# I. INTRODUCTION

## 1. Objectifs

Dans ce chapitre, utilisant les connaissances acquises en première année en cinématique et statique des solides, nous serons capables d'analyser les comportements cinématique et statique d'un mécanisme :

- déterminer les relations **entrées sorties** du mécanisme ;
- déterminer le **degré de mobilité** du mécanisme ;
- déterminer le **degré d'hyperstaticité** du mécanisme ;
- modifier les liaisons du mécanisme afin de le rendre **isostatique**.

## 2. Hypothèses d'études :

Dans ce chapitre, nous n'oublierons pas ces hypothèses d'étude :

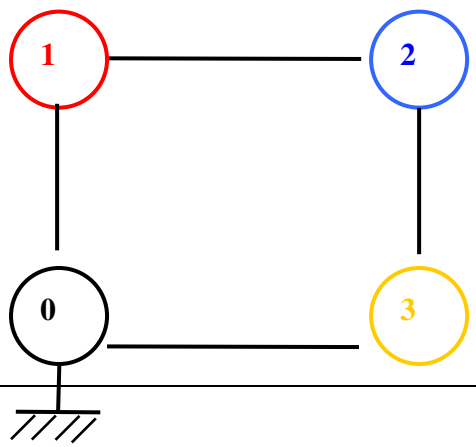
- les solides seront tous considérés **indéformables** ;
- les liaisons entre les solides seront **parfaites** du point de vue cinématique (**sans jeu**) et du point de vue statique (**sans frottements**) ;
- les effets dynamiques sont considérés comme négligeables (**masse faible**), ainsi le **PFS peut être écrit à tout ensemble matériel issu du mécanisme** ;

## 3. Nombre cyclomatique d'un mécanisme :

Le graphe des liaisons permet d'identifier les liaisons entre tous les solides du mécanisme.

**Exemple 1 :** Malaxeur – Mélangeur

La figure **1** représente un malaxeur – mélangeur. L'arbre d'entrée **1** est entraîné en rotation par un moteur électrique. Par l'intermédiaire de la bielle **2**, la pale de sortie **3** est animée d'un mouvement de rotation autour de $\left(D,\overrightarrow{z_0}\right)$ et d'un mouvement de translation alternatif d'axe $\left(D,\overrightarrow{z_0}\right)$.




Le nombre cyclomatique de ce mécanisme est :

