplitude i_0 de l'échelon :

$$\theta_\infty = \frac{K i_0}{(M + m) g} = \frac{50 \times 4}{250 \times 10} = 0,08 \text{ rad}$$

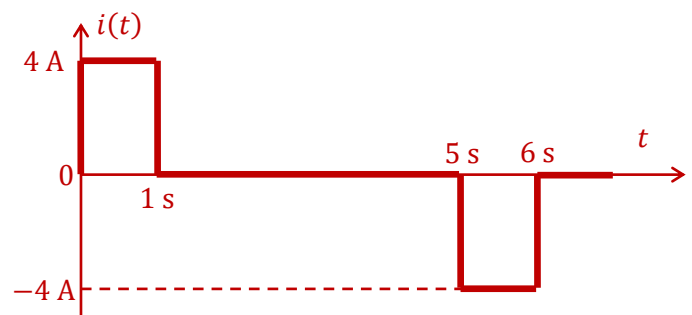
Par lecture graphique on trouve $\theta_\infty \approx 4,5^\circ = 4,5 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{40} \text{ rad} \approx \frac{3,2}{40} \text{ rad} = 0,08 \text{ rad}$.

La valeur obtenue de l'angle est cohérente avec l'expression trouvée.

Question 23 Indiquer l'allure de la commande $i(t)$ qui a été retenue et vérifier si les critères du cahier des charges sont tous respectés.

La fonction de transfert $p^2 X(p)/I(p) = A(p)/I(p)$ est de classe 0, donc :

- pour $t \leq 1 \text{ s}$: l'accélération constante nécessite une intensité de 4 A (voir figure 10) ;
- pour $1 \leq t \leq 5 \text{ s}$: l'accélération nulle nécessite une intensité nulle ;



- pour $5 \leq t \leq 6$ s : l'accélération négative nécessite une intensité de -4 A (opposée de la phase 1) ;
- pour $t \geq 6$ s : l'accélération et la vitesse nulle nécessitent une intensité nulle.

Concernant le cahier des charges :

- le déplacement de 4,8 m est supérieur à 4 m, donc ce critère n'est pas vérifié ;
- la durée de déplacement semble égale à 6 s, donc ce critère est vérifié ;
- l'accélération au démarrage vaut environ $a = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \times 0,5}{1^2} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ est bien inférieure à $1,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, ce critère est vérifié ;
- l'angle maximal vaut $|\theta|_{\max} \approx 9^\circ$ et est donc supérieur à 6° , donc ce critère n'est pas vérifié ;
- le temps de stabilisation de la charge vaut $\approx 9 - 6 = 3$ s et est donc supérieur à 2 s, donc ce critère n'est pas vérifié.

III.3 - Contrôle en boucle ouverte

Question 24 Montrer que l'on peut déterminer les composantes de X en fonction de W en exprimant X sous la forme $X = Q W$ où on détaillera les composantes de la matrice Q en fonction de M, m, g et de L .

$$\left\{ \begin{array}{l} x = w + L \theta = w + \frac{L}{g} \frac{d^2 w}{dt^2} \\ \frac{dx}{dt} = \frac{dw}{dt} + \frac{L}{g} \frac{d^3 w}{dt^3} \\ \theta = \frac{1}{g} \frac{d^2 w}{dt^2} \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{g} \frac{d^3 w}{dt^3} \\ F = \frac{M L}{g} \frac{d^4 w}{dt^4} + (M + m) g \frac{d\theta}{dt} = \frac{M L}{g} \frac{d^4 w}{dt^4} + (M + m) \frac{d^3 w}{dt^3} \end{array} \right. \Leftrightarrow X = Q W \text{ avec } Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{L}{g} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{L}{g} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{g} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M + m & \frac{ML}{g} \end{bmatrix}$$

Remarque : l'équation (11) n'est pas homogène.

