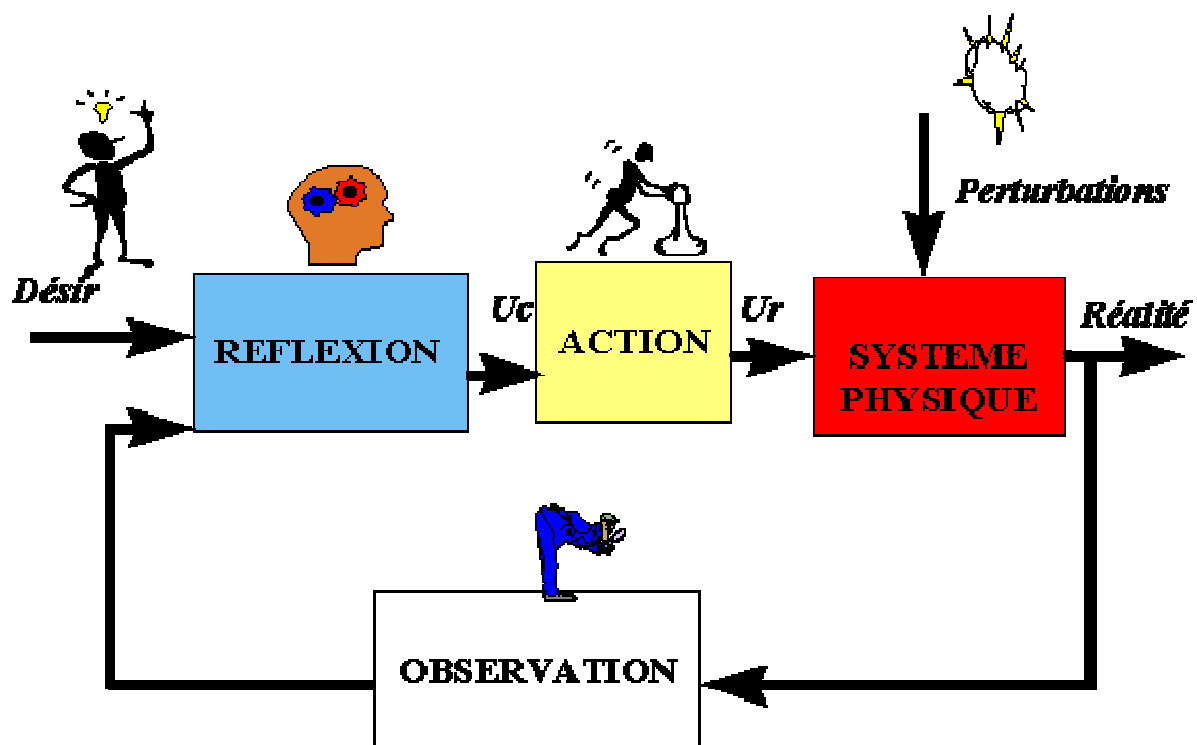


TD Comportement et commande des Systèmes Linéaires Continus et Invariants



Modélisation de systèmes par schéma fonctionnel**Exercice 1 : application au système de régulation en vitesse de vérin**

Un vérin hydraulique est asservi en vitesse. La vitesse de sortie de ce vérin est notée $v(t)$.

Une électrovanne (vanne pilotée électriquement) (considérée comme un distributeur hydraulique), délivre le débit $q(t)$ qui alimente le vérin.

La chaîne fonctionnelle est constituée d'un transducteur permettant de transformer la consigne de vitesse $v_c(t)$ en tension $u_c(t)$. Cette tension est comparée à la tension $u_{mes}(t)$, délivrée par un capteur de vitesse, puis corrigée.



Modéliser le système asservi par un schéma fonctionnel.

Exercice 2 : application au système de régulation en vitesse d'un plateau tournant

L'entraînement d'un plateau tournant est assuré par un moteur suivi d'un réducteur de vitesse. La consigne est donnée au travers d'un transducteur. Une génératrice tachymétrique mesure la vitesse obtenue après le réducteur. Le signal délivré par la génératrice tachymétrique est comparé à celui délivré par le transducteur. Un amplificateur, placé après le comparateur, délivre un signal de commande au moteur.

Le symbole d'une vitesse de rotation est ω « oméga ».

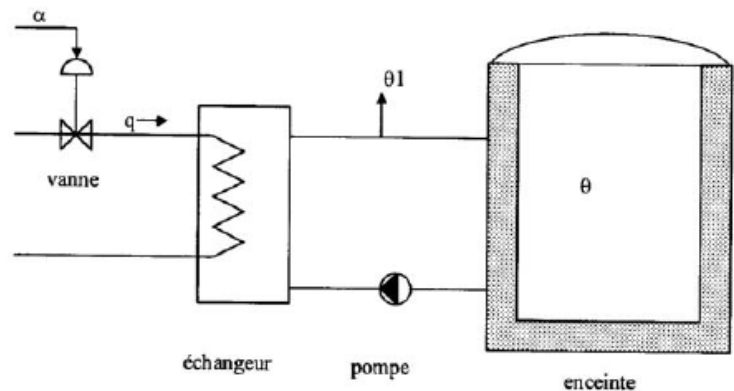
Modéliser le système asservi par un schéma fonctionnel.



Exercice 3 : application au système de régulation en température d'une enceinte chauffante



Le système représenté ci-contre est chargé de maintenir la température d'une enceinte. Le chauffage est assuré par un échangeur thermique. Une vanne permet de réguler le débit du fluide calorifique dans l'échangeur.



On note : $\alpha(t)$ l'angle d'ouverture de la vanne,
 $q(t)$ le débit dans l'échangeur,
 $\theta_1(t)$ la température en sortie de l'échangeur,
 $\theta(t)$ la température de l'enceinte.

Les équations suivantes modélisent :

- $q(t) = k_0 \cdot \alpha(t)$: la loi de fonctionnement de la vanne donnant le débit en fonction de l'angle d'ouverture,
- $\theta_1(t) + \tau_1 \cdot \frac{d\theta_1(t)}{dt} = k_1 \cdot q(t)$: le transfert de chaleur dans l'échangeur,
- $\theta(t) + \tau_2 \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = k_2 \cdot \theta_1(t)$: le transfert de chaleur dans l'enceinte.

Questions :

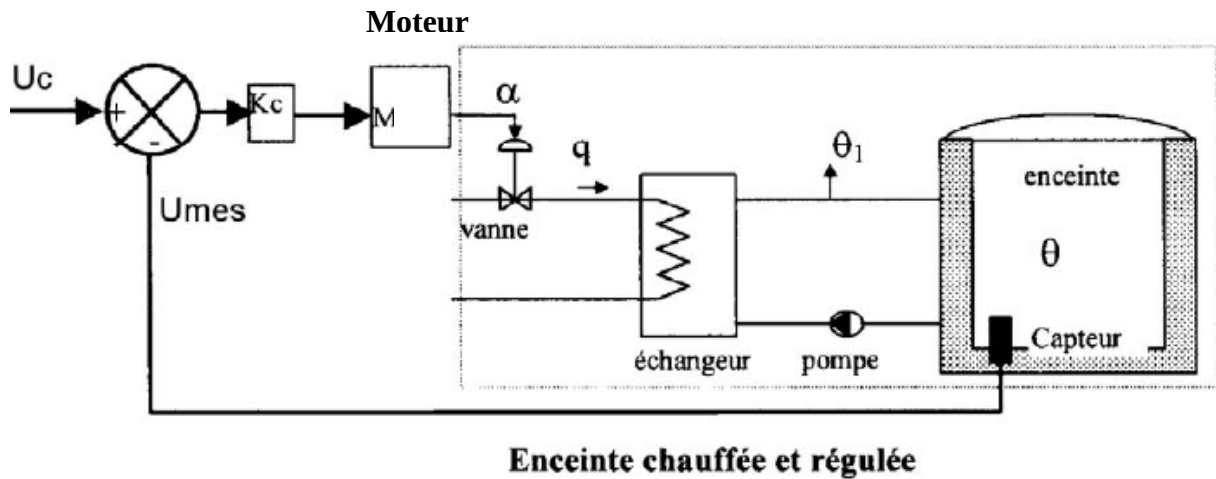
- *Ecrire le schéma bloc structurel modélisant le système non commandé*

Asservissement du système.

Afin de réguler la température, on choisit de motoriser la vanne et on installe un capteur dans l'enceinte qui permet de mesurer la température $\theta(t)$ et de la traduire en une tension $u_{mes}(t)$.

Cette tension $u_{mes}(t)$ est comparée à la tension de consigne $u_c(t)$ issue d'un transducteur.

En fonction de cet écart (amplifié par un correcteur de gain pur K_c), la vanne s'ouvre ou se ferme.



Le moteur M est alimenté par la tension $K_c \varepsilon(t)$.

Questions :

- Ecrire le schéma fonctionnel modélisant ce système commandé. La consigne est $\theta_c(t)$.
- Comment doit être modélisé le transducteur pour que $\varepsilon(t) = U_c - U_{mes}$ soit l'image de l'erreur.
- Ecrire la relation entre $U_c(t)$ et $\theta(t)$ sachant que le capteur est modélisable par une relation linéaire de gain K et que la tension d'alimentation ε du moteur est relié à α par la relation suivante :

$$\frac{d(\alpha(t))}{dt} + T_M \frac{d^2(\alpha(t))}{dt^2} = K_M K_c \varepsilon(t)$$

- Pensez-vous pouvoir résoudre facilement l'équation au cas où $\theta_c(t) = \text{cste}$?

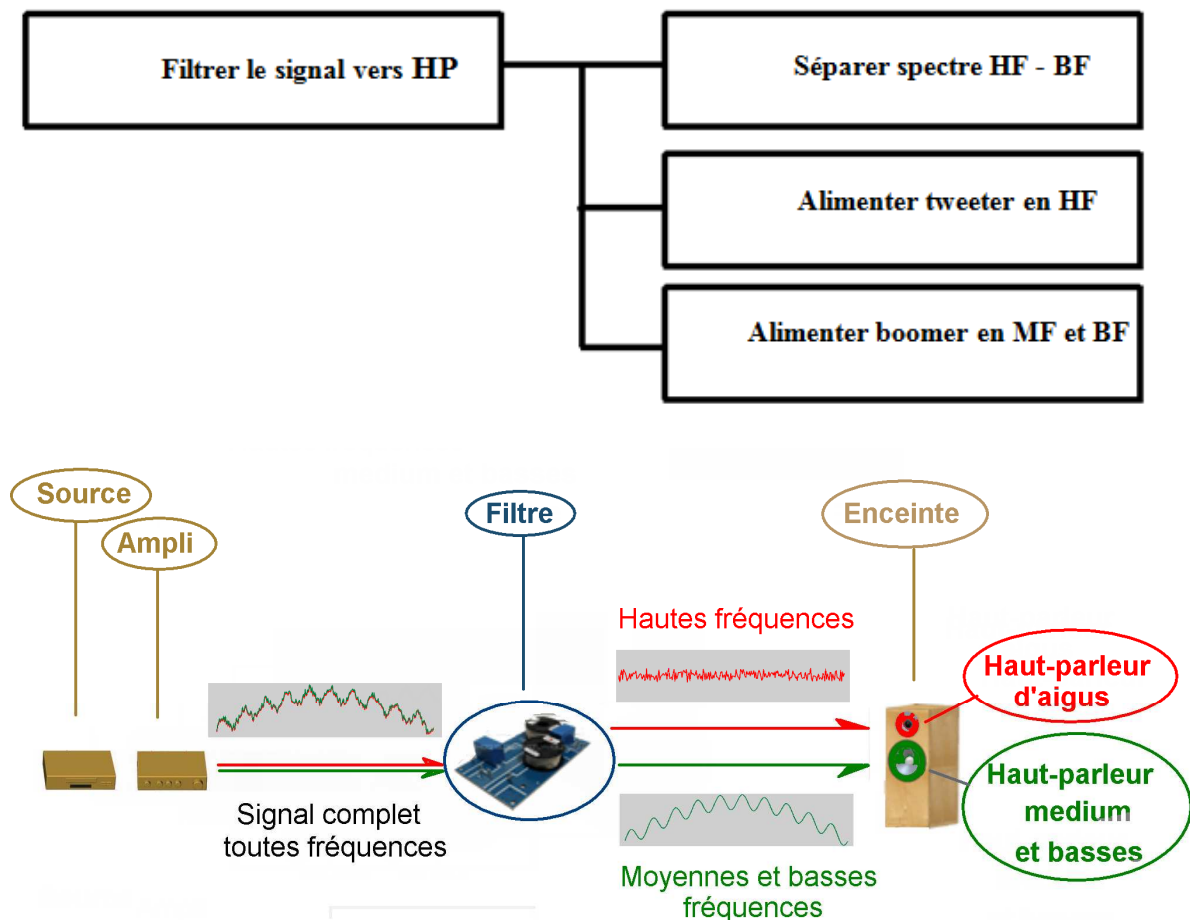
Utilisation de la transformée de Laplace

Exercice 4 : Modélisation et étude d'un filtre RC d'enceinte acoustique

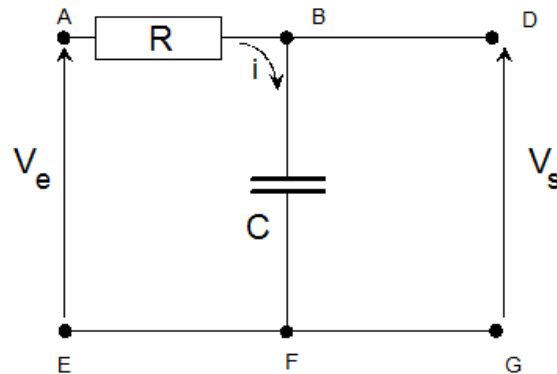


Présentation du système

Le système étudié ici est un filtre d'enceinte acoustique. Le signal électrique porteur de l'information sonore est issu de la source (par exemple un lecteur CD), amplifié, puis transmis aux haut-parleurs où il est converti en signal sonore. Dans les appareils de qualité, pour des raisons de technologie des haut-parleurs, on préfère confier la restitution des principales plages du spectre de fréquences à des haut-parleurs spécifiques : les hautes fréquences (les aigus) par les « tweeters », les moyennes et basses fréquences (les graves) par des « HP de medium » et « boomers ».



L'objet de l'étude est le sous-système qui réalise la séparation des fréquences, le filtre, et en particulier son étage qui élimine les fréquences hautes pour ne transmettre que les moyennes et basses : le filtre passe-bas. Le filtre RC dont le schéma est présenté ci-dessous est simple mais efficace :



$V_e(t)$ est la tension d'entrée, $V_s(t)$ la tension de sortie. L'intensité $i(t)$ est une variable interne. Les valeurs de la résistance R et de la capacité C sont supposées constantes, et il s'ensuit que le système sera invariant.

