

A : Cinétique

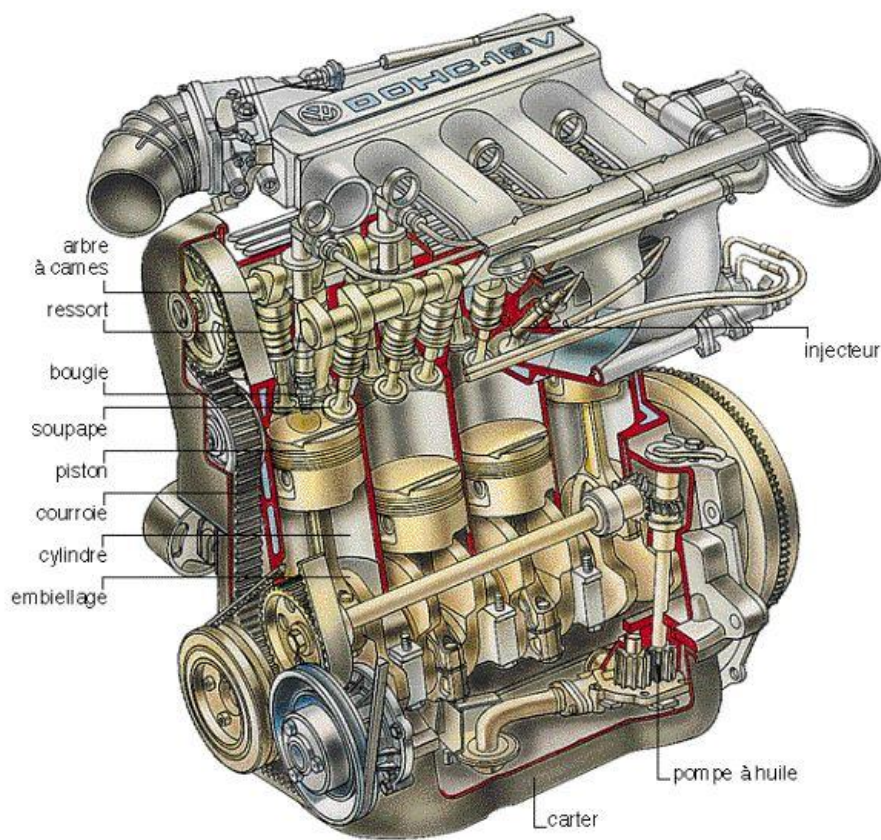
Nécessité d'une vision dynamique des problèmes

Si nous considérons un système multiphysiques « classique » tel que l'automobile, nous nous rendons vite à l'évidence qu'une vision cinématique ou statique du problème sera totalement insuffisante, car elles ne permettront pas de dimensionner les pièces ni les actionneurs en effet nous ne possédons pour l'instant aucun moyen de relier les efforts au mouvement.

