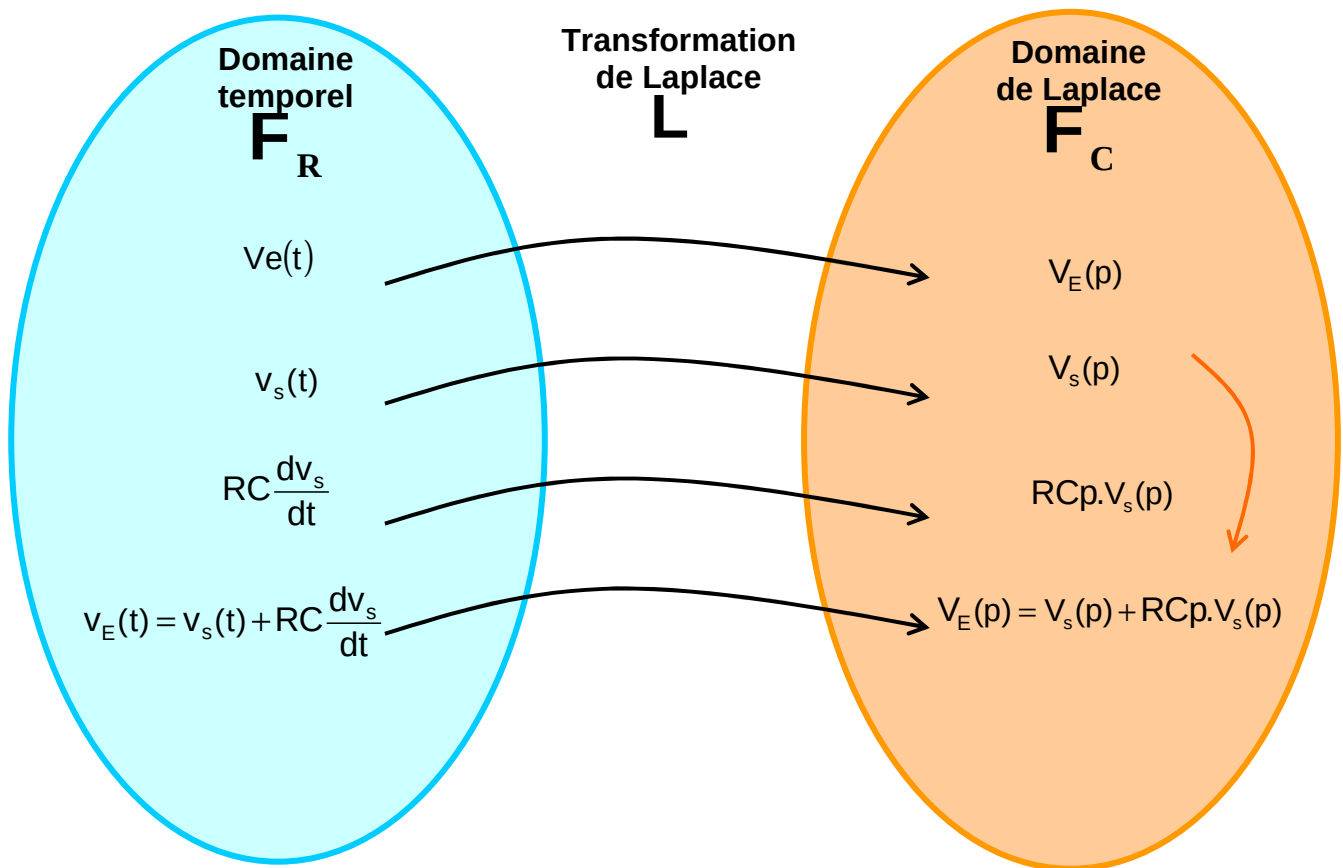


Corrigé

Question 1 : Fonction de transfert

On applique la transformation de Laplace à l'équation $V_e = V_s + RC \frac{dV_s}{dt}$:

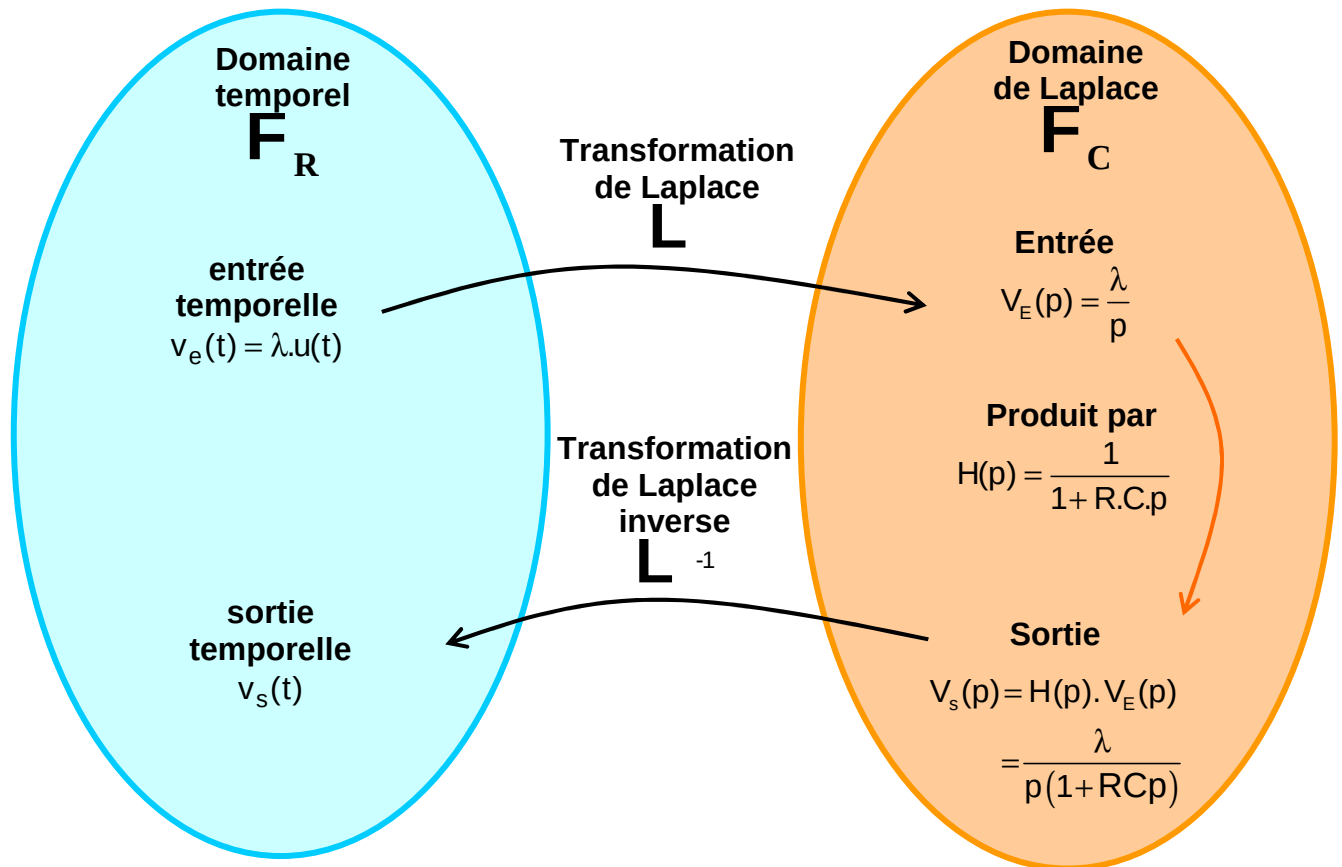


La transformée de Laplace de l'équa diff $V_E(t) = V_s(t) + RC \frac{dv_s}{dt}$ est donc $V_E(p) = V_s(p) + RCp.V_s(p)$

En factorisant cette dernière équation, on obtient la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{V_s(p)}{V_E(p)} = \frac{1}{1 + R.C.p}$$

Question 2 : Réponse dans l'espace de Laplace à un échelon



L'expression de la sortie dans l'espace de Laplace est donc

$$V_s(p) = \frac{\lambda}{p(1 + R.C.p)}$$

On cherche les coefs α et β tels que, pour tout p , on ait

$$\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{a.p + b} = \frac{1}{p.(a.p + b)} \quad (6)$$

En mettant au même dénominateur et en factorisant, on obtient :

$$\forall p, \frac{(\alpha.a + \beta).p + \alpha.b}{p.(a.p + b)} = \frac{1}{p.(a.p + b)} \text{ d'où } \alpha.a + \beta = 0 \text{ et } \alpha.b = 1$$

et donc $\alpha = 1/b$ et $\beta = -a/b$ (7). On vérifie ces valeurs.