Mise en équations du système

La loi des mailles dans (D,B,F,G) fournit:

$$(V_D - V_B) + (V_B - V_F) + (V_F - V_G) + (V_G - V_B) = 0$$

soit

$$\frac{1}{C} \cdot \int i(t) \cdot dt - V_s(t) = 0 \quad (1)$$

La loi des mailles dans (D,A,E,G) fournit:

$$(V_D - V_A) + (V_A - V_E) + (V_E - V_G) + (V_G - V_A) = 0 ,$$

soit

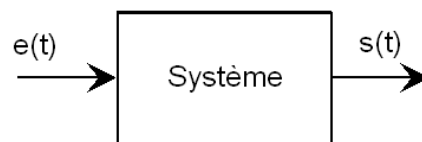
$$R \cdot i(t) + V_s(t) - V_e(t) = 0 \quad (2)$$

La loi des nœuds est écrite implicitement dans le fait que l'intensité $i(t)$ parcourt AB et BF, ce qui diminue le nombre d'inconnues introduites.

Si on élimine l'intensité $i(t)$ entre les deux équations (1) et (2), on obtient l'équation linéaire homogène à coefficients constants, caractéristique d'un système linéaire

$$V_e = V_s + RC \frac{dV_s}{dt} \quad (3)$$

On rappelle que par définition, la loi entrée-sortie d'un système linéaire d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$:



est de la forme (4) suivante :

$$a_0 \cdot e(t) + a_1 \cdot e^{(1)}(t) + \dots + a_m \cdot e^{(m)}(t) = b_0 \cdot s(t) + b_1 \cdot s^{(1)}(t) + \dots + b_n \cdot s^{(n)}(t)$$

où $(a_0, a_1, \dots, a_m)$ et $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ sont des coefficients réels, constants.

La suite de cette étude consiste à exprimer la fonction de transfert du système, puis calculer sa réponse temporelle pour une entrée échelon : en effet, même si une telle entrée n'est pas réaliste en situation d'utilisation, par contre elle précieuse en situation d'étude (en particulier expérimentale) car elle révèle la fonction de transfert du système, et donc la totalité de ses comportements possibles. Parmi ces comportements, on trouve bien sûr le *régime harmonique*, c'est à dire l'état qui résulte d'une entrée sinusoïdale - ce qui est proche d'une situation de fonctionnement.

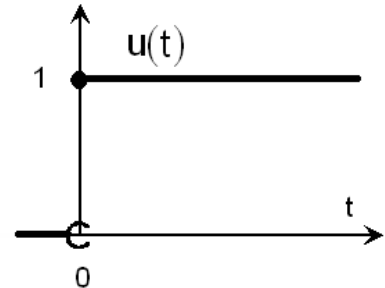
Réponse à un échelon

L'entrée

On applique au filtre une entrée échelon $\lambda.u(t)$, où $u(t)$ est l'échelon unitaire, qui est sans dimension physique.

$$u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4)$$



La dimension physique est portée par le scalaire λ (en Volts)

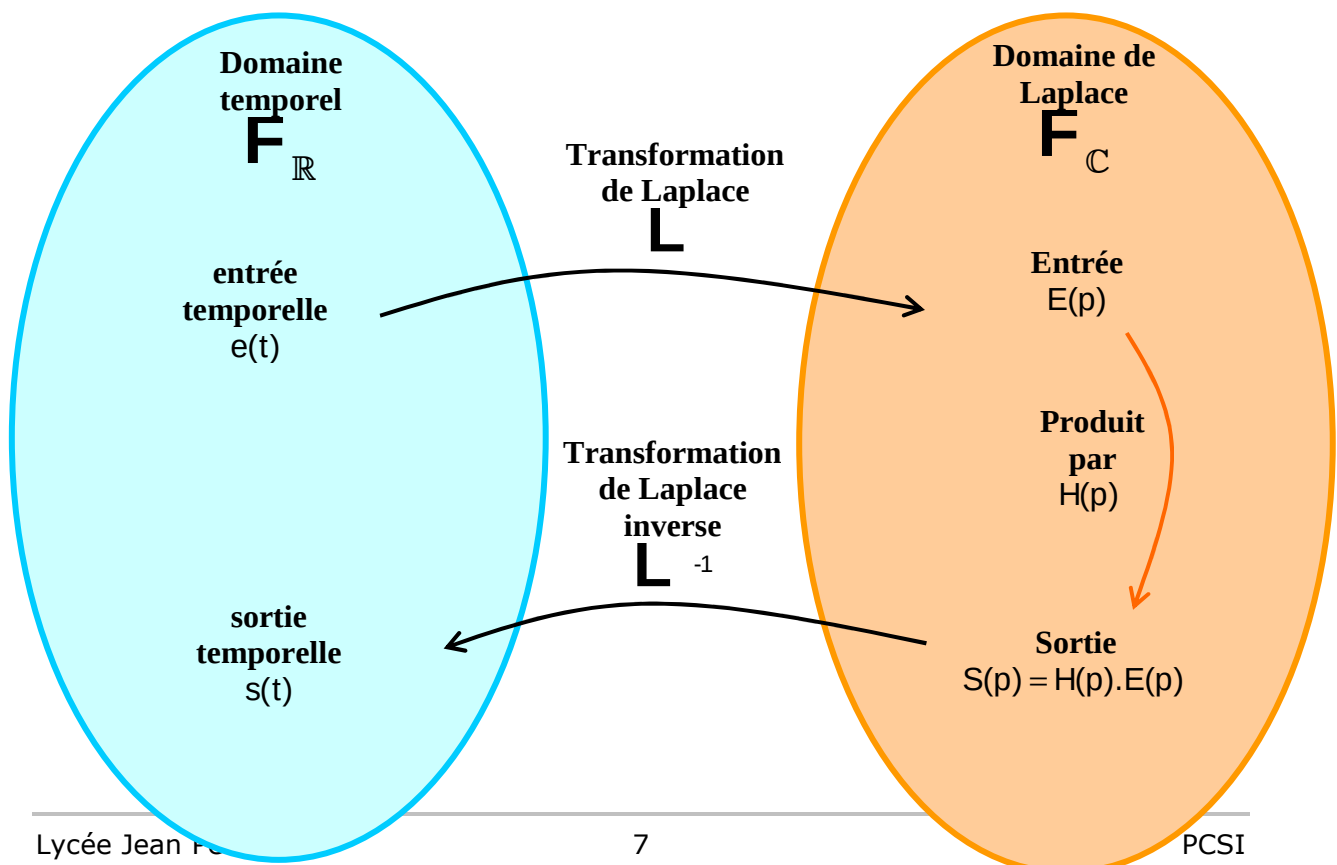
Démarche directe pour déterminer la réponse temporelle

Si on remplace $V_e(t)$ par $\lambda.u(t)$ dans l'équation (3) on obtient une équation différentielle

linéaire dont l'inconnue est la sortie, la fonction $V_s(t)$: $\lambda.u(t) = v_s + RC \frac{dv_s}{dt}$

Sa résolution est classique. Mais dans les cas de systèmes et/ou d'entrées moins simples, la résolution de l'équation différentielle devient inextricable. C'est pourquoi la méthode suivante sera privilégiée. Elle consiste à « faire un détour » par l'espace de Laplace.

Résolution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants, via la transformation de Laplace



On rappelle que la fonction de transfert d'un système est sa loi entrée-sortie dans l'espace de Laplace :

$$E(p) \rightarrow \boxed{H(p)} \rightarrow S(p)$$

Lorsque l'on connaît la fonction de transfert H , et si l'entrée est de forme mathématique simple (ce qui est le cas des « entrées-types » utilisées scolairement et dans les tests expérimentaux), les deux premières étapes sont élémentaires. Le « retour » dans l'espace temporel par $\mathcal{L}^{-1}$ est plus délicat. La méthode est détaillée ci-après.

Questions :

Question 1 : Fonction de transfert

Appliquer la transformation de Laplace à l'équation (3).

Exprimer la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{V_s(p)}{V_E(p)}.$$

Question 2 : Réponse dans l'espace de Laplace à un échelon

Exprimer la transformée de Laplace $V_E(p)$ de l'entrée, puis celle, $V_S(p)$, de la sortie.

Question 3 : Réponse temporelle à un échelon (« réponse indicielle »)

Pour « revenir » dans l'espace temporel, il faut utiliser le « dictionnaire » des transformées de Laplace de fonctions usuelles. La forme $V_S(p)$ n'y figurant pas, on lui applique une décomposition dite « en éléments simples » : on montre

qu'une fonction rationnelle de la forme $\frac{1}{p(a.p+b)}$ (4) peut toujours se mettre

sous la forme $\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{a.p+b}$ (5)

→ Mettre la sortie dans l'espace de Laplace $S(p)$ sous forme (5) en calculant les coefficients α et β en fonction des données R et C .

→ En déduire algébriquement la sortie temporelle $s(t)$ à partir de la forme (5) de $S(p)$

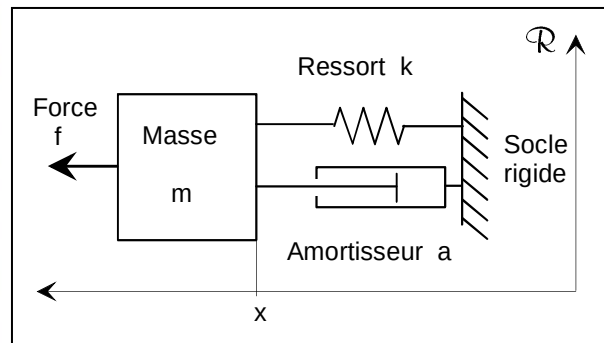
Question 4 : Analyse des résultats

→ Tracer le graphe de $s(t)$, la tangente à l'origine $t=0$, trouver la pente à $t=0$, l'abscisse t_0 de l'intersection de cette tangente à l'origine avec l'axe du temps, la valeur de $s(0)$, et celle de $s(t_0)$ exprimée en % de $s(0)$, idem pour $s(3.t_0)$, puis $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t)$.

→ Vérifier les valeurs trouvées pour $s(0)$, et pour $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t)$, en appliquant directement deux théorèmes du cours à $S(p)$.

Question 5 : Réponse temporelle à un Dirac (« réponse impulsionnelle »)

Reprendre les questions 2 à 4 pour une entrée « impulsion de Dirac » $\delta(t)$

Exercice 5 : Modélisation et étude d'une suspension de véhicule léger**Suspension de mini Quad****Modélisation**

Un socle rigide de masse infinie est lié à un repère galiléen.

Un solide de masse m est lié au socle par un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient a . La masse a pour abscisse $x(t)$ dans le repère R lié au socle. Elle est soumise à une force $f(t)$ parallèle à x . La masse M isolée en repère d'étude galiléen est soumise à :

- la force $f(t)$;
- la force $f_a(t)$, proportionnelle à la vitesse, exercée par l'amortisseur :

$$f_a(t) = -a \cdot \frac{dx(t)}{dt} ;$$
- la force $f_r(t)$ exercée par le ressort, proportionnelle à l'allongement

$$f_r(t) = -k \cdot x(t) ,$$
 en posant que l'abscisse de la masse quand le ressort est au repos, est nulle.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au solide de masse m isolé, fournit l'équation du mouvement en projection sur $\vec{x}$:

$$f(t) = k \cdot x(t) + a \frac{dx(t)}{dt} + m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad \{1\}$$

Questions :

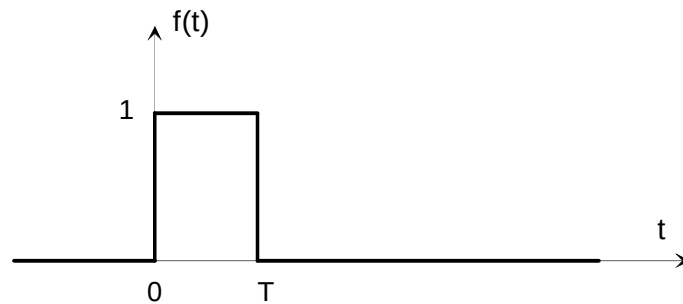
- Écrire la transformée de Laplace de l'équation du mouvement **{1}**. On suppose les conditions initiales nulles : $x(t)=0$ pour $t < 0$.
- On soumet le système à une entrée impulsionnelle $f(t) = \mu \cdot \delta(t)$; (physiquement, ce Dirac peut s'obtenir par l'envoi d'un projectile qui se plante dans la masse m et lui communique sa quantité de mouvement μ en un temps très court). Déterminer la sortie dans l'espace de Laplace $X(p)$. En déduire la sortie temporelle $x(t)$ en supposant l'amortissement a négligeable.
- Mêmes questions pour une entrée échelon $f(t) = \lambda \cdot u(t)$

(on donne le résultat : $\frac{1}{x(\alpha \cdot x^2 + \beta)} = \frac{1}{\beta} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{\alpha \cdot x}{(\alpha \cdot x^2 + \beta)} \right)$, issu du théorème de décomposition des fractions rationnelles).

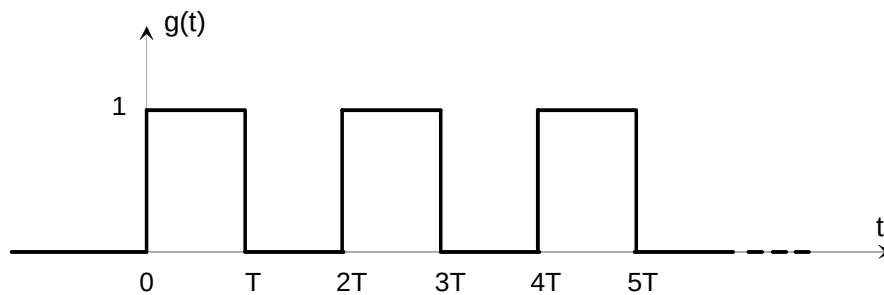
Exercice 6 : Calcul de transformée de Laplace de signaux complexes. Application aux signaux d'entrée pour la suspension de véhicule.

Déterminer la transformée de Laplace des fonctions temporelles suivantes:

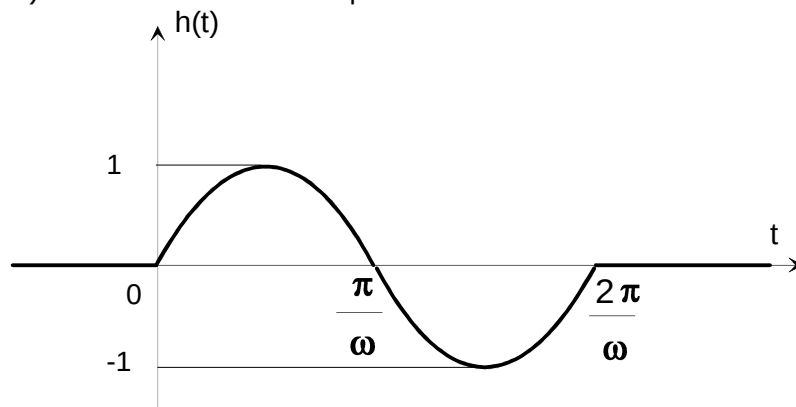
- 1) « Choc dur unique » → Impulsion de durée finie



- 2) « Chocs durs multiples » → Train d'impulsions de durée finie (on suppose que la partie réelle de p est >0 de sorte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-np} = 0$).