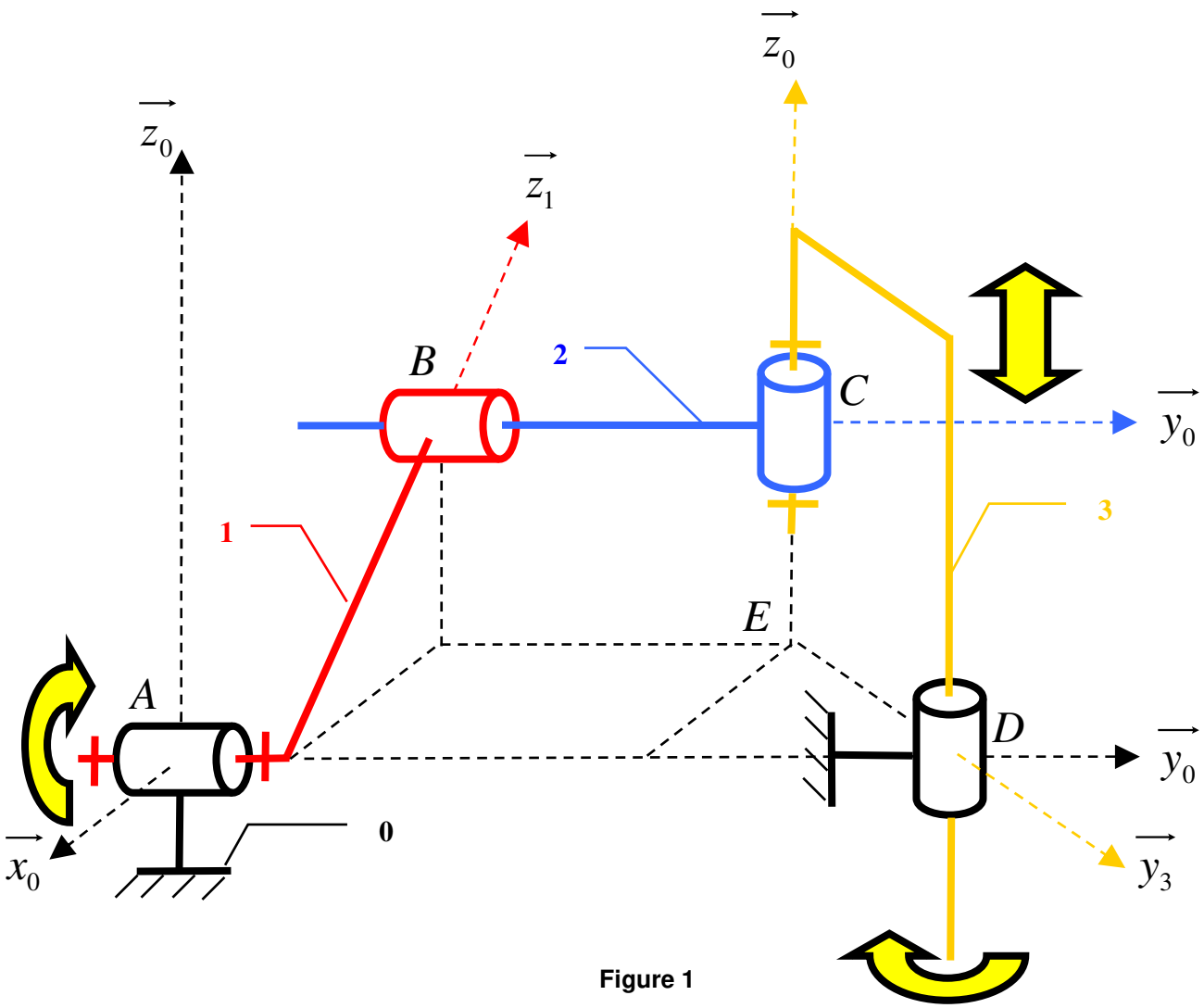
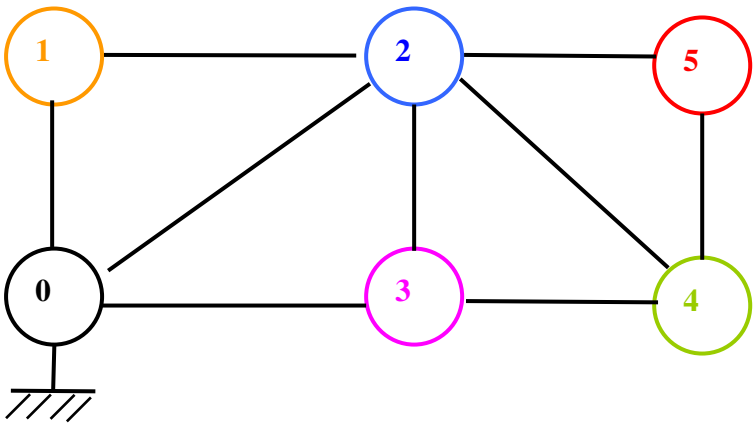



**Figure 1**

**Exemple 2 :** Elévateur télescopique

La figure **2** représente un élévateur télescopique. La vis d'entrée **1** est entraînée en rotation par un moteur électrique. Ce mouvement est transformé en translation d'axe $(O_1, \vec{z}_0)$ du coulisseau **2** par l'intermédiaire de la liaison glissière hélicoïdale d'axe $(O_2, \vec{z}_0)$. La vis **3** est levée par le coulisseau **2**, elle entre donc aussi en rotation d'axe $(O_3, \vec{z}_0)$ par l'intermédiaire de la liaison glissière hélicoïdale avec le bâti **0**. Le train d'engrenage **3-4** en $I$ entraîne la vis **4** en rotation qui provoque la translation d'axe $(O_5, \vec{z}_0)$ du plateau **5**.



Le nombre cyclomatique de ce mécanisme est :