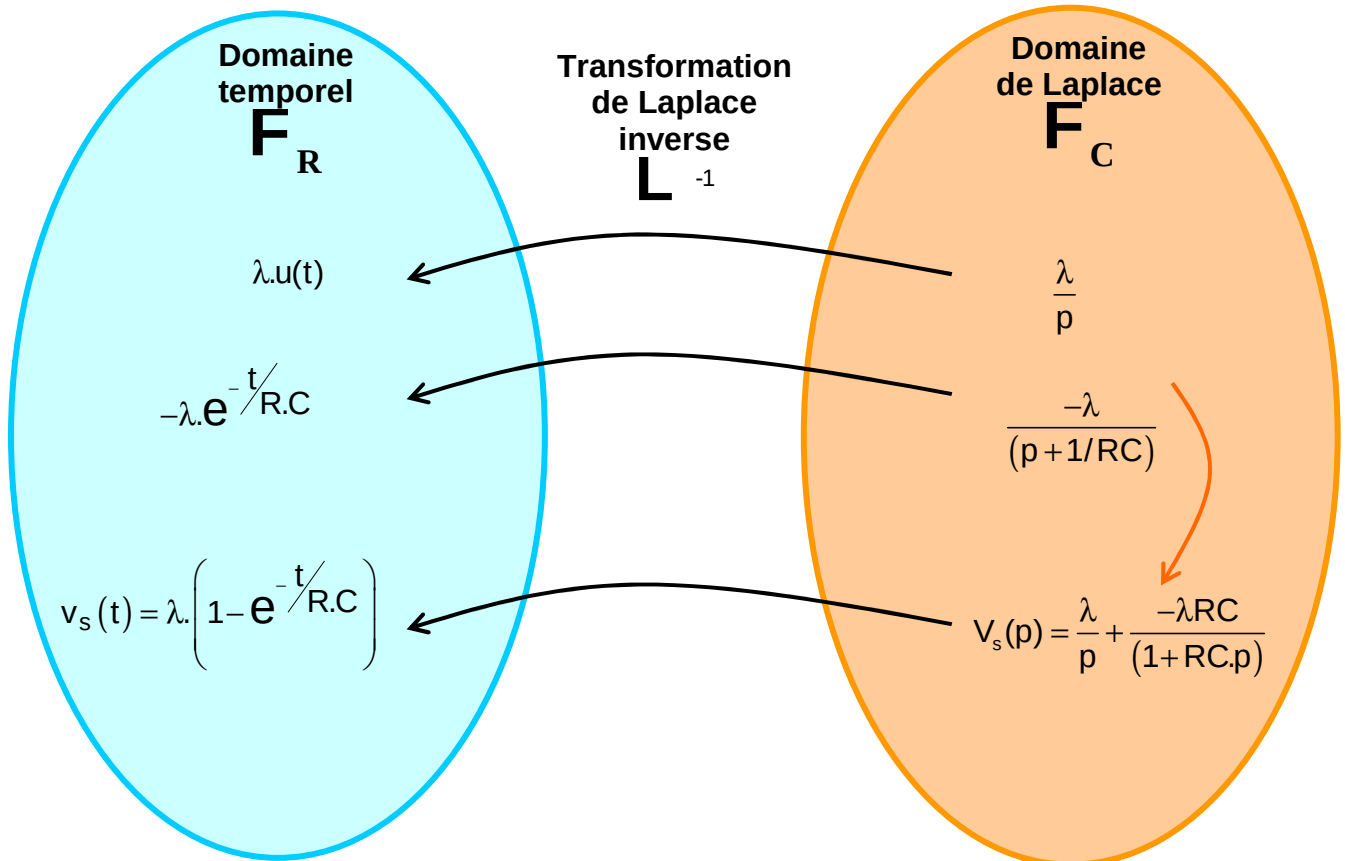
Finalement, on remplace ces valeurs (7) dans (6), puis on vérifie l'exactitude :

$$V_s(p) = \frac{\lambda}{p(1 + R.C.p)} = \frac{\lambda}{p} + \frac{-\lambda RC}{(1 + R.C.p)}$$