- 3) « Choc doux » → Une période de sinus.

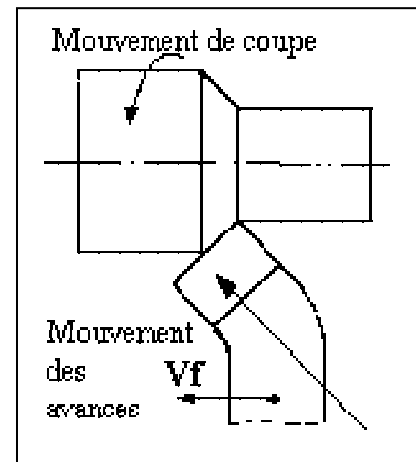


Indications :

- On exprimera ces fonctions à l'aide de fonctions élémentaires dont la transformée de Laplace est connue. Appliquer le théorème du retard.
- Utiliser s'il le faut la relation classique: $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

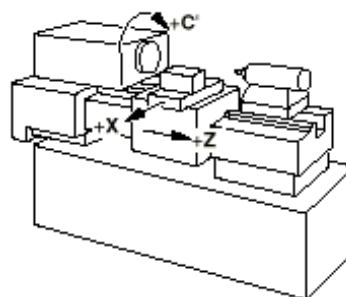
Modélisation de systèmes par schéma blocs

Exercice 7 : Etude de la broche d'un tour à commande numérique



Outil de chariotage

Le tour étudié possède 3 axes. Outre les deux axes de déplacement linéaire du chariot porte-outil : axe Z parallèle à l'axe de la broche et axe X transversal, un tour à trois axes dispose également d'un axe C angulaire, de rotation autour de l'axe de la broche. Sur ce dernier, est réalisé un asservissement de vitesse pour des opérations de tournage classiques, et un asservissement de position angulaire de la broche pour des opérations de perçage désaxées ou de fraisage avec des outils tournant montés en lieu et place d'un outil classique.



**Schématisation d'un tour
3 axes**

La modélisation retenue pour la motorisation est en première approximation celle d'un moteur à courant continu :

-équation de commande :

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \text{ avec } R \text{ et } L, \text{ résistance et inductance de l'induit.}$$

-relation de couple moteur :

$$C_m(t) = K_c \cdot i(t) \text{ avec } K_c = 1.146 \text{ Nm/A et } C_m \text{ le couple moteur}$$

-relation de force contre-électromotrice :

$$e(t) = K_e \cdot \omega_m(t) \text{ avec } K_e = 120 \text{ V/(1000tr/min)} \text{ et } \omega_m \text{ la vitesse de rotation du moteur}$$

-équation mécanique :

$$J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) \text{ avec } J_m, \text{ l'inertie de l'arbre moteur et } C_r, \text{ le couple résistant}$$

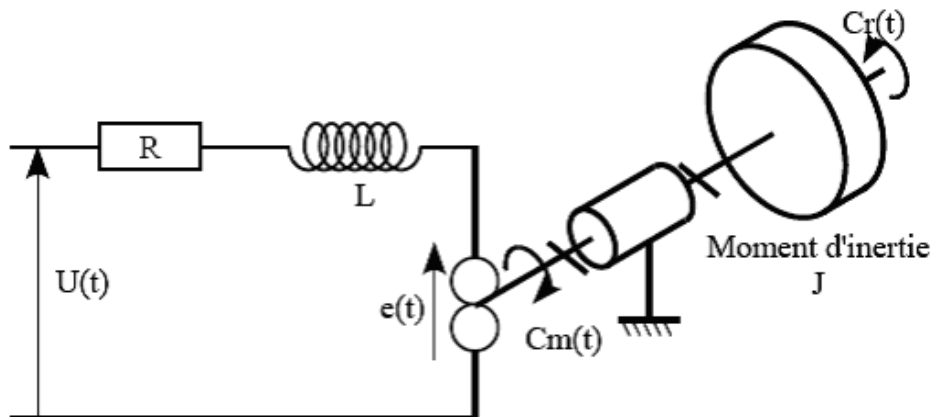


Schéma électro-mécanique

Questions :

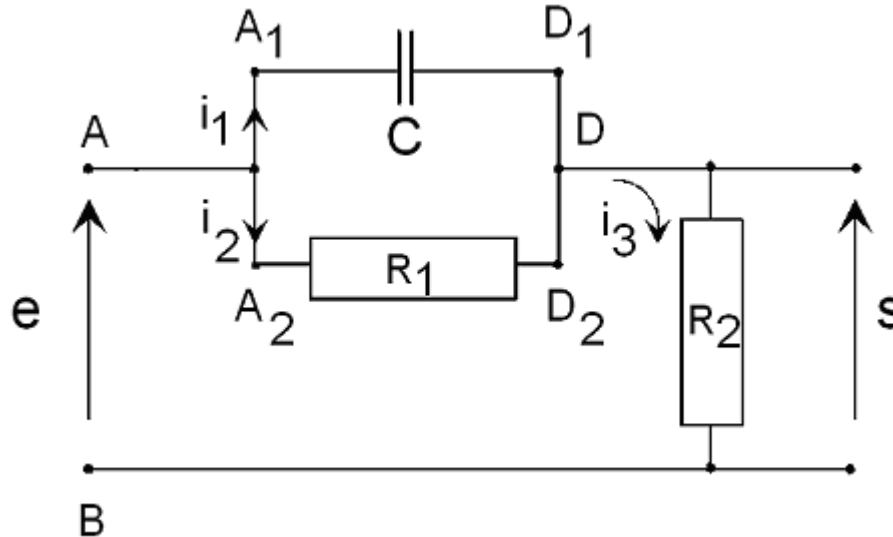
- 1) Ecrire le schéma bloc.
- 2) Appliquer le théorème de superposition et déterminer $F_1(p)$ et $F_2(p)$ telles que $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$.
- 3) Comparer en unités S.I. $K_c = 1.146 \text{ Nm/A}$ et $K_e = 120 \text{ V/(1000tr/min)}$.
Commentaires.

NB : aucune boucle retour d'asservissement n'a été mise en place pour l'instant ;
La boucle retour ici présente est constitutive de la modélisation intrinsèque du moteur et ici ne constitue pas une boucle retour d'asservissement. On étudiera plus précisément l'asservissement du moteur CC dans le cadre d'un TD sur le vérin électrique de la plateforme Stewart.

Exercice 8 : Modélisation et étude d'un filtre RD d'enceinte acoustique (suite)

L'objet de l'étude est le sous-système qui réalise la séparation des fréquences, le filtre. Il en existe de plusieurs sortes qui sont destinés à filtrer et orienter les composantes fréquentielles d'un signal vers les différents haut parleurs :

Cas 1 : Les grandeurs dépendantes de t sont : $e(t)$, $s(t)$, $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$.



Le circuit RC ci-dessus est régi par les équations différentielles suivantes :

$$\bullet \quad i_3 = i_1 + i_2 \quad \{2\}$$

$$\bullet \quad \frac{1}{C} \cdot \int i_1 \cdot dt - R_1 \cdot i_2 = 0 \quad \{3\}$$

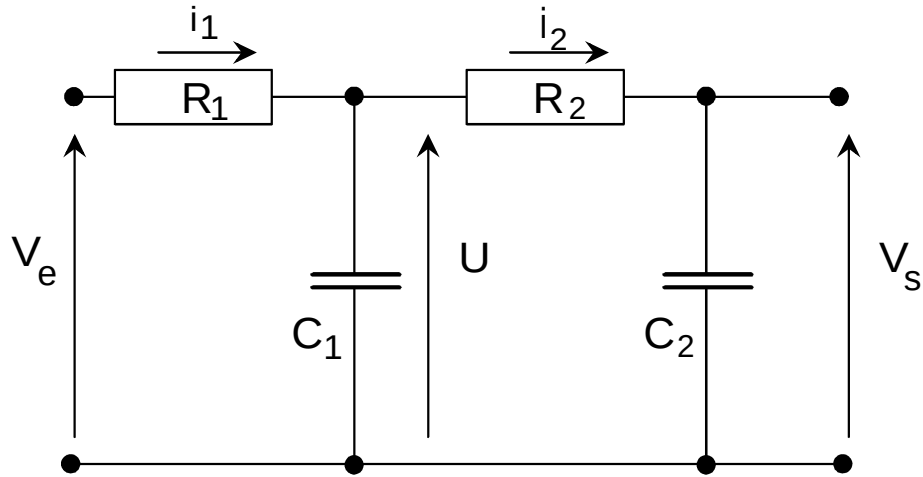
$$\bullet \quad \frac{1}{C} \cdot \int i_1 \cdot dt + R_2 \cdot (i_1 + i_2) - e = 0 \quad \{4\}$$

$$\bullet \quad s = V_D - V_B = R_2 \cdot (i_1 + i_2) \quad \{5\}$$

Questions:

- 1) Ecrire les transformées de Laplace de ces équations.
- 2) Etablir le schéma fonctionnel.
- 3) Le simplifier pour l'amener sous la forme bouclée avec retour unitaire.
- 4) En déduire la transmittance ou fonction de transfert $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ en boucle fermée .

Cas 2 : Les grandeurs dépendantes de t sont : $v_e(t)$, $v_s(t)$, $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $u(t)$.



dont les équations différentielles sont :

$$v_e - u = R_1 \cdot i_1$$

$$u - v_s = R_2 \cdot i_2$$

$$u = \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) \cdot dt$$

$$v_s = \frac{1}{C_2} \int i_2 \cdot dt$$

Questions :

- 1) Exprimer les transformées de Laplace de ces équations.
- 2) Etablir le diagramme fonctionnel qui les représente.
- 3) Simplifier ce diagramme.
- 4) En déduire la transmittance $H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)}$.

Réponses temporelles des systèmes du premier et second ordre

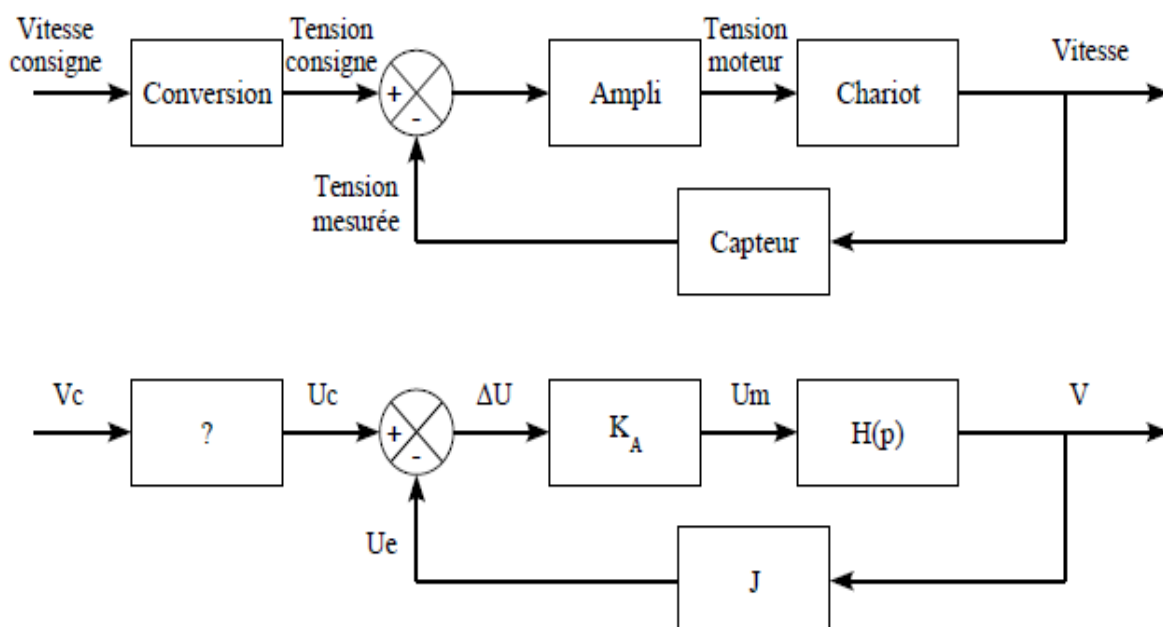
Exercice 9 : Modélisation d'une caméra de stade



Introduction

L'étude porte sur la caméra de poursuite « Speedcam » utilisée aux championnats du monde d'athlétisme pour filmer le « finish » des athlètes. La caméra est fixée sur un chariot qui se déplace sur un rail.

Un capteur optique permet de mesurer la position de la caméra par rapport au coureur. Un ordinateur détermine la consigne nécessaire pour suivre le coureur, transmise sous forme de tension de commande à l'asservissement du chariot. Le chariot est asservi en vitesse comme le montre le schéma fonctionnel suivant.



Le chariot est actionné par un moteur électrique piloté par sa tension d'entrée $u_m(t)$. Cette tension est obtenue à l'aide d'un amplificateur fournissant une tension $u_m(t)$ proportionnelle à la tension de commande Δu (gain $K_A = 500$). Un capteur de vitesse mesure la vitesse $v(t)$ et renvoie une information de tension $u_e(t)$ proportionnelle à la vitesse v (gain $J = 0,3 \text{ V.s/m}$).

- 1) Déterminer la fonction à mettre dans le convertisseur (« ? ») pour que V soit asservi sur V_c (donc pour que V puisse être comparé à V_c).

Modélisation du comportement du chariot

Le chariot motorisé étant relativement complexe, il est impossible de donner a priori un modèle de comportement $H(p)$ comme pour le capteur de vitesse ou l'amplificateur. Afin de modéliser son comportement, on choisit de faire une mesure et de proposer un modèle simple représentatif. La courbe page 2 montre la réponse obtenue par le capteur de vitesse lorsqu'un échelon de tension $u_m(t) = U_0.u(t)$ (avec $U_0 = 70$ V) est appliqué en entrée.

On choisit un modèle simple du premier ordre pour identifier le comportement du chariot, soit $H(p) = \frac{K_c}{(1+\tau p)}$, où K_c et τ sont à déterminer à l'aide de la courbe.

- 2) Justifier le choix d'un modèle du premier ordre.
- 3) Déterminer K_c et τ à l'aide la courbe. Proposer trois méthodes pour la détermination de τ . Si ces méthodes mènent à deux valeurs différentes, prendre pour τ une valeur moyenne.

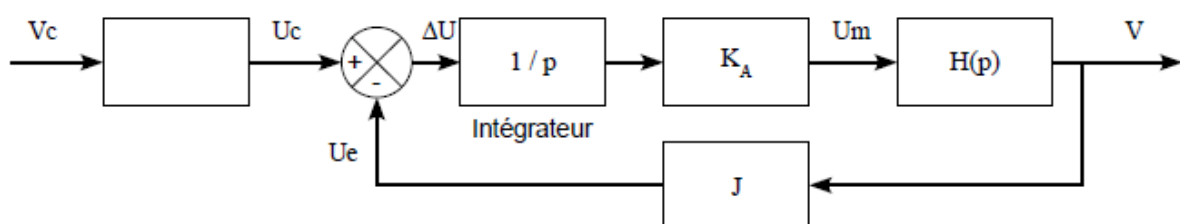
Étude des performances du système en boucle fermée

On cherche maintenant à caractériser les performances du système asservi (la rapidité et la précision).