En effet en négligeant les frottements l'équation (5) s'écrit :

$$(M + m) \ddot{x} - L m \ddot{\theta} = F \Leftrightarrow (M + m) (\ddot{x} - L \ddot{\theta}) + M L \ddot{\theta} = F \Leftrightarrow (M + m) \ddot{w} + M L \ddot{\theta} = F$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{1}{M L} (F - (M + m) \ddot{w}) = \frac{1}{M L} (F - (M + m) g \theta)$$

$$\boxed{\frac{d^4 w}{dt^4} = g \ddot{\theta} = \frac{g}{M L} (F - (M + m) g \theta)} \quad (11)$$

Donc :

$$F = \frac{M L}{g} \frac{d^4 w}{dt^4} + (M + m) g \theta = \frac{M L}{g} \frac{d^4 w}{dt^4} + (M + m) \frac{d^2 w}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow X = Q W \text{ avec } Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{L}{g} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{L}{g} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{g} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{g} & 0 \\ 0 & 0 & M + m & 0 & \frac{ML}{g} \end{bmatrix}$$

Question 25 Compléter la fonction `calcXetTheta(sol_w, dt)` qui renvoie deux vecteurs x et θ pour représenter les déplacements x et θ à partir de la donnée du vecteur sol_w et du pas de temps dt entre deux valeurs de w . On supposera que les constantes intervenant dans les équations (δ noté *delta*, L , g) et les conditions initiales sont des variables globales à utiliser directement dans la fonction.

def calcXetTheta(sol_w, dt) :

N = **len**(sol_w)

x = [0] * N

theta = [0] * N

theta[0] = **delta**

pour respecter les CI sur theta et dtheta

theta[1] = **delta**

pour respecter les CI sur theta et dtheta

for i **in** range(2, N) :

dw0 = (sol_w[i-1] - sol_w[i-2]) / dt

#dérivée à gauche en i - 1

dw1 = (sol_w[i] - sol_w[i-1]) / dt

#dérivée à gauche en i

dw2 = (dw1 - dw0) / dt

#dérivée seconde en i

theta[i] = **dw2** / g

x[i] = **sol_w[i]** + L * theta[i]

return x, theta

Question 26 Indiquer si les critères du cahier des charges sont tous respectés et pourquoi il est nécessaire de prévoir un asservissement.

Concernant le cahier des charges :

- le déplacement de 4 m est égal à la limite autorisée, donc ce critère est vérifié ;
- la durée de déplacement est égale à 5 s et inférieure à 6 s, donc ce critère est vérifié ;
- l'accélération au démarrage vaut environ $a = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \times 0,2}{1^2} = 0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ est bien inférieure à $1,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, ce critère est vérifié ;

- l'angle maximal vaut $|\theta|_{\max} \approx 9^\circ$ et est donc supérieur à 6° , donc ce critère n'est pas vérifié ;
- le temps de stabilisation de la charge n'est pas évaluable.

Pour obtenir ces résultats, il faut donc une loi de commande de l'effort moteur $F(t)$ très spécifique et précise. En pratique il sera presque impossible d'avoir cette loi commande. Il faut donc un asservissement. Bien réglé, cet asservissement devrait de plus permettre de mieux contrôler l'angle θ .

III.4 - Contrôle en boucle fermée

Question 27 Donner l'expression de la FTBO en gardant $p H_x(p)$, puis justifier que le réglage du correcteur permet de conserver un système stable en boucle fermée quelles que soient les valeurs de T_i et K_p .

$$FTBO(p) = C(p) p H_x(p) = \frac{K_p(1 + T_i p)}{T_i p} p H_x(p)$$

Pour la fonction de transfert $p H_x(p)$ la phase est toujours strictement supérieure à -90° (elle n'atteint -90° qu'asymptotiquement).

Pour la fonction de transfert du correcteur la phase est également toujours strictement supérieure à -90° (elle n'atteint -90° qu'asymptotiquement aux basses pulsations).

Ainsi pour la FTBO la phase est toujours strictement supérieure à -180° . En conséquence la marge de gain et la marge de phase seront strictement positives, donc le système sera stable en boucle fermée quelles que soient les valeurs de T_i et K_p .

Question 28 Proposer une forme de la fonction de transfert $p H_x(p)$ à partir des diagrammes de Bode de la **figure 13** sans préciser les valeurs des constantes caractéristiques. Donner la valeur du gain K_x de la fonction de transfert $p H_x(p)$.