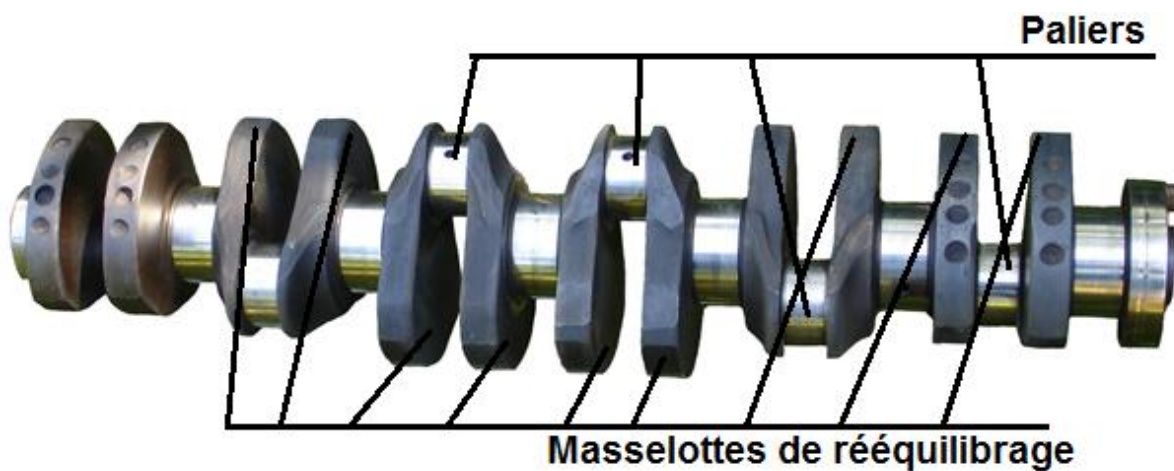


Prenons pour exemple le moteur à combustion interne qui la propulse et examinons les éléments en mouvement.

Le système est principalement composé d'un système bielle-manivelles (déjà vu en première année), ici en l'occurrence nous avons un moteur 4 cylindres, dont la vitesse moyenne de rotation en sortie de vilebrequin est de l'ordre de 3500tr/mn.



Passons maintenant à l'une des pièces principale de ce système la « manivelle » appelée vilebrequin.



Celui-ci monté en liaison pivot avec le bâti est composé de 4 paliers **excentrés**, ces paliers vont donc nécessairement créer un « déséquilibre à la pièce, d'où la présence de masselottes de rééquilibrage afin de permettre le fonctionnement de l'ensemble à haute fréquence de rotation.

Qu'est-ce que la cinétique.

La cinétique permet de caractériser le comportement des systèmes matériels en prenant en compte leur cinématique et leur masse.

Le but maintenant est de comprendre le modèle permettant d'énoncer correctement le principe fondamental de la dynamique.

On définira donc un nouveau torseur le torseur cinétique, ainsi que l'énergie cinétique.

À partir de la cinétique se construit la dynamique des solides qui intègre en plus les actions mécaniques qui s'exercent sur ceux-ci.

1- MASSE D'UN SYSTEME MATERIEL.

Considérons un système matériel (E). En tout point M de ce système, à un volume élémentaire dV, on associe un scalaire positif dm tel que : $dm = \rho(M)dV$ (où $\rho(M)$ est la masse volumique du système en ce point).

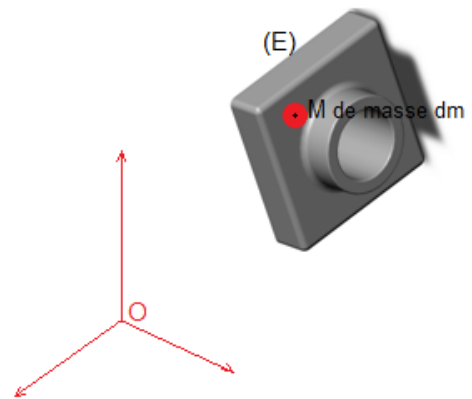
En supposant que $\rho(M)$ varie de manière continue, la masse m_E du système (E) est définie

$$m_E = \int_{M \in E} dm = \iiint_{M \in E} \rho(M) dV$$

L'unité de masse est le kilogramme (kg).

Remarque :

- Si on assimile le système à une surface, on peut définir une masse surfacique $\mu(M)$ et ainsi la masse est donnée par : $m_E = \iint_{M \in E} \mu(M) dS$.
- Si on assimile le système à une ligne, alors on peut définir une masse linéique $\nu(M)$ et ainsi la masse est donnée par : $m_E = \int_{M \in E} \nu(M) dL$.



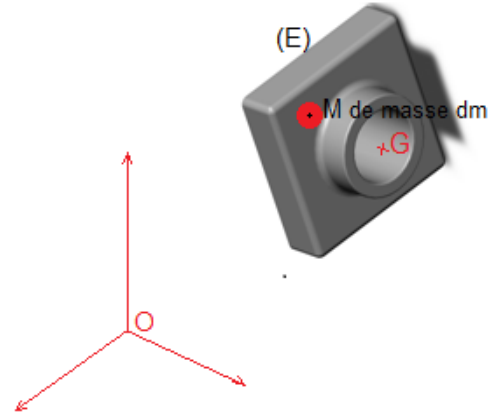
2- CENTRE D'INERTIE.