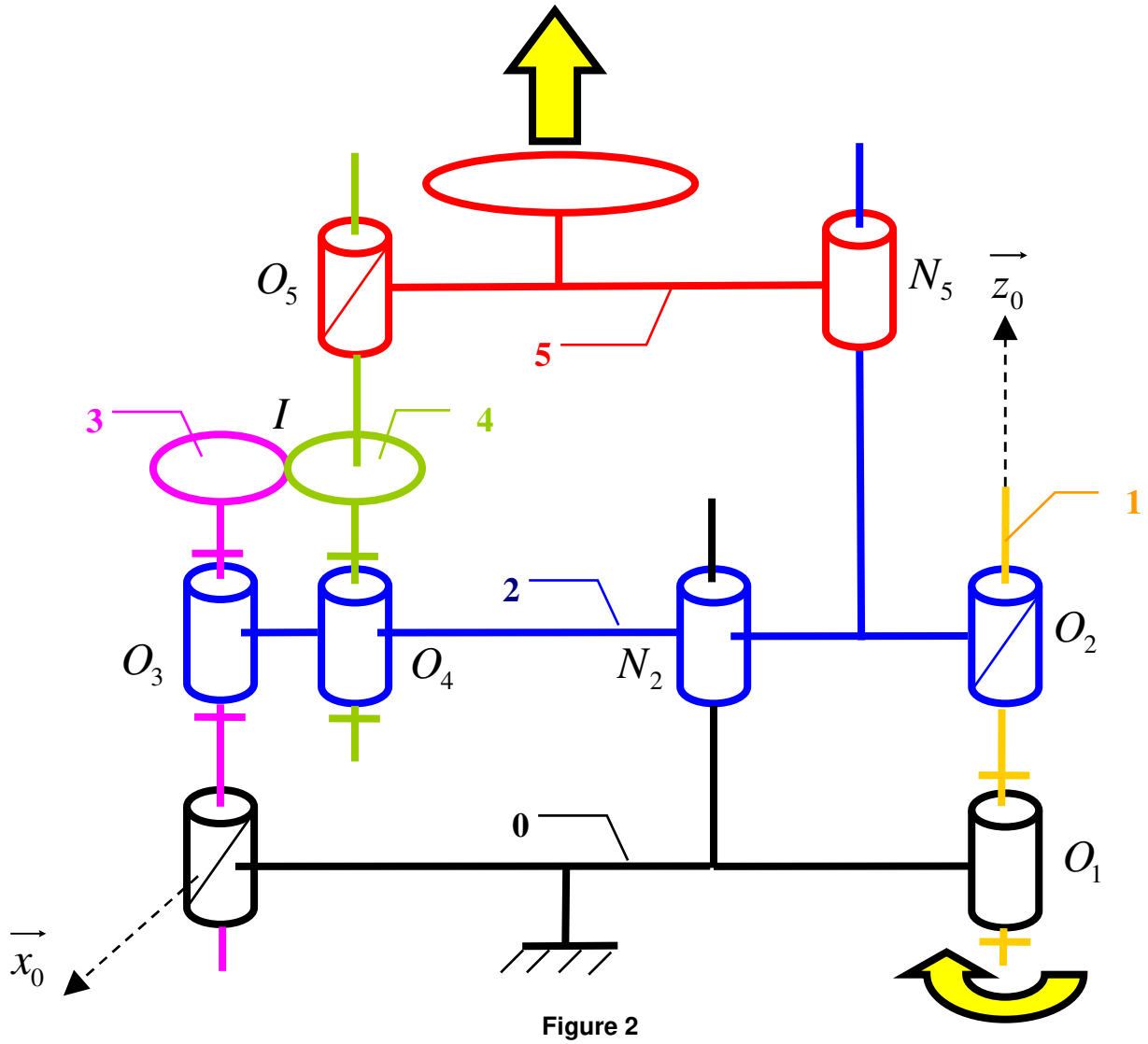



**Figure 2**

Chaque cycle indépendant $\gamma$ peut être étudié de façon **géométrique, cinématique ou statique**. Ces trois méthodes font l'objet des paragraphes suivants.

## II. ETUDE GEOMETRIQUE D'UNE CHAINE FERMEE SIMPLE

### 1. Fermeture géométrique

**Objectifs :**
- Déterminer les relations entre les **paramètres géométriques connus et inconnus** du mécanisme ;
- Etablir la **loi entrée-sortie**.

Soit $C=\{1,....,k\}$ une chaîne fermée simple de $k$ solides. Le nombre de liaisons est $L=k$. Soit le point $A_i$ le centre géométrique de la liaison $L_{i+1/i}$ entre les solides $i+1$ et $i$ avec $i\in[1,k]$. On peut écrire la fermeture géométrique de la chaîne $C$ de la manière suivante :

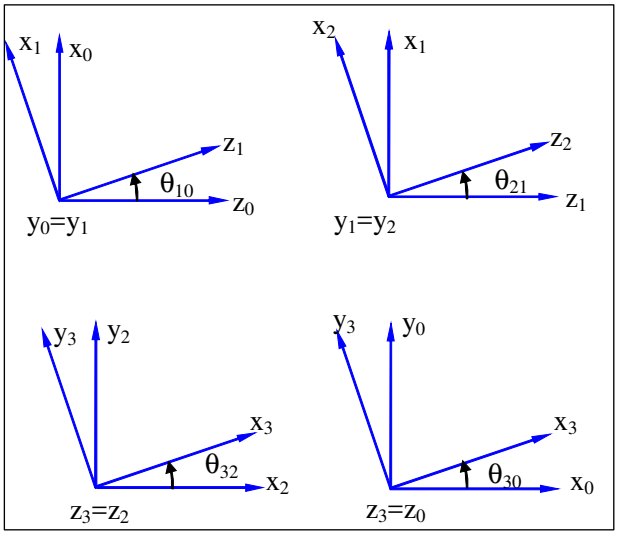
$$\sum_{i=1}^{k-1}\overrightarrow{A_iA_{i+1}}+\overrightarrow{A_kA_1}=\vec{0}$$

Cette relation vectorielle est projetée dans une base orthonormée. On obtient alors **un système de 3 équations à $I_g$ paramètres géométriques**.