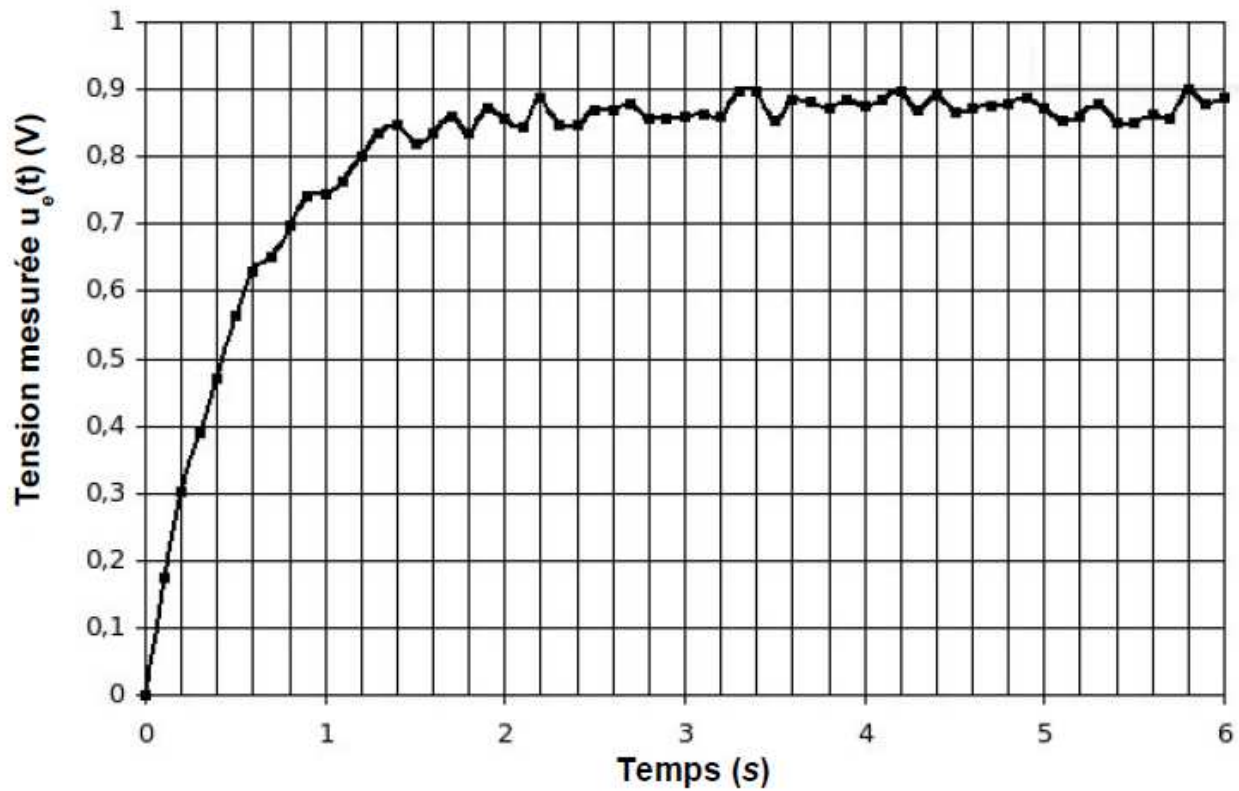
- 4) Calculer la fonction de transfert $H_T(p) = \frac{V(p)}{V_c(p)}$ du chariot asservi. Déterminer les caractéristiques de cette fonction de transfert.
- 5) En calculant la valeur à convergence de $v(t)$ suite à une entrée en échelon $v_c(t) = u(t)$, déterminer si le système est précis. Comment augmenter cette précision ?
- 6) Déterminer la rapidité du système. Comment augmenter la rapidité ? Quelle sera la conséquence sur la précision ?

Amélioration de la précision

Une méthode classique pour augmenter la précision est d'ajouter un intégrateur $\frac{1}{p}$ dans la chaîne directe (voir figure ci dessous). Cet ajout est facile en amont de l'amplificateur. On désigne par « correcteur » cet élément rajouté, destiné à améliorer le comportement de l'asservissement.



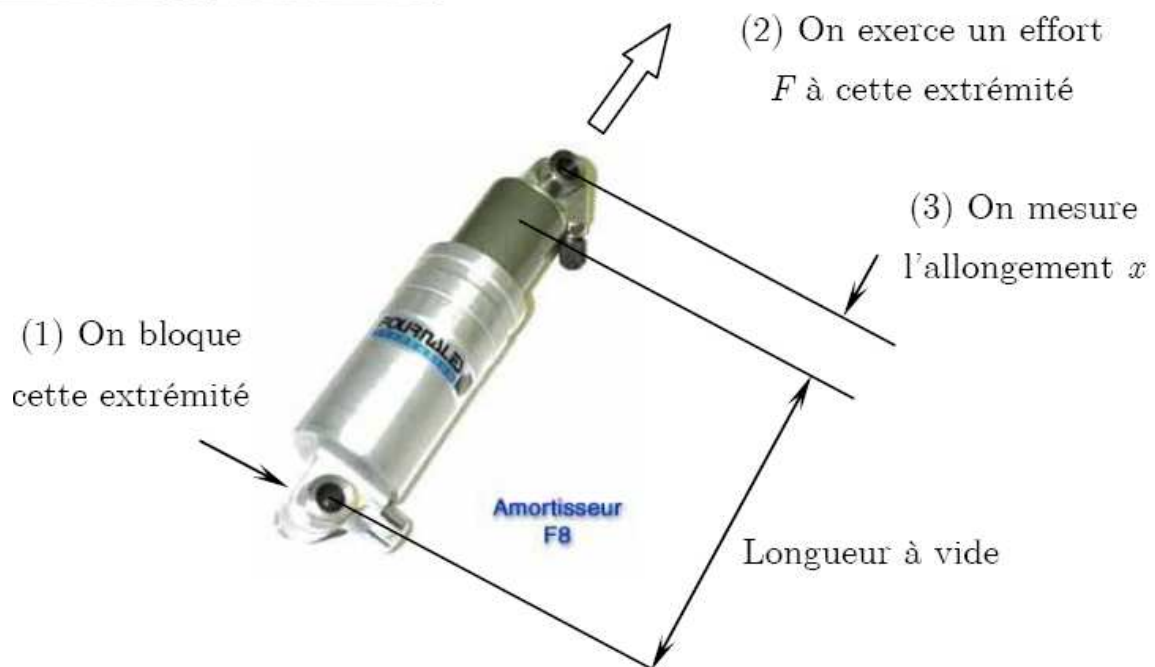
- 7) Calculer la fonction de transfert $H_c(p) = \frac{V(p)}{V_e(p)}$ du chariot asservi avec correcteur.
- 8) Déterminer les caractéristiques de cette fonction de transfert.
- 9) Déterminer le temps de réponse à 5% du système.
- 10) Le système est-il précis ?



Exercice 10 : Etude de la dynamique d'une suspension de vélo

Un « vélo tous terrain » de compétition doit être optimisé pour chaque champion : les différentes pièces qui le composent doivent donc être déterminées, placées et réglées de façon à aboutir à un tel résultat.

Des tests « en situation d'usage » se révélant souvent longs et difficiles, la simulation informatique permet d'obtenir rapidement un début d'optimisation cohérent (des tests seront cependant nécessaires pour affiner les choix techniques : l'informatique ne remplacera jamais la validation par l'utilisateur !). Afin de pouvoir simuler le fonctionnement global du système, il est nécessaire de connaître la loi de fonctionnement de tous les éléments qui le composent : celles-ci sont alors placées sur un banc de test et l'observation des courbes obtenues par mesure permet d'en déduire, par identification, le modèle de fonctionnement. On s'intéresse maintenant à un élément particulier d'un tel vélo : la suspension oléopneumatique, donc composée d'un ressort et d'un vérin amortisseur en deux parties avec d'un côté de l'huile et de l'autre de l'air.



L'entrée de ce système est la variation d'effort $f(t)$ appliqué par rapport à un effort nominal sur une extrémité de cette suspension et la sortie est la variation d'allongement $x(t)$ de la suspension par rapport à une position de référence. Le modèle classique du 2^{ème} ordre pour les oscillateurs amortis en mécanique sera utilisé dans le cadre de cette étude.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad \text{où :}$$

- $E(p)$ et $S(p)$ sont les transformées de Laplace de l'entrée $e(t)$ et de la sortie $s(t)$ (ici $e(t) = f(t)$ et $s(t) = x(t)$)
- K est le gain statique (unité : $[K] = [s]/[e]$)
- ω_0 est la pulsation propre du système non amorti (unité : $[\omega_0] = \text{rad/s}$)
- ξ est le coefficient d'amortissement (unité : $[\xi] = \text{sans unité}$)

Pour déterminer les valeurs de K , ω_0 et ξ , on procède comme suit :

On applique au système une force de 100N et on mesure un allongement de 3cm en régime permanent.

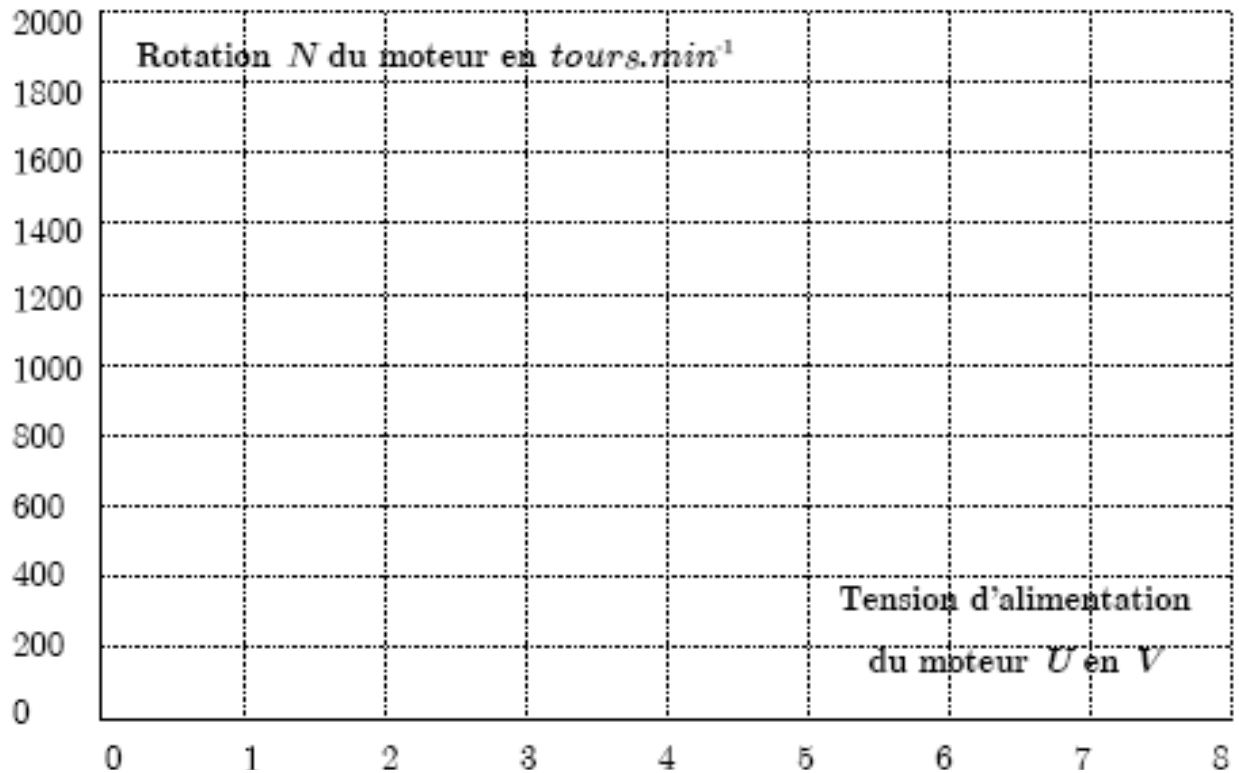
On enlève ensuite brutalement cet effort : on observe alors des oscillations en sortie : le premier dépassement est de 10% et la période des oscillations est d'environ de 3s.

Questions :

1. A quel type de réponse correspond cet essai qualifié d'essai de lâcher ?
2. Dessiner l'allure de la réponse du système lors de la suppression de l'action mécanique en extrémité.
3. Donner l'expression analytique de la réponse dans ce cas.
4. Donner l'expression de la fonction de transfert du système en unités SI.
5. Quel est l'instant du premier dépassement ? Quel est le temps de réponse à 5% de la réponse indicielle ?
6. Un choc peut être assimilé à une impulsion de Dirac d'amplitude A_0 sur la suspension : donner l'expression analytique de la réponse dans ce cas et dessiner l'allure de l'évolution de l'allongement du vérin après l'application de ce choc.

Exercice 11 : Analyse d'un système non linéaire et linéarisation locales

L'essai en régime permanent, d'un moteur de l'axe d'un robot, a donné la courbe suivante :



$U \text{ (V)}$	$N \text{ (tours.min}^{-1}\text{)}$
0	0
1	0
2	198
3	595
3,5	800
4	1000
5	1410
6	1600
7	1800
8	1910

le tableau de valeurs ci-dessus a été établi de la manière suivante : par exemple, pour obtenir la 5^{ème} mesure, on a alimenté le moteur sous une tension de 3.5V et on a mesuré la vitesse atteinte en régime permanent (ici 800 trs/min), donc obtenue au bout d'un temps suffisamment long pour qu'on puisse considérer que les évolutions sont terminées et que la vitesse est stabilisée.

1. Placer sur ce graphe les différents points de fonctionnement indiqués dans le tableau ci-dessus.

On voit donc que, visiblement, ce système n'est pas linéaire. On peut cependant le rendre linéaire localement (au voisinage d'un point de fonctionnement) en prenant la tangente locale : le gain statique correspond à la pente du modèle linéaire au voisinage du point considéré. On considère les deux points de fonctionnement :

M₀ (3.5V-800 trs/min)

M₁ (6V-1600 trs/min)

2. Evaluer le gain statique en trs/min/V pour les deux points considérés (ces deux gains statiques seront notés K₀ en M₀ et K₁ en M₁)
3. quelle plage de linéarité peut on raisonnablement prendre autour de M₀ ? et autour de M₁ ?

Le moteur est alimenté sous 3.5V depuis un long moment. On augmente alors brusquement la tension jusqu'à 5V et on attend que la vitesse du moteur se stabilise : on la mesure alors.