Pour la fonction de transfert $p H_x(p)$, on observe :

- une pente de -20 dB/décade aux basses pulsations, la fonction est donc de classe 1 ;
- deux cassures aux pulsations $\omega_1 < \omega_2$, avec une pente de $+20$ dB/décade aux pulsation intermédiaires, et -20 dB/décade aux hautes pulsations, la fonction comporte donc un numérateur d'exposant 2 et de pulsation propre ω_1 , et un dénominateur d'exposant 2 et de pulsation propre ω_2 ;
- on en déduit la forme suivante :

$$p H_x(p) = \frac{K_x}{p} \times \frac{1 + \frac{2\xi_1}{\omega_1} p + \frac{p^2}{\omega_1^2}}{1 + \frac{2\xi_2}{\omega_2} p + \frac{p^2}{\omega_2^2}}$$

La gain statique K_x correspond à la pulsation pour laquelle l'asymptote des basses pulsations coupe 0 dB.

$$K_x = 0,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$$

Question 29 Déterminer l'erreur statique pour une entrée en échelon et l'erreur de traînage pour une entrée en rampe.

D'après les questions précédentes la FTBO est de classe 2, et le schéma-blocs est à retour unitaire sans perturbation. On peut en déduire que l'erreur statique pour un échelon et l'erreur de trainage pour une rampe sont nulles.

Question 30 On choisit de prendre $T_i = 10$ s. Déterminer la valeur de K_p pour avoir une pulsation au gain unité (ou pulsation où le gain vaut 0 dB sur la FTBO) de $100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

On veut $\omega_{0 \text{ dB}} = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Pour le correcteur, il s'agit d'une haute pulsation car $1/T_i = 0,1 \ll \omega_{0 \text{ dB}}$. A cette pulsation le correcteur est équivalent à un correcteur proportionnel de gain K_p .

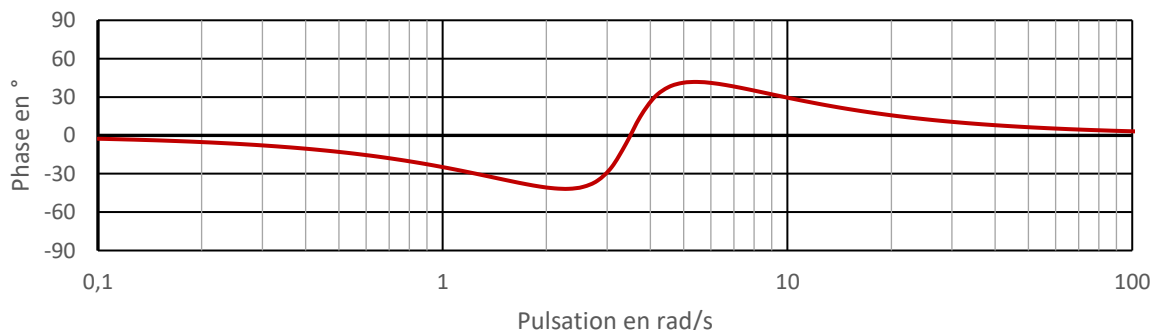
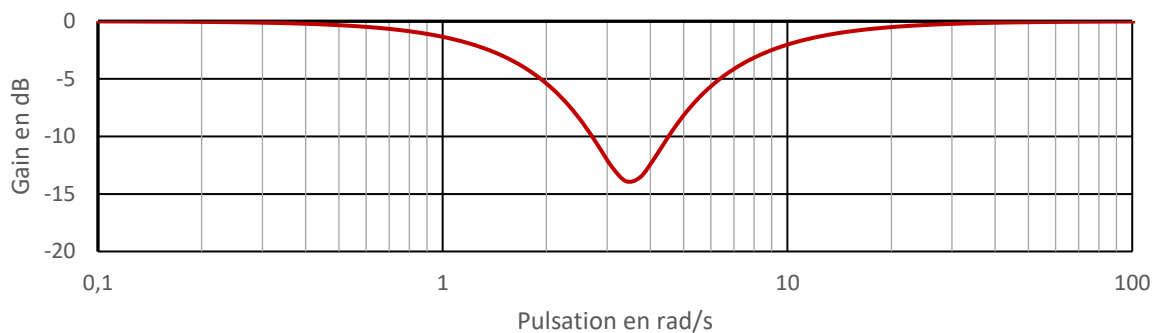
Par lecture graphique, on a un gain de -40 dB à $\omega_{0 \text{ dB}} = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, donc le correcteur doit permettre d'augmenter le gain de $20 \log K_p = 40$ donc $K_p = 100$.