**La loi entrée-sortie** est la relation entre les paramètres géométriques inconnues et les paramètres géométriques connus du mécanisme.

2. **Exemple traité :** Malaxeur – Mélangeur

Figures angulaires planes :




Paramétrage :

$\overrightarrow{AB} = R.\vec{z}_1$ ; $\overrightarrow{CB} = -\lambda.\vec{y}_1$ $avec$ $\lambda > 0$ ;

$\overrightarrow{DA} = -d.\vec{y}_0$ ; $\overrightarrow{CD} = l.\vec{y}_3 - h.\vec{z}_0$ .

Fermeture géométrique :

Système d'équation en projetant dans $B_0$ :

$/\overrightarrow{x_0}$
$/\overrightarrow{y_0}$
$/\overrightarrow{z_0}$

Paramètres géométriques variables : → Ig=

Paramètres géométriques fixes :

Paramètres géométriques inconnus :

Paramètres géométriques connus : car $\theta_{10}$ est imposé (mouvement d'entrée)

Déterminons les **lois entrée-sortie géométriques** du mécanisme :

Translation de la pale **3** :

Rotation de la pale **3** :

Du point de vue cinématique maintenant :

**Vitesse de translation de la pale 3** :

**Vitesse angulaire de la pale 3** :

## III. ETUDE CINEMATIQUE D'UNE CHAINE FERMEE SIMPLE.

**Objectifs :**
- Etablir la **loi entrée-sortie cinématique du mécanisme ;**
- Déterminer le **degré de mobilité**.

### 1. Fermeture cinématique

Reprenons la chaîne de solide $C$. Le torseur cinématique en $A$ du solide $i$ en mouvement par rapport au solide $j$ est noté $\{V_{i/j}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(i/j) \\ \vec{V}(A\in i/j) \end{Bmatrix}_A$.

La fermeture cinématique s'écrit : $\boxed{\sum_{i=1}^{k-1}\{V_{i/i+1}\}_A + \{V_{k/1}\}_A = \vec{0}}$

$$\sum_{i=1}^{k-1}\vec{\Omega}(i/i+1)+\vec{\Omega}(k/1)=\vec{0}$$
$$\sum_{i=1}^{k-1}\vec{V}(A\in i/i+1)+\vec{V}(A\in k/1)=\vec{0}$$

### 2. Degré de mobilité d'un mécanisme

Pour chaque cycle indépendant, on obtient par projection 6 équations scalaires.

Pour le mécanisme entier, on obtient un système E de $6.\gamma$ **équations à** $I_C$ paramètres cinématiques inconnues :

**Rang cinématique $r_C$ :**

Il faut donc fixer $\boxed{I_C - r_C}$ paramètres cinématiques inconnues pour résoudre complètement le problème.

**Définition :**

Plusieurs cas peuvent se rencontrer :

Si $m_C = 0$ alors

Si $m_C = 1$ alors

Si $m_C > 1$ alors

### 3. Mobilité utile et mobilité interne

Dans le troisième cas, le degré de mobilité du mécanisme s'écrit : $\boxed{m_C = m_U + m_I}$

On appelle **mobilité utile**, notée $m_U$, le nombre **d'inconnues cinématiques indépendantes** à fixer pour déterminer les relations entrées-sorties du mécanisme.
La mobilité utile est liée à la fonction du mécanisme.

On appelle **mobilité interne**, notée $m_I$, le nombre **d'inconnues cinématiques indépendantes** du mécanisme quand on immobilise les liaisons d'entrée et les liaisons de sortie du mécanisme.
La mobilité interne est un mouvement existant entre deux solides du mécanisme n'ayant pas d'incidence sur la fonction réalisée.