4. Comparer la variation de vitesse donnée par la mesure avec celle donnée par le modèle linéaire (en % de la valeur réelle)
5. Effectuer la même comparaison pour une diminution de la tension à 2V.
6. Effectuer les mêmes calculs (variation de +/- 1.5V) pour le point M₁ et conclure.

Remarque : si des valeurs sont manquantes, les évaluer par une moyenne locale

Utilisation du modèle linéaire local pour la recherche d'une réponse temporelle

On se place maintenant au niveau du point de repos M₀ et on utilise le modèle linéarisé. On modélise alors le fonctionnement du moteur par un système linéaire du premier ordre :

$$T \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K_0 e(t)$$

où, T est la constante (T=0.3s)

$s(t) = \Delta N(t) = N(t) - N_0$, la variation de vitesse par rapport à la vitesse N₀ au point M₀

$e(t) = \Delta U(t) = U(t) - U_0$, la variation de tension par rapport à la tension U₀ au point M₀ correspondant à M₀.

Ce changement de variable permet de travailler avec des conditions initiales nulles.

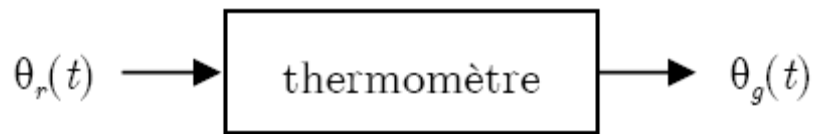
7. Brusquement, à l'instant t=0, on augmente la tension de 1.5V, soit jusqu'à 5V.

-Déterminer l'expression de s(t) et N(t) et représenter leur courbe . Quelle est la vitesse atteinte en régime permanent ?

-Au bout de combien de temps la variation de la vitesse du moteur sera-t-elle à 95% de la variation obtenue en régime permanent ? Le cahier des charges impose une durée T_{95%} inférieure à une seconde, le moteur utilisé est-il convenable ?

Exercice 12 : Etude de la dynamique d'un thermomètre

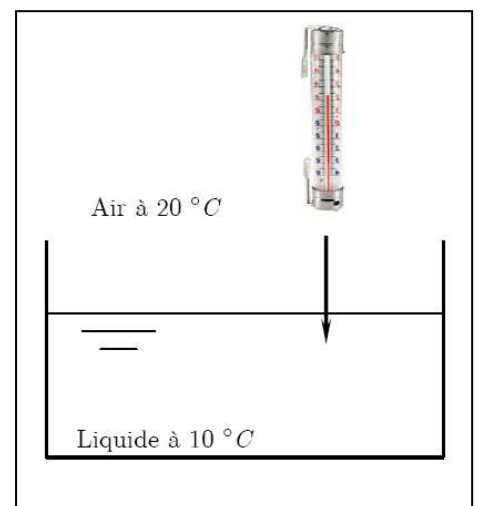
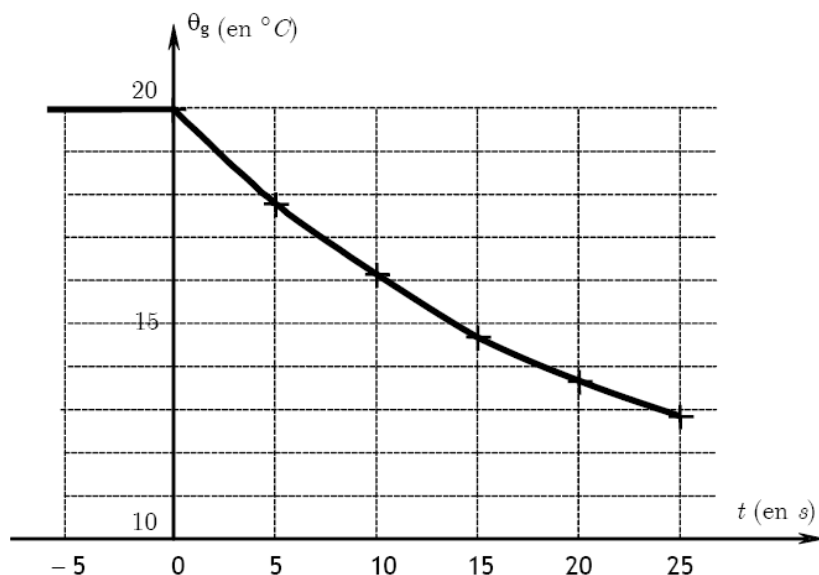
Un thermomètre à mercure est un système supposé linéaire qui relie la température $\theta_r(t)$, à la graduation $\theta_g(t)$, gravée sur le thermomètre. La figure ci-contre donne le schéma fonctionnel.



On note $\Theta_r(p) = L[\theta_r(p)]$ et $\Theta_g(p) = L[\theta_g(p)]$.

Le thermomètre, initialement à 20°C (son point de repos), est brusquement plongé dans un bain à 10°C. On lit les résultats donnés dans le tableau ci-dessous et on peut ensuite dessiner la courbe proposée.

$t \text{ (s)}$	0	5	10	15	20	25
$\theta_g \text{ (}^\circ\text{C)}$	20	17,8	16,1	14,7	13,7	12,9



1. Quelles sont les conditions initiales de ce problème?
2. A quel signal d'entrée par rapport à zéro, le système est-il soumis ? Ecrire l'expression de ce signal d'entrée.
3. Si on souhaite un système précis, que devra être la température finale affichée par le thermomètre ?

Au vu de la forme de la courbe précédente, on peut supposer qu'un modèle de fonctionnement du premier ordre est cohérent pour l'étude du thermomètre.

On rappelle la forme canonique d'un premier ordre :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\Theta_g(p)}{\Theta_r(p)} = \frac{K}{1 + Tp} \quad \text{où :}$$

- $E(p)$ et $S(p)$ sont les transformées de Laplace de l'entrée $e(t)$ et de la sortie $s(t)$;
 $e(t) = \theta_r(t)$ et $s(t) = \theta_g(t)$
- K est le gain statique (unité : $[K] = [s] / [e]$)
- T est la constante de temps (unité : $[T] = s$)

4. Déterminer l'expression analytique de $\theta_g(t)$ au cours de cette expérience en utilisant la méthode de résolution de la transformée de Laplace. Attention les conditions initiales sont non nulles.
5. En déduire la fonction de transfert en précisant les valeurs et unité du gain statique K et de la constante de temps T . Au bout de combien de temps, la température affichée sera 95% de celle de la température mesurée.

Ce thermomètre est placé dans un four à la température de $\theta_0 = 20^\circ\text{C}$ et on attend la stabilisation de la colonne de mercure (qui affiche donc aussi une hauteur correspondant à 20°C). A cet instant considéré comme initial, on fait monter linéairement la température du four : l'évolution de la température est alors donnée par l'expression $\theta_r(t) = \theta_0 + \alpha t$ avec $\alpha = 0.1^\circ\text{C/s}$. On souhaite travailler dans les conditions de Heaviside (conditions initiales nulles) : le système étant linéaire, on va donc travailler avec les variations de température par rapport à la température initiale et on pose $\Delta\theta_r(t) = \theta_r(t) - \theta_0 = \alpha t$. De même, on pose $\Delta\theta_g(t)$, la variation de la température affichée par rapport à la température affichée initiale : on aura donc $\theta_g(t) = K\theta_0 + \Delta\theta_g(t)$. On suppose, ce qu'il est possible de vérifier aisément, que la fonction de transfert mise en évidence à la question 3 est encore valable lorsqu'on

travaille avec des variations : on a donc $H(p) = \frac{\Theta_g(p)}{\Theta_r(p)} = \frac{\Delta\Theta_g(p)}{\Delta\Theta_r(p)}$, avec $\Delta\Theta_r(p) = L[\Delta\theta_r(p)]$ et $\Delta\Theta_g(p) = L[\Delta\theta_g(p)]$.

6. Donner l'expression de $\Delta\Theta_r(p)$ puis celle de $\Delta\Theta_g(p)$: en déduire $\Delta\theta_g(t)$ et $\theta_g(t)$.
7. Dessiner les courbes d'évolution de $\Delta\theta_g(t)$ et $\theta_g(t)$: quelle est en régime permanent, la différence entre la température réelle à un instant donné et la température lue sur la graduation ?
8. Vérifier les résultats obtenus en utilisant les théorèmes des valeurs initiales et finales.

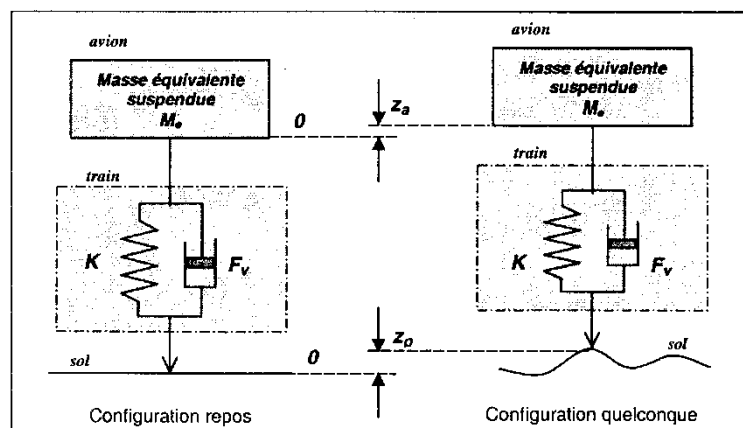
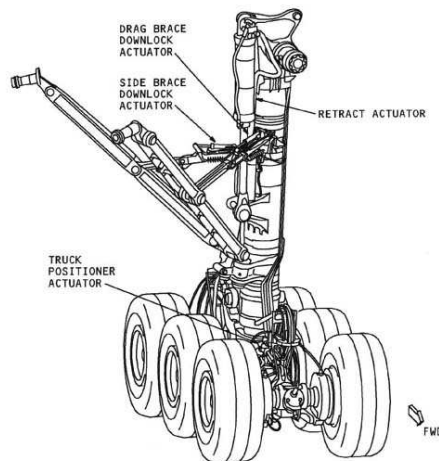
Réponses harmoniques de systèmes

Exercice 13 : Atterrisseur d'avion

Les trains d'atterrissage des aéronaves doivent assurer des fonctions variées telles que :

- Absorber l'énergie cinétique verticale de l'avion durant l'impact à l'atterrissage,
- Maintenir un contact piste/pneu malgré les irrégularités de la piste durant le roulage,
- Transmettre à la structure de l'aéronef les efforts de freinage qui sont appliqués au niveau des roues,
- Filtrer les irrégularités de la piste au roulage afin de limiter les sollicitations dynamiques imposées à la structure par le sol et d'assurer le confort des passagers,
- Supporter la masse de l'aéronef.

L'étude suivante porte uniquement sur l'aptitude de l'atterrisseur à filtrer les irrégularités de la piste au roulage et de limiter les sollicitations dynamiques imposées à la structure par le sol et d'assurer le confort des passagers.

Modélisation

Modèle simplifié de l'avion au roulage

La modélisation simplifiée de l'avion avec son amortisseur est donnée ci-dessus. A partir de cette idéalisation, on obtient la fonction de transfert suivante qui lie la hauteur z_a de

l'avion à la hauteur z_p des aspérités de la piste : $\frac{Z_a(p)}{Z_p(p)} = \frac{K + F_v p}{K + F_v p + M_e p^2}$ où Z_a et Z_p

sont respectivement les transformées de Laplace de z_a et de z_p , K est la raideur de l'atterrisseur, F_v est le coefficient de frottement visqueux de l'atterrisseur et M_e est la masse suspendue équivalente.

PARTIE 1 : analyse et estimation numérique de fonction de transfert

Q1. Mettre cette fonction de transfert sous forme canonique (à base de premier et second ordre au numérateur et au dénominateur) et donner l'expression correspondante de ses paramètres (gain statique, constante de temps τ , coefficient d'amortissement réduit ξ et pulsation propre non amortie ω_n).

La masse M_e est fixée par le cahier des charges de l'avionneur tandis que la valeur de K résulte du dimensionnement de l'amortisseur selon les normes de calcul. La valeur de F_v résulte de la taille du passage liant les chambres 1 et 2 qui est fixée par l'objectif d'amortissement optimal à l'impact.

- Q2.** Donner la valeur numérique de ces paramètres canoniques pour $M_e = 50\,000\text{ Kg}$, $K = 7 \cdot 10^6\text{ N/m}$ et $F_v = 60\,000\text{ Ns/m}$.
- Q3.** Quelle valeur de F_v aurait-il fallu pour que le coefficient d'amortissement réduit du mode complexe soit de $\xi = 0,5$?

PARTIE 2 : tracé des lieux de transfert de fonction de transfert

On considère désormais que la fonction de transfert est donnée par :

$$\frac{Z_a(p)}{Z_p(p)} = \frac{1+0,01p}{1+\frac{0,2}{10}p+\frac{p^2}{10^2}} = \frac{H1(p)}{H2(p)}.$$

- Q4.** Pour le second ordre au dénominateur, donner la valeur des coefficients de la forme canonique classique.
- Q5.** Caractériser la stabilité de cette fonction de transfert en boucle fermée.
- Q6.** Tracer en bleu sur le document réponse 1, le lieu de Bode asymptotique (gain en dB et phase en °) de la fonction de transfert $H1(p)$ en indiquant avec précision les pulsations, les valeurs et les pentes caractéristiques. Tracer en pointillé noir, le lieu réel de Bode.
- Q7.** Tracer en bleu sur le document réponse 2, le lieu de Bode asymptotique de la fonction de transfert $H2(p)$ en indiquant avec précision les pulsations, les valeurs et les pentes caractéristiques. Tracer en pointillé noir, le lieu réel de Bode. Justifier.
- Q8.** Tracer en bleu sur le document réponse 3, le lieu de Bode asymptotique de la fonction de transfert $\frac{Z_a(p)}{Z_p(p)}$ en indiquant avec précision les pulsations, les valeurs et les pentes caractéristiques. Tracer en pointillé noir, le lieu réel de Bode. Justifier.

NB : pour les Bode, vous choisirez vous-même l'échelle en ordonnée que vous indiquerez

PARTIE 3 : analyse du modèle et du comportement de l'avion

On considère toujours que la fonction de transfert est donnée par :

$$\frac{Z_a(p)}{Z_p(p)} = \frac{1+0,01p}{1+\frac{0,2}{10}p+\frac{p^2}{10^2}} = \frac{H1(p)}{H2(p)}.$$

On modélise les irrégularités (profil de bosses) de la piste par une fonction de la forme $z_p = z_{p0} \sin(cy)$ où z_{p0} est l'amplitude de ces irrégularités et où c est une constante. On considère que l'avion est animé d'une vitesse horizontale constante $\dot{y}_0$, soit $y = \dot{y}_0 t$.