21- Définition

On appelle centre d'inertie d'un système matériel (E) le point unique G défini par la relation :

$$\int_{M \in E} \vec{GM} dm = \vec{0},$$

M décrivant le système (E) entier.



22- Propriétés.

221- Position du centre d'inertie.

Soit un point O quelconque, alors :

$$\begin{aligned} \int_{M \in E} \vec{GM} dm &= \int_{M \in E} (\vec{GO} + \vec{OM}) dm = \vec{GO} \int_{M \in E} dm + \int_{M \in E} \vec{OM} dm = \vec{0} \\ \Rightarrow m_E \vec{OG} &= \int_{M \in E} \vec{OM} dm \end{aligned}$$

En appelant x_G, y_G, z_G les composantes du vecteur $\vec{OG}$, et x, y, z celles de $\vec{OM}$, la relation précédente se traduit analytiquement par :

$$\begin{aligned} m_E x_G &= \int_{M \in E} x dm \\ m_E y_G &= \int_{M \in E} y dm \\ m_E z_G &= \int_{M \in E} z dm \end{aligned}$$

Remarque : si (E) est un solide, alors le centre d'inertie est un point fixe de ce solide.

222- Associativité.

Soit le système (E) constitué de n sous-systèmes disjoints (E_i) de masse et de centre d'inertie respectivement m_i et G_i alors :

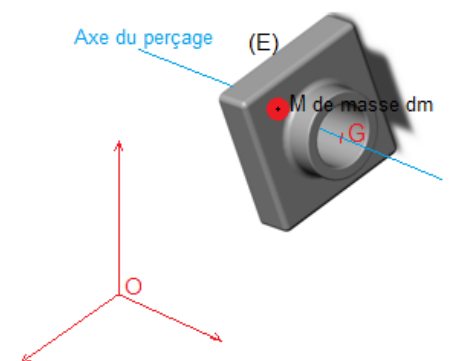
$$\left[\sum_{i=1}^n m_i \right] \vec{OG} = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{OG}_i)$$

(Les G_i sont les barycentres des solides élémentaires).

223- Symétrie matérielle.

Si un système matériel possède un élément de symétrie matérielle (symétrie du point de vue géométrie et répartition des masses) tel qu'un plan ou un axe, le centre d'inertie appartient à cet élément. Ainsi, avant d'entreprendre tout calcul, il est vivement conseillé de rechercher si de tels éléments existent.

Dans la figure l'axe du perçage correspond aussi à l'intersection des plans de symétrie de la forme extérieure.



3- Principe de conservation de la masse.

31- Définition.

a- Un ensemble matériel (E) vérifie le principe de conservation de la masse, ou est à **masse conservative**, si tout sous-ensemble matériel (e) de (E) a une masse m_e constante au cours du temps.

b- Un ensemble matériel (E) est à masse conservative si la masse m_E est indépendante :

- du repère dans lequel on observe le mouvement de (E) ;
- du temps t auquel on observe le mouvement de (E).

32- Conséquence.