### 4. Exemple traité : Malaxeur – Mélangeur

Les torseurs cinématiques s'écrivent :

$$\{V_{1/0}\} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ \dot{\theta}_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{D\left(-,\vec{y0},-\right)} ; \{V_{2/1}\} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ \dot{\theta}_{21} & v_{21} \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{C\left(-,\vec{y0},-\right)} ; \{V_{3/2}\} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\theta}_{32} & 0 \end{matrix}\right\}_{C\left(-,-,\vec{z0}\right)} ; \{V_{3/0}\} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\theta}_{30} & w_{30} \end{matrix}\right\}_{D\left(-,-,\vec{z0}\right)}.$$

On écrit les torseurs en $D$, là où, en général, il y a le plus d'inconnues (éventuellement C ici):

$$\{V_{2/1}\} = \left\{\begin{matrix} 0 & \\ \dot{\theta}_{21} & v_{21} \\ 0 & \end{matrix}\right\}_{D\left(\vec{x0},\vec{y0},\vec{z0}\right)} ; \{V_{3/2}\} = \left\{\begin{matrix} 0 & \\ 0 & \\ \dot{\theta}_{32} & 0 \end{matrix}\right\}_{D\left(\vec{x0},\vec{y0},\vec{z0}\right)}.$$

La fermeture cinématique s'écrit :

Le système d'équations en projetant sur $B_0$ :

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

**Nombre total d'inconnues cinématiques :**

**Rang cinématique :**

**Degré de mobilité du mécanisme :**

**Paramètre cinématique connu :**

**Paramètres cinématiques inconnus :**

**Résolution :**

Retrouvons la loi entrée-sortie du mécanisme de l'étude géométrique:

**Vitesse de translation de la pale 3** : $\boxed{w_{30} = -R.\dot{\theta}_{10}.\sin\theta_{10}}$

**Vitesse angulaire de la pale 3** : $\boxed{\dot{\theta}_{30} = \frac{\frac{R}{l}.\dot{\theta}_{10}.\cos\theta_{10}}{\sqrt{1-\frac{R^2}{l^2}.\sin^2\theta_{10}}}}$

## IV. ETUDE STATIQUE D'UNE CHAINE FERMEE SIMPLE

**Objectifs :**
- Déterminer le **degré d'hyperstaticité** du mécanisme ;
- Identifier les inconnues d'efforts hyperstatiques ;
- Modifier le mécanisme pour **le rendre isostatique** si nécessaire.

### 1. Principe fondamental de la statique

Le torseur d'inter-efforts associé à la liaison $L_{ij}$ entre le solide S$j$ sur le solide S$i$ au point $A$ s'écrit :

$$\left\{T_{Sj\to Si}\right\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(Sj\to Si) = X_{ji}.\vec{x}_k + Y_{ji}.\vec{y}_k + Z_{ji}.\vec{z}_k \\ \overrightarrow{M}(A, Sj\to Si) = L_{ji}.\vec{x}_k + M_{ji}.\vec{y}_k + N_{ji}.\vec{z}_k \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} X_{ji} & L_{ji} \\ Y_{ji} & M_{ji} \\ Z_{ji} & N_{ji} \end{Bmatrix}_{A\ Bk}$$

Le mécanisme est constitué de $n$ solides. On peut donc isolé $n$-$1$ systèmes de solides (on ne peut pas isoler le bâti). On peut, par exemple, isoler successivement chaque solide du mécanisme.

On applique le **Principe Fondamental de la Statique** à ces $n$-$1$ solides :

Si $\left\{T_{\overline{Si}\to Si}\right\}_A$ est le torseur de toutes les actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le solide Si alors :

$$\boxed{\left\{T_{\overline{Si}\to Si}\right\}_A = \{0\}_A} \quad \forall i \in [1, n-1]$$

$$\sum_{j\neq i} \left\{T_{Sj\to Si}\right\}_A = \{0\}_A \quad \forall i \in [1, n-1]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum_{j\neq i} \vec{R}(Sj\to Si) = \vec{0} \\ \\ \sum_{j\neq i} \overrightarrow{M}(A, Sj\to Si) = \vec{0} \end{array}} \quad \forall i \in [1, n-1]$$

### 2. Nombre d'inconnues statique d'un mécanisme

En isolant ces $n$-$1$ solides, on obtient un système $E$ de $6(n$-$1)$ équations scalaires en projetant sur la base $B_0$. Le nombres d'inconnues statiques $I_S$ est la somme des inconnues statiques de toutes les liaisons : $\boxed{I_S = \sum_{i=1}^{L} I_{Si}}$.

or $L = \gamma + n - 1$ et pour chaque liaison $\boxed{I_{Si} = 6 - I_{Ci}}$.

Donc le nombre d'inconnues statiques est : $I_S = \sum_{i=1}^{\gamma+n-1} (6 - Ic_i) = 6.(\gamma+n-1) - \sum_{i=1}^{\gamma+n-1} Ic_i = 6.(\gamma+n-1) - I_C$.