- Q9.** Tracer l'allure du profil de bosses $z_p(y) = f(y) = z_{p0} \sin(cy)$ et faire apparaître sur cette courbe z_{p0} et c
- Q10.** Quelle est la relation liant z_a et z_p aux très faibles vitesses ($\dot{y}_0 \approx 0$) ? Que se passe-t-il donc physiquement sur l'avion ? Est-ce acceptable ?
- Q11.** L'avion se déplace horizontalement à la vitesse $\dot{y}_0 = \frac{\omega_n}{c}$ où ω_n est la pulsation propre non amortie du second ordre de la fonction de transfert $\frac{Z_a(p)}{Z_p(p)}$. Vérifier l'unité de $\dot{y}_0 = \frac{\omega_n}{c}$.
- Q12.** Que devient l'expression $z_p(y) = z_{p0} \sin(cy)$? Montrer qu'elle se met sous la forme $z_p(t) = z_{p0} \sin(a.t)$. Exprimer a
- Q13.** Que se passe-t-il dans cette situation ? On étayera la réponse par l'évaluation rapide du rapport d'amplitude $\frac{Z_a}{Z_p}$ à cette fréquence (la pulsation de résonance est proche de la pulsation propre non amortie). Donner une valeur pour ce rapport.

PARTIE 4 : étude du confort du passager

On considère toujours que la fonction de transfert est donnée par :

$$\frac{Z_a(p)}{Z_p(p)} = \frac{1 + 0,01p}{1 + \frac{0,2}{10}p + \frac{p^2}{10^2}} = \frac{H1(p)}{H2(p)}.$$

L'analyse du confort des passagers ou des sollicitations structurales de l'avion est conduite à partir de l'examen de la fonction de transfert liant l'accélération verticale de l'avion γ_a à la hauteur z_p des aspérités de la piste.

- Q14.** Justifier par le bon sens que l'analyse du confort des passagers, passe par l'étude de l'accélération verticale de l'avion γ_a
- Q15.** Etablir cette fonction de transfert à partir de la fonction de transfert définie ci-dessus sachant que $\gamma_a(t) = \frac{d^2 z_a(t)}{dt^2}$.
- Q16.** Tracer en bleu sur le document réponse 4, le lieu de Bode asymptotique de cette fonction de transfert $\frac{\Gamma_a(p)}{Z_p(p)}$ en indiquant avec précision les pulsations, les valeurs et les pentes caractéristiques. Tracer en pointillé noir, le lieu réel de Bode. Justifier.

- Q17.** Cette forme de fonction de transfert est-elle physiquement réaliste? Comment peut-on caractériser en réalité une fonction de transfert réaliste physiquement ?

La fonction de transfert initiale $\frac{Z_a(p)}{Z_p(p)}$ ayant été obtenue à l'aide d'un modèle théorique insuffisamment précis, nous allons par la suite effectuer une expérience afin de déterminer directement $\frac{\Gamma_a(p)}{Z_p(p)}$ par identification.

PARTIE 5 : amélioration du modèle par expérimentation et identification

- Q18.** Le lieu de Bode expérimental de cette fonction de transfert $H_{\text{exp}}(p) = \frac{\Gamma_a(p)}{Z_p(p)}$ est présenté sur la Figure 1. Identifier entièrement $H_{\text{exp}}(p)$, à partir du tracé expérimental, la fonction de transfert modélisant la réponse en accélération du système. Justifier. Tous les coefficients doivent être déterminés numériquement.
- Q19.** Analyse de performances : indiquer la pulsation pour laquelle le facteur de charge au roulage est maximum (on définit ce facteur comme le rapport $\frac{\gamma_a(t)}{g}$ avec $g=9.81 \text{ m.s}^{-2}$) Que se passe t-il si l'amplitude des aspérités de piste vaut $z_{po} = 2\text{cm}$? Conclure sur la performance.

Pour remédier à ces désagréments, on utilise aujourd'hui des suspensions actives avec des amortisseurs réglables en temps réel à coefficient variables.

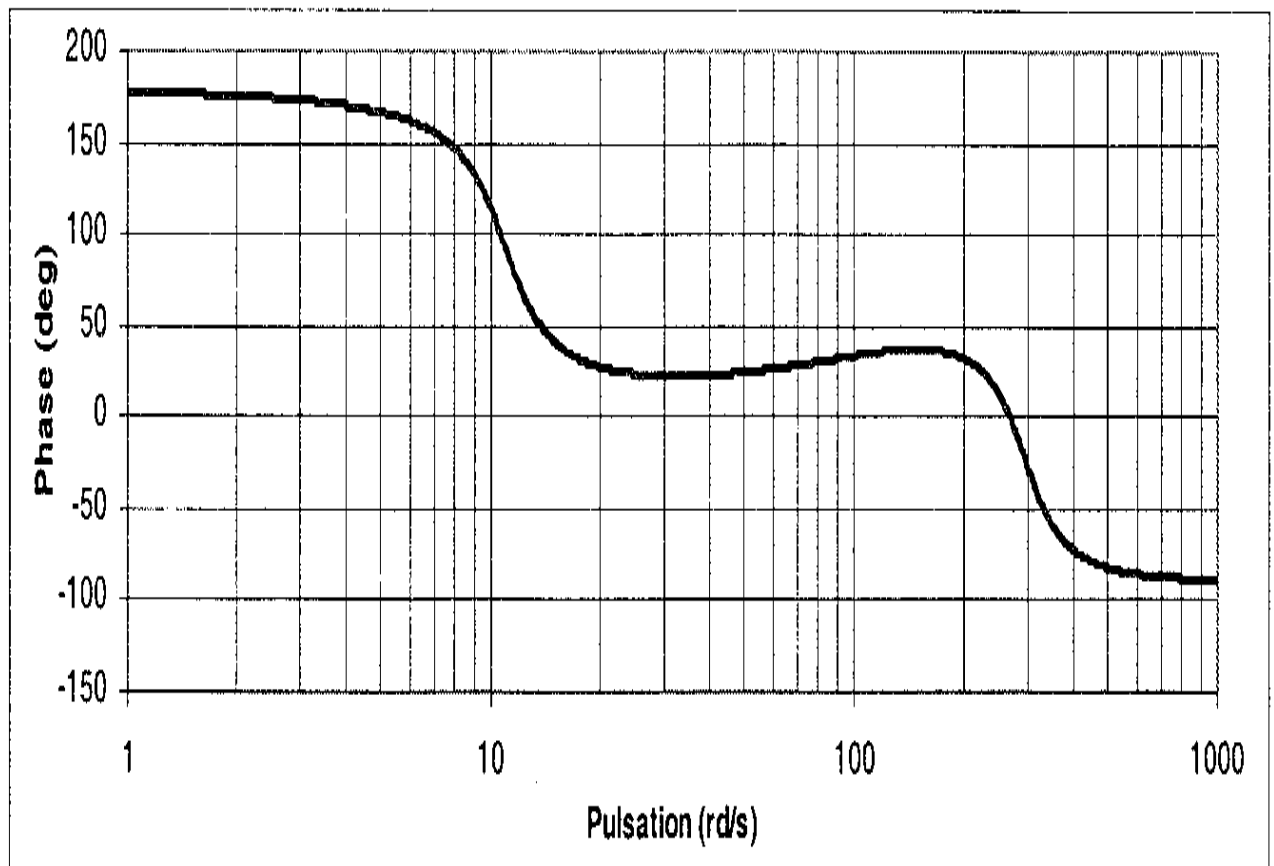
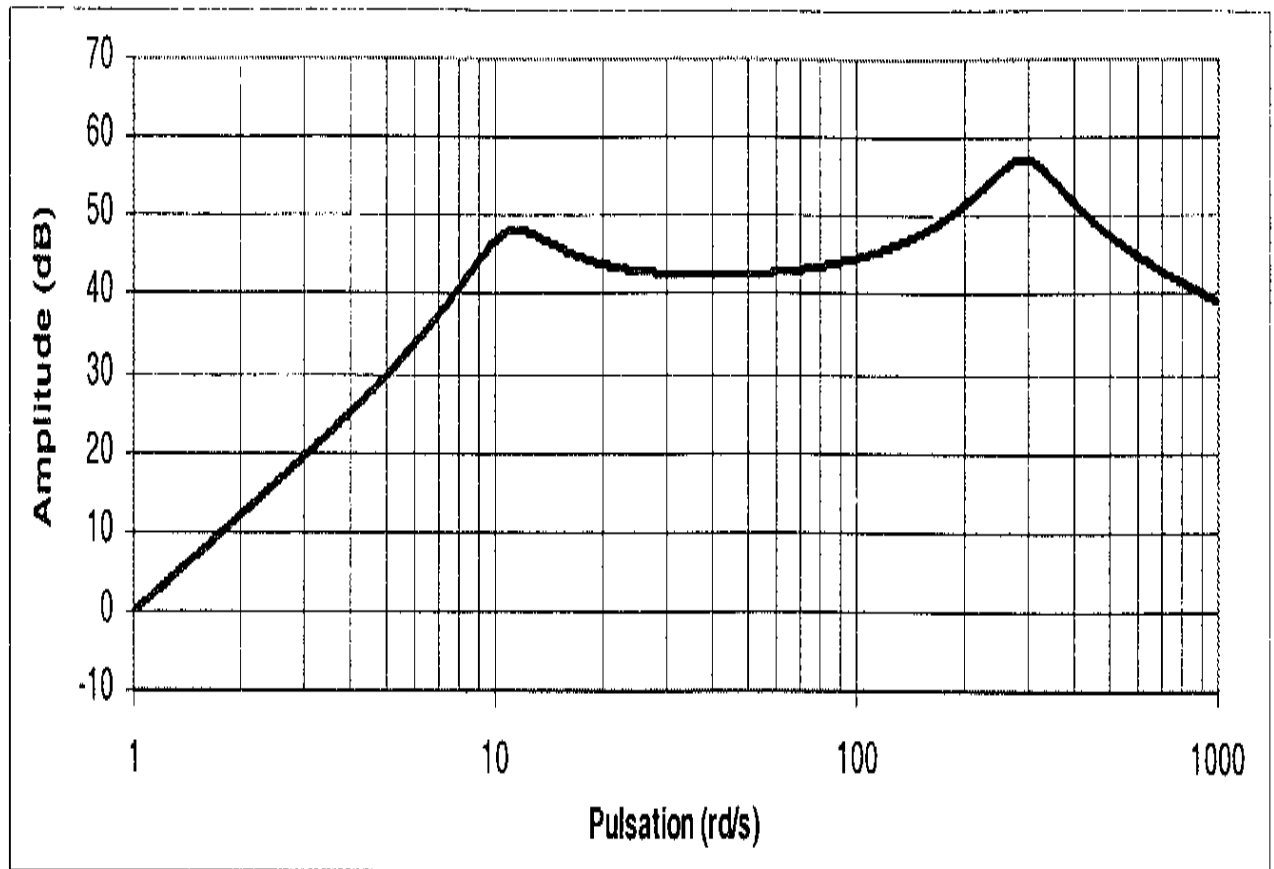
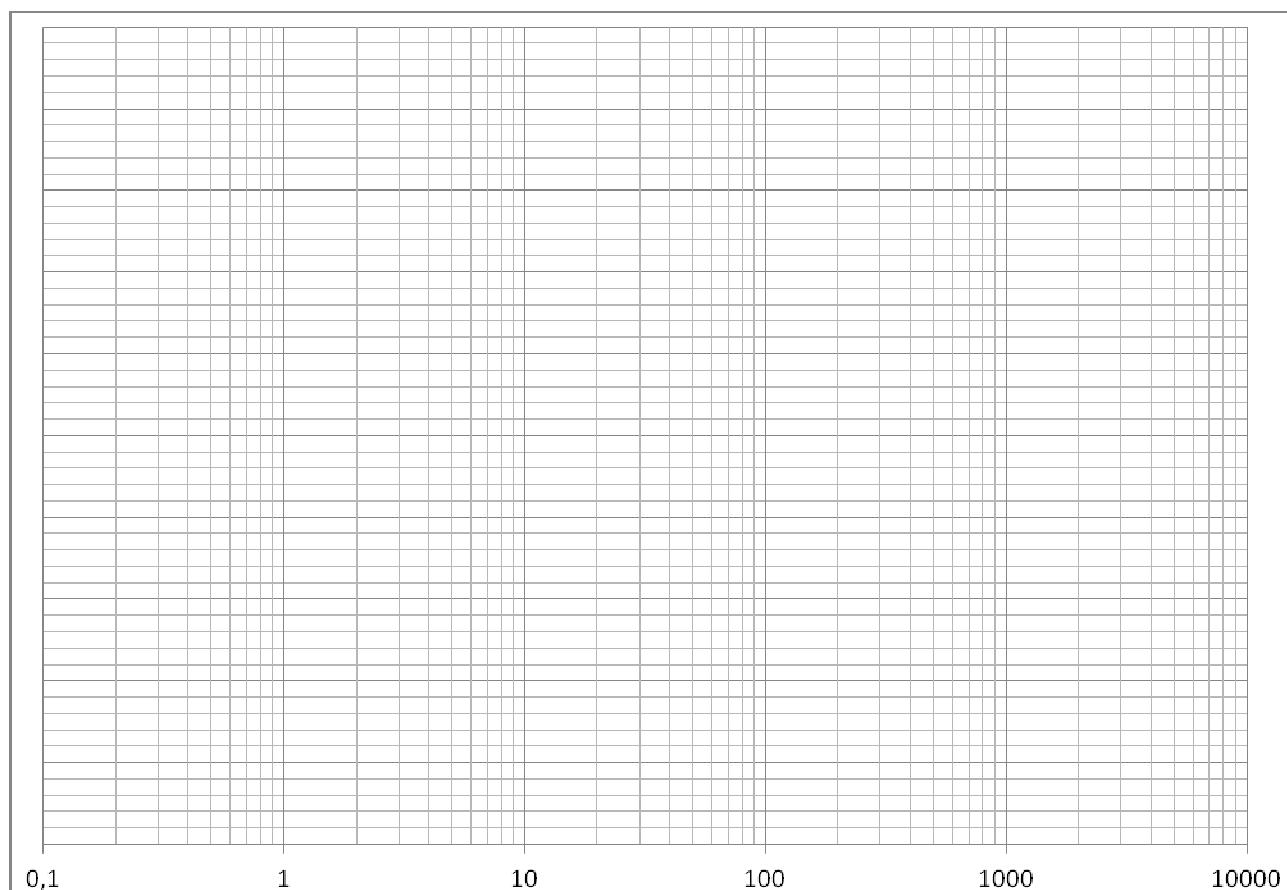
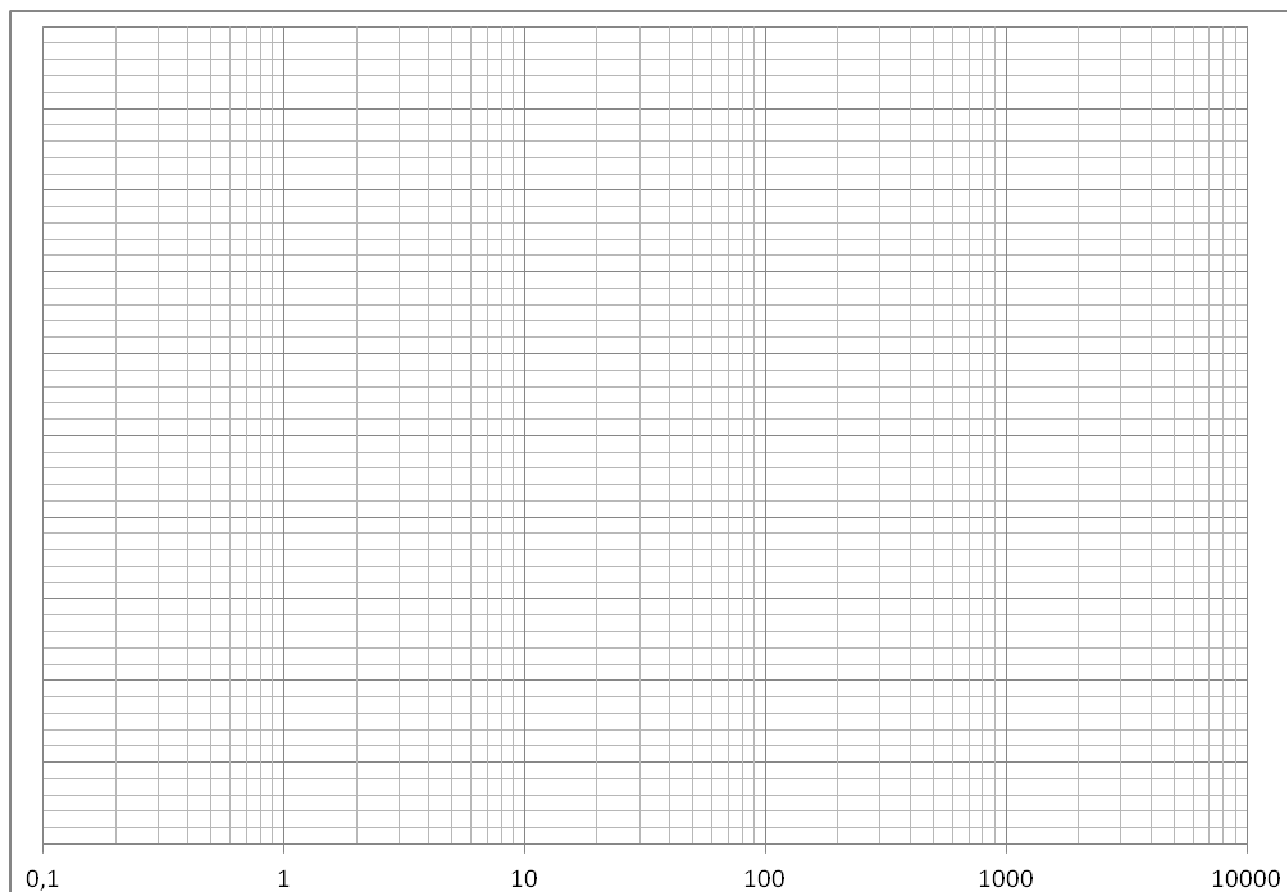
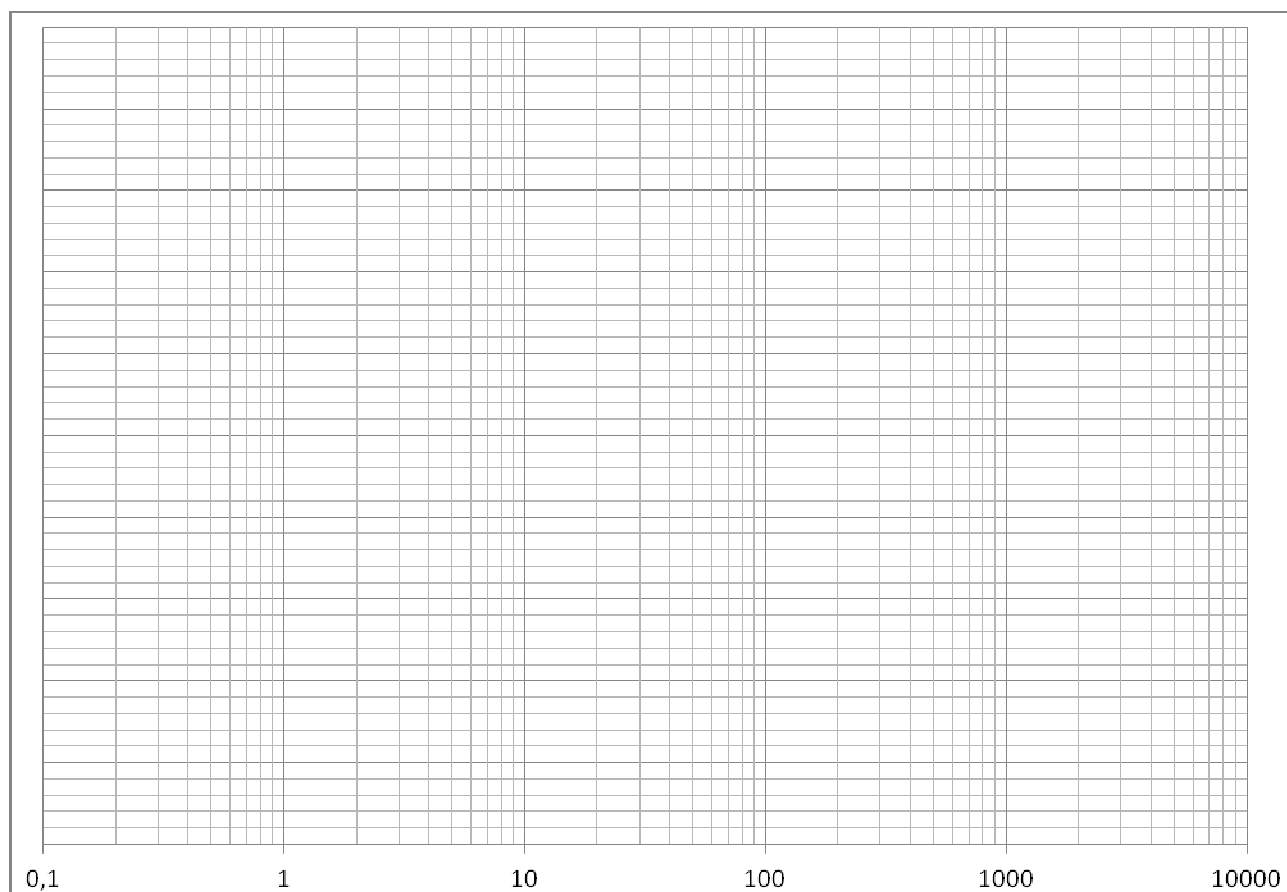
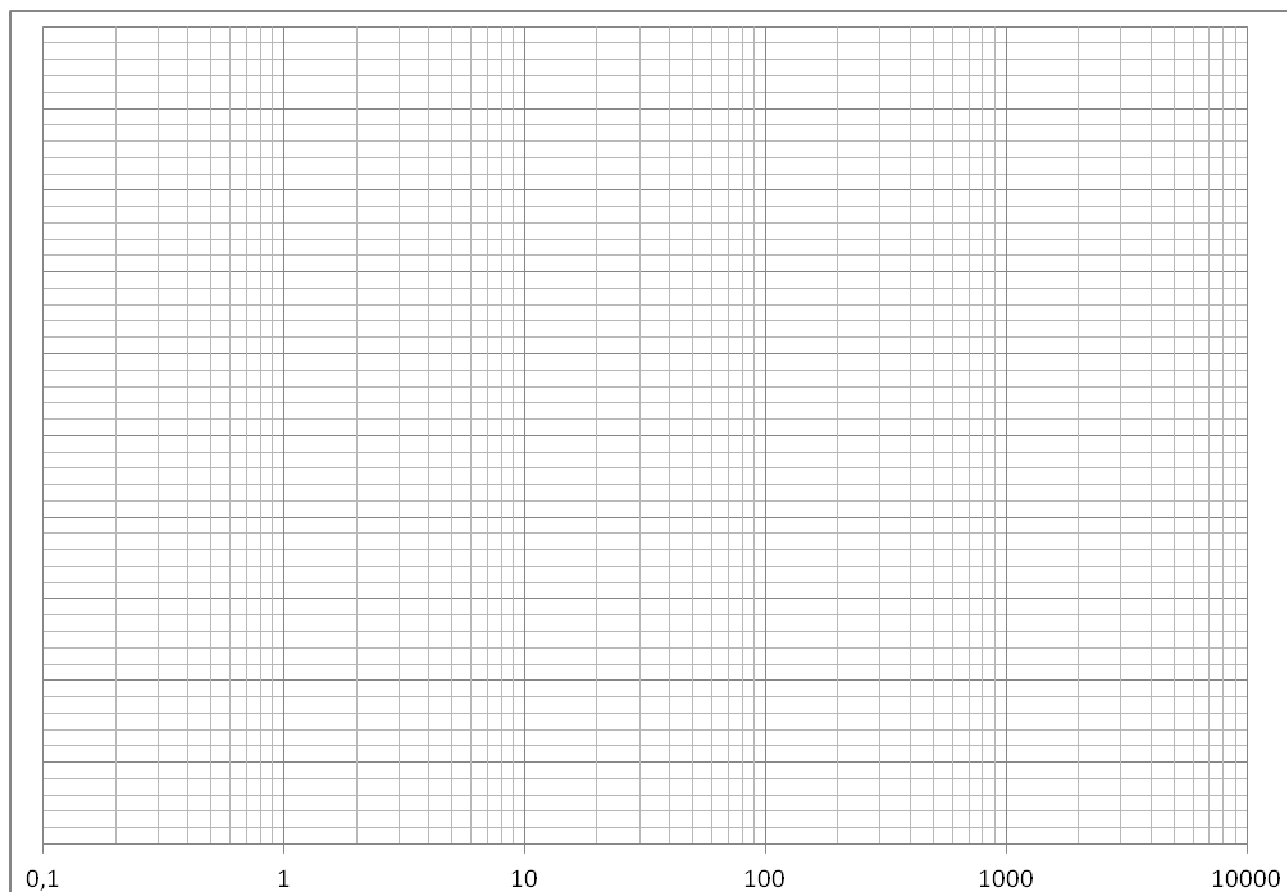