Question 3 : Réponse temporelle à un échelon (« réponse indicielle »)

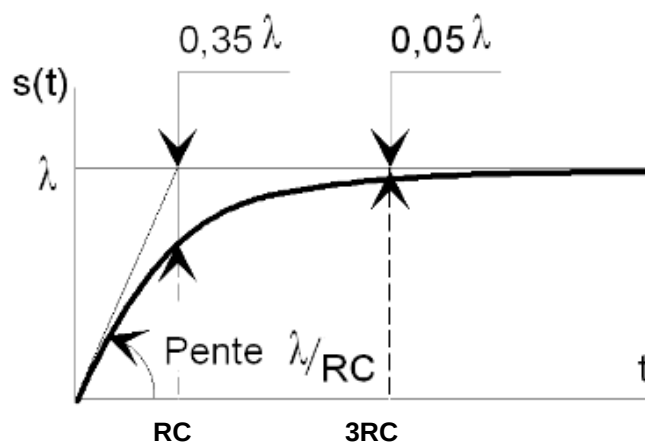
Le terme $\frac{-\lambda RC}{(1+RC.p)}$ se met sous la forme $\frac{-\lambda}{(p+1/RC)}$

pour utiliser la relation connue : $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+a)}\right) = e^{-a.t}.u(t)$



Enfin, la réponse indicielle est :

Question 4 : Analyse des résultats



Vérification des valeurs de la sortie aux bornes du domaine, directement à partir de la forme de la sortie dans le domaine de Laplace, sans revenir au domaine temporel : on utilise les deux théorèmes suivants :

Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{\substack{p \in \mathbb{C} \\ p \rightarrow +\infty}} p.F(p)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} v_s(t) = \lim_{\substack{p \in \mathbb{C} \\ p \rightarrow +\infty}} \left(p \cdot \frac{\lambda}{p(1+RCp)} \right) = 0$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{\substack{p \in \mathbb{R} \\ p \rightarrow 0}} p.F(p)$$

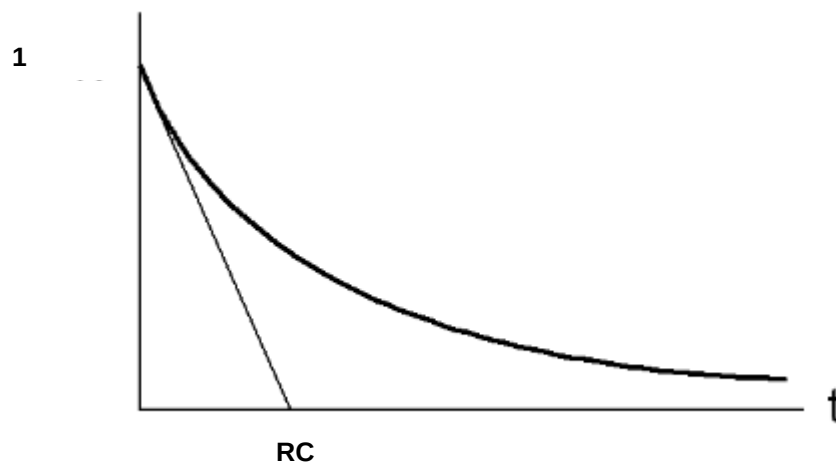
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v_s(t) = \lim_{\substack{p \in \mathbb{C} \\ p \rightarrow 0+}} \left(p \cdot \frac{\lambda}{p(1+RCp)} \right) = \lambda$$

Question 5 : Réponse temporelle à un dirac (« réponse impulsionnelle »)

En suivant la même démarche, la réponse impulsionnelle est :

$$v_s(t) = \frac{1}{RC} e\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Son graphe est simplement celui de la réponse indicielle symétrisé



NB : l'impulsion est unitaire et noté $1 \times \delta(t)$. L'impulsion de transformée de Laplace $L(\delta(t)) = 1$

est également le signal dérivé de l'echelon unitaire $1 \times u(t)$ de transformée $L(u(t)) = \frac{1}{p}$. Ainsi

comme les signaux usuels sont sans dimension, le « 1 » porté par l'impulsion a donc la dimension multipliée par le temps du « 1 » porté par l'echelon.