### 3. Rang statique

Le rang statique $r_S$ du mécanisme est le nombre d'équations indépendantes du système E. Bien sur $\boxed{r_S \leq 6.(n-1)}$.

### 4. Degré d'hyperstaticité d'un mécanisme

Il faut fixer $I_S - r_S$ inconnues de liaison pour déterminer tous les efforts dans le mécanisme.

**Définition :**

En remplaçant les expressions de $r_S$ et $I_S$, on obtient : $h = 6.(\gamma + n - 1) - I_C - 6.(n-1) + m_C$
Finalement, la formule générale de la détermination de degré d'hyperstaticité d'un mécanisme est :
$h = m_C + 6.\gamma - I_C$ ou $h = I_S - 6.(n-1) + m_C$

**Formule de mobilité :**

### 5. Signification de h

| | | |
|---|---|---|
| $h = 0$ | $I_S = r_S$ | **Le mécanisme est isostatique**<br><br>**Avantage :** |

| | | |
|---|---|---|
| $h > 0$ | $I_S = r_S + h$ | **Le mécanisme est hyperstatique d'ordre h**<br><br>**Inconvénients :**<br><br>**Avantage :** |

### 6. Comment rendre un mécanisme isotatique ?

**Intervenir sur les liaisons en gardant des solides indéformables et des liaisons parfaites:**

Il faut annuler h inter-efforts dans les liaisons. On va **« libérer » des mobilités**, on changera alors les modèles des liaisons. Le fonctionnement du mécanisme doit être conservé, on s'assurera de ce bon fonctionnement. **Les mobilités utiles ne peuvent pas être modifiées.** Généralement, on ne change pas les liaisons d'entrée et de sortie du mécanisme.

**Intervenir sur les liaisons en ne gardant pas ces hypothèses :**

Il faudra ajouter h **équations de comportement en considérant les solides déformables** et les liaisons parfaites.

On peut aussi ajouter h équations de compatibilité géométrique en considérant **les liaisons avec jeu** et les solides indéformables.

### 7. Exemple traité : Mélangeur – Malaxeur

Ecrivons les torseurs statiques des liaisons du malaxeur :

$$\{T(S_0 \to S_1)\}_A = \begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_{B_0} \quad \{T(S_2 \to S_1)\}_B = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ 0 & 0 \\ Z_{21} & N_{21} \end{Bmatrix}_{B_0} \quad \{T(S_3 \to S_2)\}_C = \begin{Bmatrix} X_{32} & L_{32} \\ Y_{32} & M_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{B_0}$$

$$\{T(S_0 \to S_3)\}_D = \begin{Bmatrix} X_{03} & L_{03} \\ Y_{03} & M_{03} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} \quad \{T(ext \to S_1)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_m \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} \quad \{T(ext \to S_3)\}_D = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{ext} & N_{ext} \end{Bmatrix}_{B_0}$$

**Isolons l'arbre d'entrée 1 :**

Ecrivons le PFS au point B :

Ecrivons les torseurs en B :

Le système d'équations obtenu est le suivant :

(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)

**Isolons la bielle 2 :**

Ecrivons le PFS au point C :

Ecrivons les torseurs en C :

Le système d'équations obtenu est le suivant :

(7)
(8)
(9)
(10)
(11)
(12)

**Isolons la pale 3 :**

Ecrivons le PFS au point C :

Ecrivons les torseurs en C :

Le système d'équations obtenu est le suivant :

(13)
(14)
(15)
(16)
(17)
(18)

**Bilan :**

| | |
|---|---|
| **Inconnues d'inter-efforts** | |
| **Mobilité du mécanisme** | |
| **Rang statique** | |
| **Degré d'hyperstaticité** | |

Il est donc nécessaire de fixer (d'annuler) une inconnue d'inter-efforts pour déterminer toutes les autres.

**Résolution :**

$$\begin{cases} X_{01} + X_{21} = 0 & (1) \\ Y_{01} = 0 & (2) \\ Z_{01} + Z_{21} = 0 & (3) \\ L_{01} + L_{21} + RY_{01}\cos\theta_{10} = 0 & (4) \\ RZ_{01}\sin\theta_{10} - RX_{01}\cos\theta_{10} + C_m = 0 & (5) \\ N_{01} + N_{21} = 0 & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -X_{21} + X_{32} = 0 & (7) \\ Y_{32} = 0 & (8) \\ -Z_{21} + Z_{32} = 0 & (9) \\ -L_{21} + L_{32} + \lambda Z_{21} = 0 & (10) \\ M_{32} = 0 & (11) \\ -N_{21} - \lambda X_{21} = 0 & (12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -X_{32} + X_{03} = 0 & (13) \\ -Y_{32} + Y_{03} = 0 & (14) \\ -Z_{32} + Z_{ext} = 0 & (15) \\ -L_{32} + L_{03} + hY_{03} + lZ_{ext}\cos\theta_{30} = 0 & (16) \\ -M_{32} + M_{03} - hX_{03} + lZ_{ext}\sin\theta_{30} = 0 & (17) \\ -lY_{03}\sin\theta_{30} - lX_{03}\cos\theta_{30} + N_{ext} = 0 & (18) \end{cases}$$