FIGURE 1

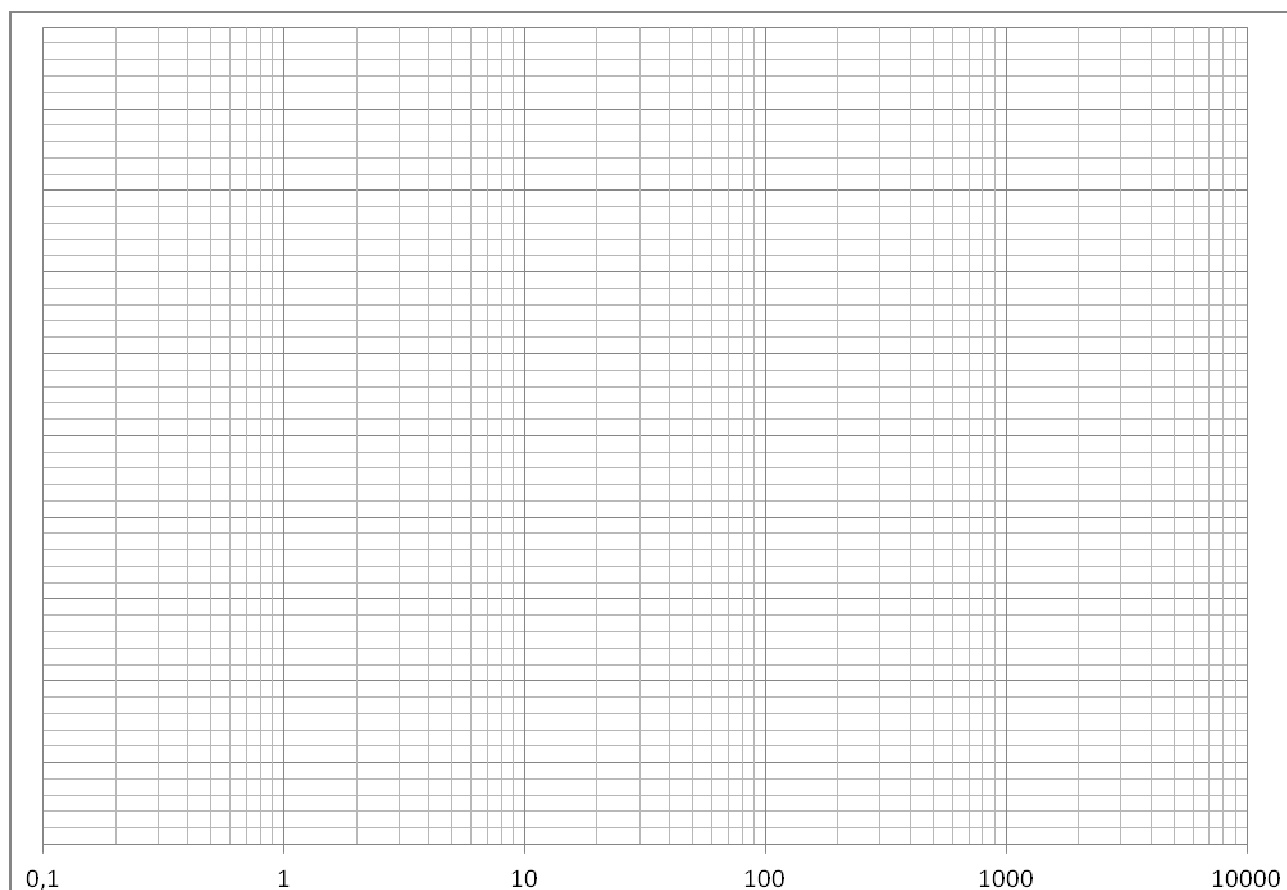
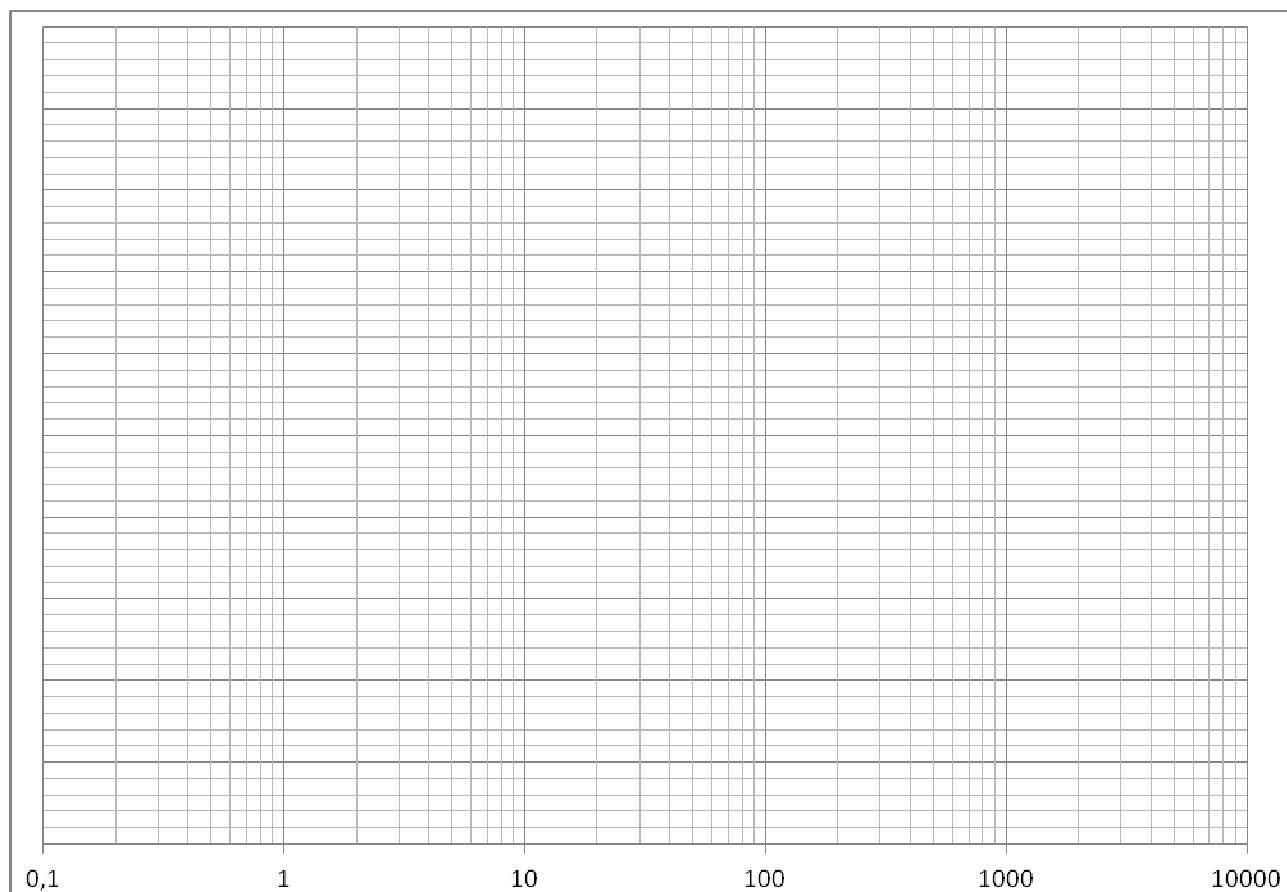
Doc réponse 1