Question 31 Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques et l'allure des diagrammes réels de ce filtre. Calculer notamment la valeur du gain réel en ω_0 .

La fonction de transfert du filtre a un gain statique de 1. Elle comporte un numérateur et un dénominateur du second ordre de même pulsation propre. Ainsi les diagrammes asymptotiques sont nuls.

$$G_{dB}(\omega_0) = 20 \log |F(j \omega_0)| = 20 \log \left(\frac{2 \xi_1}{2 \xi_2} \right) = 20 \log \left(\frac{\xi_1}{\xi_2} \right) = 20 \log 0,2 = 20 \log \frac{2}{10} \approx 6 - 20 = -14 \text{ dB}$$

Comme $\xi_1 < \xi_2$, le coefficient directeur de la phase est plus important pour le numérateur que pour le dénominateur. On aura donc une phase négative avant la cassure et positive après, et nulle à ω_0 .



Question 32 Justifier l'intérêt d'utiliser ce filtre sur la consigne ainsi que le choix de ω_0 et de $\frac{\xi_1}{\xi_2} < 1$. On fera référence à la **figure 10** pour justifier la valeur de ω_0 .

La consigne peut être décrite comme une somme de composantes sinusoïdales d'après la théorie de Fourier. Comme le système asservi est supposé linéaire, la réponse du système asservi sera une somme de composante sinusoïdales ayant les mêmes pulsations, donc le filtre permettra d'atténuer l'amplitude de toutes les grandeurs physiques ayant des pulsations proche de ω_0 .

La grandeur physique dont on souhaite réduire l'amplitude est l'angle θ , qui d'après la figure 10 a une pseudo-période de $T \approx 1,8$ s. La pulsation centrale du filtre réjecteur doit donc être ω_0 :

$$\frac{2\pi}{T} \approx \frac{6,3}{1,8} = 3,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = \omega_0$$

Le choix $\frac{\xi_1}{\xi_2} < 1$ est pour avoir un comportement réjecteur à la pulsation ω_0 , ce qui a été montré à la question 31.

IV - Synthèse

Question 33 À partir de ce qui a été fait dans le sujet, indiquer à quoi correspondent les différentes parties encadrées et nommées a à f.

a : consigne de vitesse en trapèze

b : fonction de transfert du filtre réjecteur

c : comparateur et correcteur de l'asservissement de vitesse

d : comparateur et correcteur de l'asservissement de courant

e : modèle de comportement dynamique du pendule et du pont

f : modélisation de la force de frottement F_r

Question 34 En utilisant ce modèle, on obtient les courbes de vitesse, position et angle de la **figure 15**. Commenter l'amélioration apportée par le filtre réjecteur et la vérification du cahier des charges.

Le filtre réjecteur a permis d'atténuer l'amplitude des oscillations de l'angle θ .

Concernant le cahier des charges :

- le déplacement de 4 m est égal à la limite autorisée, donc ce critère est vérifié ;
- la durée de déplacement de 6 s est égale à la limite autorisée, donc ce critère est vérifié ;
- l'accélération au démarrage vaut environ $a = \frac{v}{t} = \frac{1}{0,4} = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ est supérieure à $1,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, ce critère n'est pas vérifié ;
- l'angle maximal de 6° est égal à la limite autorisée, donc ce critère est vérifié ;
- le temps de stabilisation de la charge peut être considéré comme nul (l'angle reste compris entre -1° et 1° après les 6 s de déplacement), donc ce critère est vérifié.