Il reste 3 équations indépendantes à 4 inconnues : $\begin{cases} L_{01} + L_{21} = 0 & (4) \\ -L_{21} + L_{32} = -\lambda . Z_{ext} & (10) \\ -L_{32} + L_{03} = -l . Z_{ext} . \cos\theta_{30} & (16) \end{cases}$.

Le mécanisme est donc **hyperstatique d'ordre 1**.

La dernière équation (5) non indépendante permet d'obtenir **le couple moteur en fonction des efforts extérieurs** :

**Comment rendre le malaxeur mélangeur isostatique ?**

Il faut annuler un inter-efforts ( $L_{01}$ $L_{21}$ $L_{32}$ ou $L_{03}$ ). On ne change pas les liaisons d'entrée et de sortie, il reste 2 possibilités : $L_{21} = 0$ ou $L_{32} = 0$.

**Première possibilité :** $L_{21} = 0$

Le torseur de la liaison L12 devient $\{T(S_2 \to S_1)\}_B = \begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{21} & N_{21} \end{Bmatrix}_{B_0}$. Ce n'est pas une liaison connue.

**Deuxième possibilité :** $L_{32} = 0$

Le torseur de la liaison L32 devient $\{T(S_3 \rightarrow S_2)\}_C = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & M_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{B_0}$. Rotule de centre $C$.

En faisant ce changement, on fait apparaître **une mobilité interne** qui la rotation de la bielle **2** autour de son propre axe $(B, \vec{y}_0)$. Cette mobilité est inutile mais ne gêne pas le fonctionnement.

| | |
|---|---|
| **Inconnues d'inter-efforts** | |
| **Mobilités du mécanisme** | |
| **Rang statique** | |
| **Degré d'hyperstaticité** | |

Le malaxeur – mélangeur est maintenant **isostatique**. Tous les inter-efforts sont déterminés :