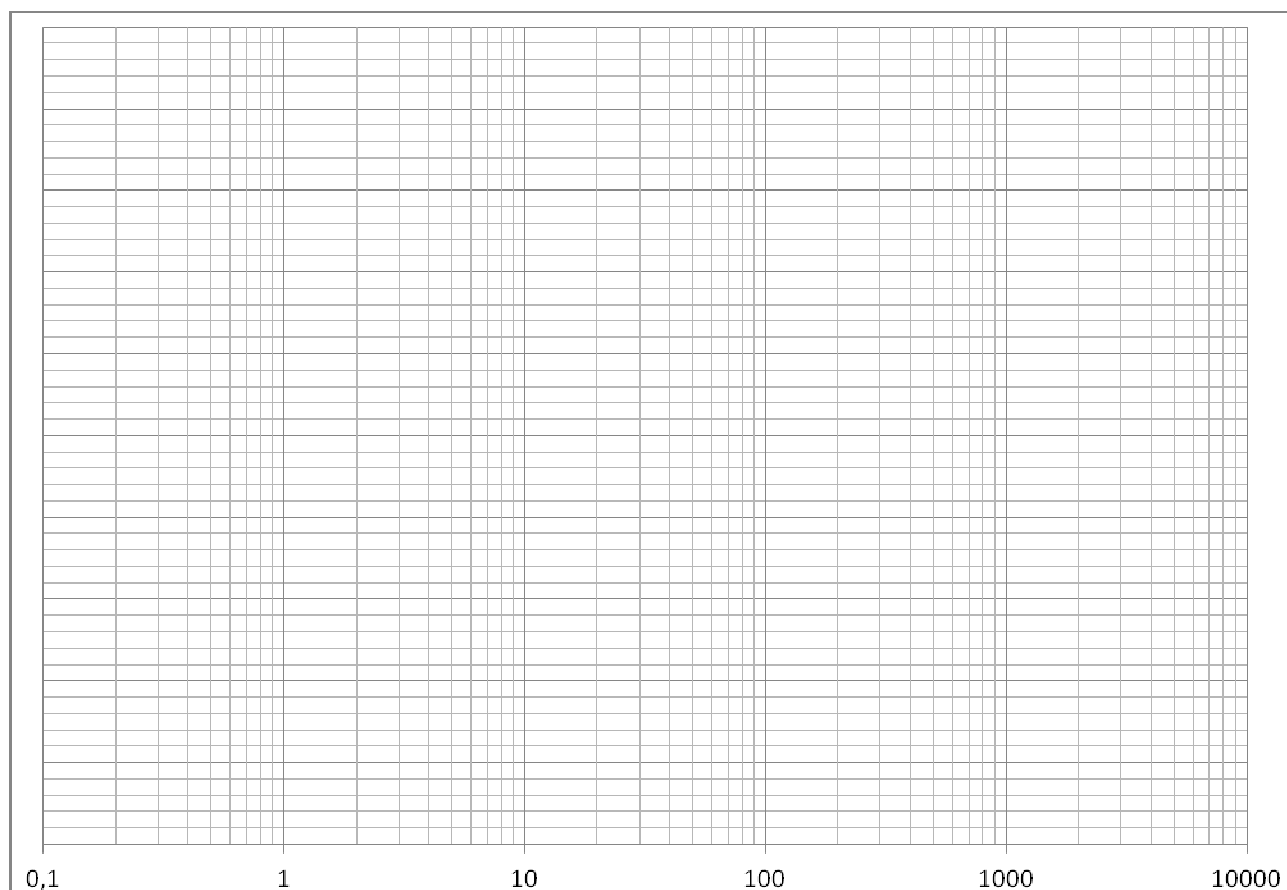
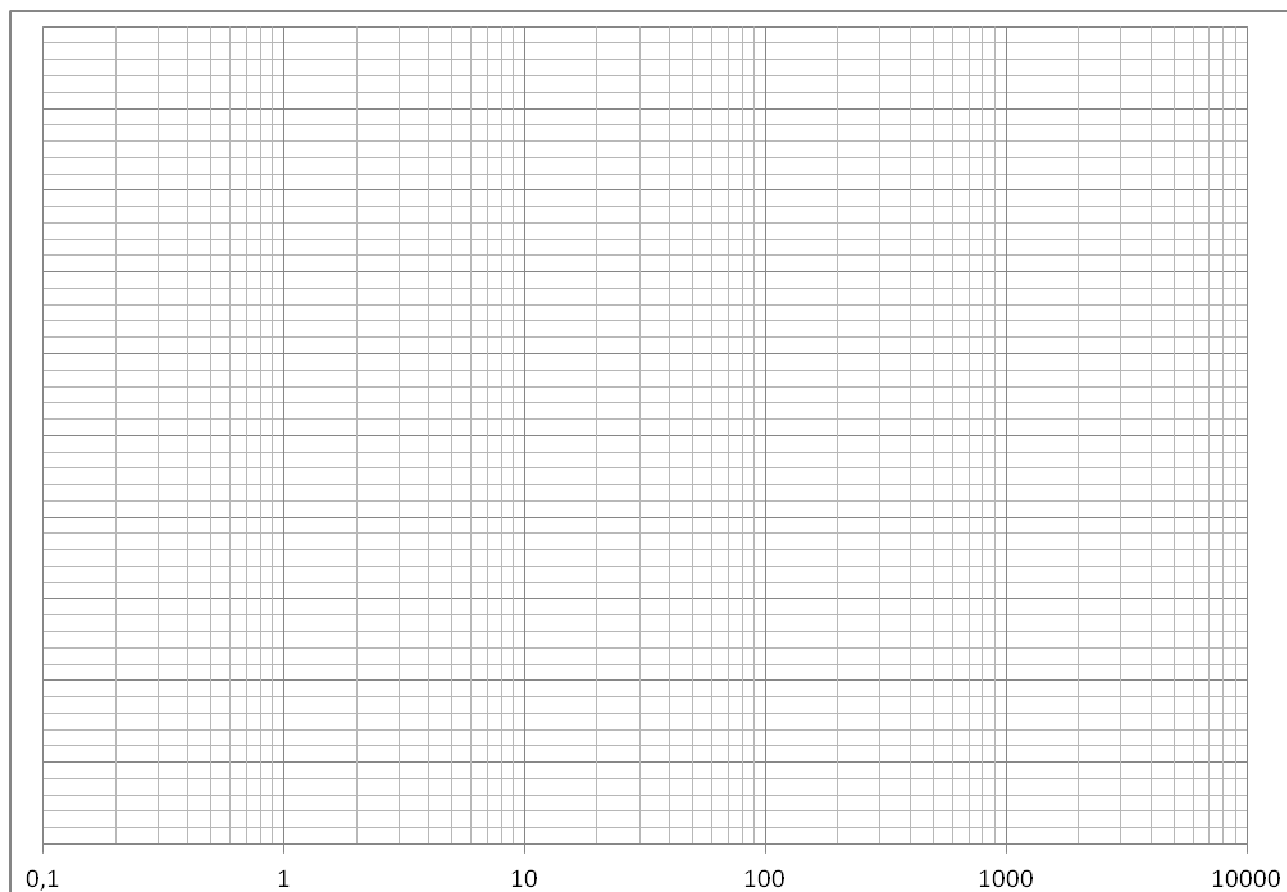
Doc réponse 2



Doc réponse 3



Doc réponse 4



Problème de concours

Exercice 14 : Modélisation et vérification des performances d'un axe de robot

L'architecture d'un robot ABB est donnée sur la figure ci-contre. On y trouve le socle, la chaise, le bras, l'avant-bras et le poignet. Différents outils peuvent être montés à son extrémité (pince, pistolet à peinture, chalumeau, etc...).

Modélisation

Nous allons étudier le mouvement de la chaise par rapport au socle (rotation d'axe vertical).

Le système est piloté par une tension de consigne U_C et assure une position angulaire θ du robot par rapport à l'axe vertical. Le système comporte un moteur à courant continu, associé à une génératrice tachymétrique qui mesure en permanence la vitesse de rotation du moteur (boucle de vitesse) et la compare à la tension U_M (cette boucle pourra être considérée comme un retour unitaire). En aval du moteur, il y a un réducteur de rapport de réduction $K_R = 1/100$. Un capteur de gain $K_C = 1V/rad$ assure la chaîne de retour en mesurant θ et fournit une tension E_θ ($E_\theta = K_C \cdot \theta$). La mesure est comparée à la consigne U_C ($U_M = \varepsilon = U_C - E_\theta$).

Un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ est placé en aval du sommateur et adapte la tension ε en une tension U_M pour élaborer une consigne de vitesse pour le moteur.

Dans un premier temps, on supposera $C(p) = K_P$ une constante (correcteur proportionnel).

Le comportement du moteur est modélisé par des équations suivantes :

Équation électrique :

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t)$$

Équation mécanique :

$$J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t)$$

où J est la valeur de l'inertie équivalente du moteur et de toutes les pièces en aval (ramenée sur l'arbre moteur).

Équations de couplage Électro-mécaniques :

$$e(t) = K_e \cdot \omega_m(t) \quad K_e, \text{ est la constante de force électromotrice.}$$

$$C_m(t) = K_t \cdot i(t) \quad K_t, \text{ est la constante de couple.}$$

Valeurs numériques :

- **R** : résistance de l'induit = 2.3 Ω
- **L** : inductance de l'induit = 1.1 mH
- **K_e** : constante de vitesse = 0.045 V.s
- **K_t** : constante de couple : 0.043 Nm/A
- **J** : inertie sur l'arbre moteur = 0,41.10⁻⁵ kg.m²

Etude du moteur seul

1. Établir le schéma-bloc du moteur seul.
2. Calculer la fonction de transfert globale **H(p)** du moteur. On remarque que la constante de temps électrique du moteur est très petite devant la constante électromécanique ($\frac{L}{R} \ll \frac{JR}{K_e K_t}$). On propose alors de négliger l'influence du pôle correspondant de la fonction de transfert. On se ramène donc à une fonction de transfert du 1^{er} ordre. Écrire cette nouvelle fonction de transfert, notée **H_s(p)**. Montrer que cette simplification dans le domaine de Laplace est justifiée dans le domaine temporel.

Afin d'assurer la fluidité des mouvements de l'ensemble du robot, on commande le moteur en vitesse selon une loi dite « en trapèze » :

- La vitesse passe d'abord de 0 à une valeur **V_M**, sous l'effet d'une accélération constante **a_M**. On note **T** la durée de cette phase d'accélération.
 - La vitesse est maintenue constante à la valeur **V_M** pendant une durée **T₂**.
 - On fait enfin diminuer la vitesse linéairement (accélération **-a_M**) jusqu'à l'arrêt de l'axe.
3. Représenter cette commande de vitesse en fonction du temps.
 4. Tracer sur ce même graphe les valeurs de l'accélération, ainsi que l'allure du déplacement angulaire du robot.
 5. Calculer **T** pour **V_M = 2 rad.s⁻¹** et **a_M = 5 rad.s⁻²**.
 6. Exprimer, en fonction de **T**, **T₂** et **V_M** l'amplitude totale du mouvement. Ce calcul pourra être mené par considérations géométriques sur le graphe de la question 3. Quelle sera la valeur de **T₂** et le temps total de mouvement pour un demi-tour du robot ?
 7. Dans l'hypothèse faite à la question 2, représenter sur un même graphe la commande en vitesse et l'allure de la réponse du moteur à cette commande. Que remarque-t-on ?

Etude de l'asservissement de position

On s'intéresse maintenant à la boucle d'asservissement décrite en introduction. Pour les questions suivantes, on considérera toutefois que **l'asservissement en vitesse n'est pas réalisé**.

8. Modifier le schéma-bloc du moteur seul pour placer la perturbation (le couple résistant C_r) à gauche du sommateur.
9. Réaliser le schéma-bloc de l'asservissement complet, en remplaçant la boucle étudiée dans la première partie par $H_s(p)$ et sans oublier d'y faire paraître le couple résistant C_r . Écrire au droit de chaque flèche la grandeur physique transmise.
10. En considérant dans un premier temps que $C_r = 0$, donner le gain statique de la fonction de transfert en boucle fermée ainsi obtenue. Conclure quant à la précision du système. Pouvaient-on s'attendre à ce résultat ?

On se place maintenant dans le cas où le couple résistant C_r est modélisé par un couple constant C_{r0} (frottement sec).

11. Quelle est l'erreur statique permanente obtenue avec le correcteur proportionnel $C(p) = K_p$?
12. Proposez un correcteur permettant d'annuler cette erreur statique.