Avec (4) et (10) : $L_{21} = -L_{01} = \lambda . Z_{ext}$

Avec (16) : $L_{03} = -l . Z_{ext} . \cos\theta_{30}$

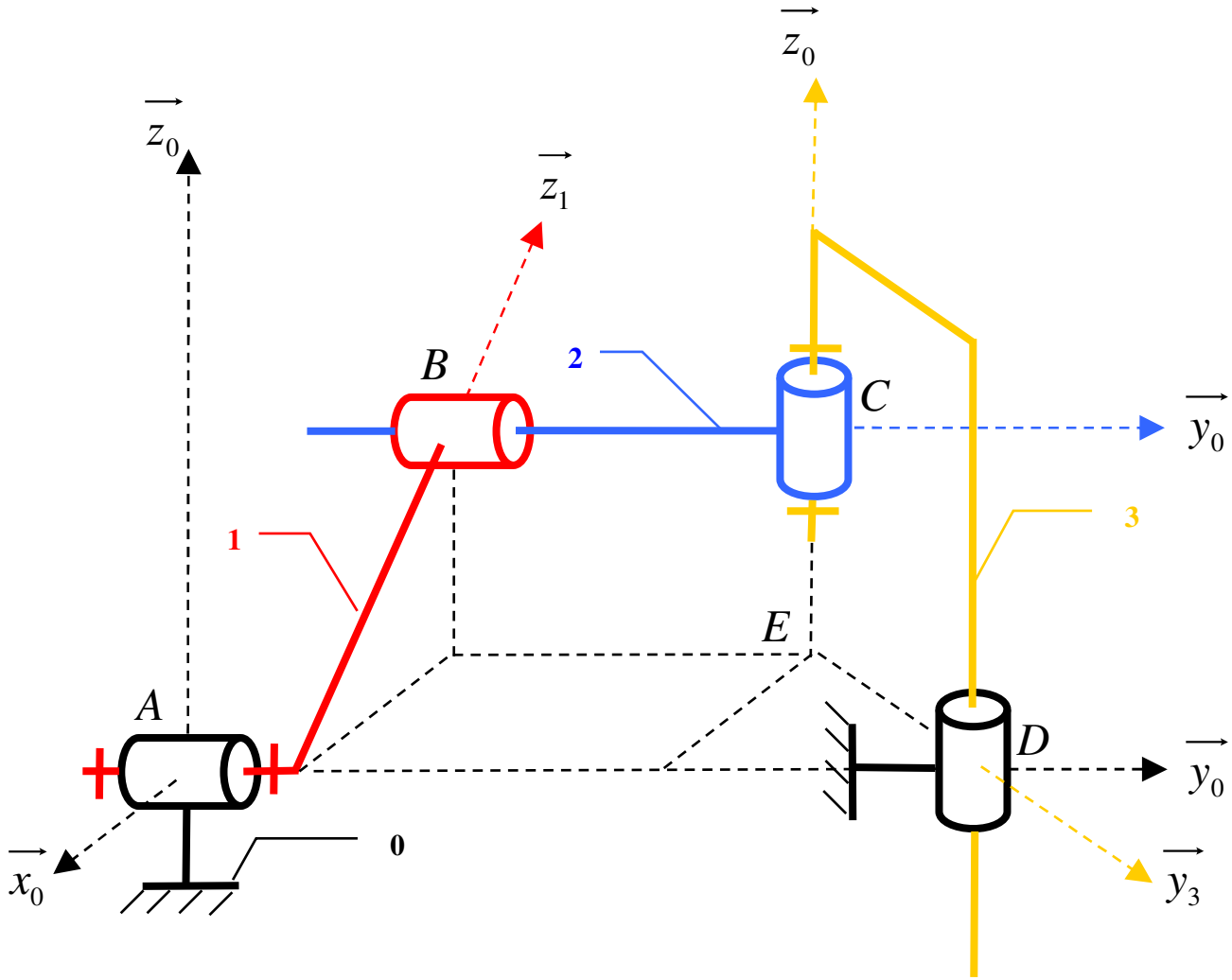
## V. SYNTHESE

| | **STATIQUE** | **CINEMATIQUE** |
|---|---|---|
| **Nombre d'inconnues** | $\boxed{I_S = \sum_{i=1}^{L} i_{Si}}$ | $\boxed{I_C = \sum_{i=1}^{L} ic_i}$ |
| **Nombre d'équations** | $6.(n-1)$ | $6.\gamma$ |
| **Rang** | $\boxed{r_S \leq 6.(n-1)}$ <br> $\boxed{r_S = 6.(n-1) - m_C}$ | $\boxed{r_C \leq 6.\gamma}$ |
| **Degré d'Hyperstaticité / Mobilité** | $\boxed{h = I_S - r_S}$ | $\boxed{m_C = I_C - r_C}$ |
| **Formules de mobilité** | $\boxed{h = m_C - 6.(n-1) + I_S}$ | $\boxed{h = m_C + 6.\gamma - I_C}$ |

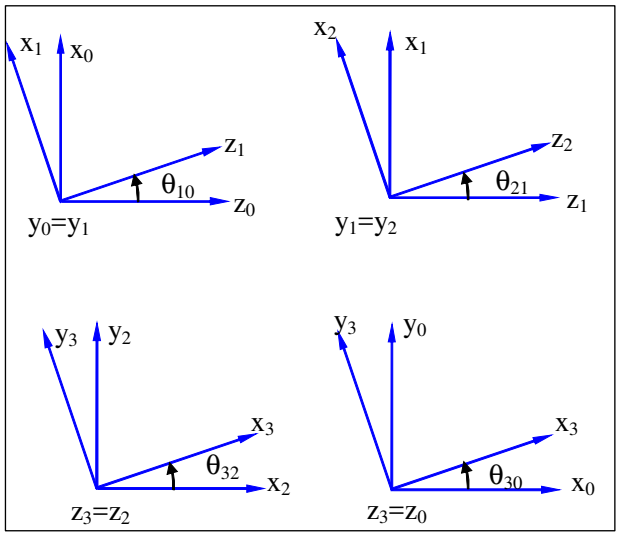
$L$ : **nombre de liaisons** présentes dans le mécanisme

$n$ : **nombre de solides** constituants le mécanisme bâti compris

## MALAXEUR – MELANGEUR




Figures angulaires planes :




Paramétrage :

$\overrightarrow{AB} = R.\vec{z}_1$ ; $\overrightarrow{CB} = -\lambda.\vec{y}_1$ *avec* $\lambda > 0$ ;

$\overrightarrow{DA} = -d.\vec{y}_0$ ; $\overrightarrow{CD} = l.\vec{y}_3 - h.\vec{z}_0$ .