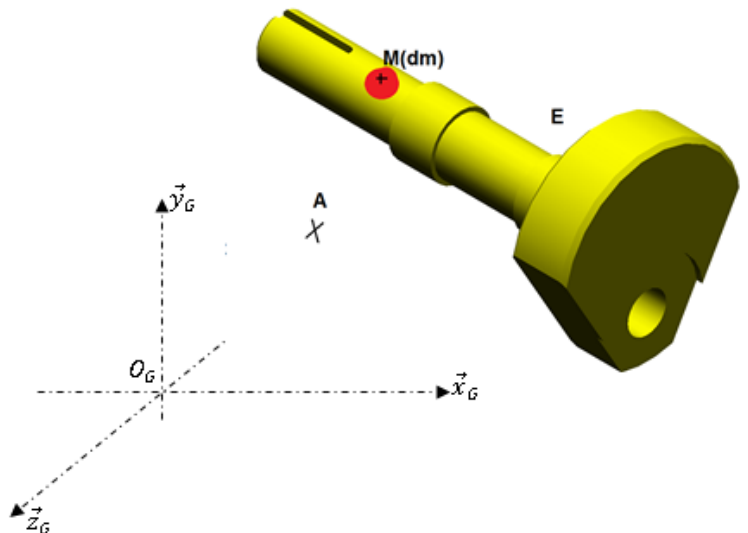
En mathématiques, on peut montrer que si $\vec{f}_{(M,t)}$ est un champ vectoriel défini en chaque point $M \in E$ à chaque instant t alors :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_E \vec{f}_{(M,t)} \cdot dm \right) = \int_E \frac{d}{dt} (\vec{f}_{(M,t)} \cdot dm)$$

Par la suite on admettra que cette relation s'applique pour tous les systèmes matériels étudiés.

4- Torseur cinétique.

Nous considérerons un ensemble matériel (E) en mouvement par rapport à un repère R_g .



41- Résultante cinétique ou quantité de mouvement

$$\vec{P}_{(S/R_g)} = \iiint_S \vec{V}_{(M/R_g)} \cdot dm$$

Avec : $\vec{V}_{(M/R_g)} = \vec{V}_{(M/S)} + \vec{V}_{(M \in S/R_g)}$ et $dm = \rho dV = dm = \rho dx \cdot dy \cdot dz$

411- Cas du solide

Si P un point quelconque du solide S : $\vec{V}_{(M/R_g)} = \vec{V}_{(M \in S/R_g)}$ car $\vec{V}_{(M/S)} = \vec{0}$

Soit G le centre d'inertie du solide. On a alors avec Varignon :

$$\vec{V}_{(M \in S/R_g)} = \vec{V}_{(G \in S/R_g)} + \vec{\Omega}_{(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{GM}$$

D'où on peut écrire :

$$\vec{P}_{(S/R_g)} = \iiint_S \vec{V}_{(M \in S/R_g)} \cdot dm = \iiint_S \left[\vec{V}_{(G \in S/R_g)} + \vec{\Omega}_{(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{GM} \right] \cdot dm$$

$$= \iiint_S \vec{V}_{(G \in S/R_g)} \cdot dm + \iiint_S \vec{\Omega}_{(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{GM} \cdot dm$$

$$= \vec{V}_{(G \in S/R_g)} \iiint_S dm + \vec{\Omega}_{(S/R_g)} \wedge \iiint_S \overrightarrow{GM} \cdot dm$$

Avec :

- $\iiint_S dm = m$: masse du solide
- $\iiint_S \overrightarrow{GM} \cdot dm = \vec{0}$ par définition de G

Finalement on a :

$$\vec{P}_{(S/R_g)} = m \cdot \vec{V}_{(G \in S/R_g)}$$

42- Moment cinétique

Soit A (sur la figure) un point quelconque connu que l'on choisira comme point d'expression du moment cinétique :

$$\vec{\sigma}_{A(S/R_g)} = \iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{(M/R_g)} \cdot dm$$

421- Cas du solide

Soit M un point quelconque du solide S alors :

$$\vec{V}_{(M/R_g)} = \vec{V}_{(M \in S/R_g)}$$

D'où :

$$\vec{\sigma}_{A(S/R_g)} = \iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{(M \in S/R_g)} \cdot dm$$

Expression en un point A quelconque mobile par rapport au référentiel Rg

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{A(S/R_g)} &= \iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{(M \in S/R_g)} \cdot dm = \iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge \left[\vec{V}_{(A \in S/R_g)} + \vec{\Omega}_{(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{AM} \right] \cdot dm \\ &= \iiint_S \left[\overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{(A \in S/R_g)} + \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{AM} \right] \cdot dm \\ &= \left[\iiint_S \overrightarrow{AM} \cdot dm \right] \wedge \vec{V}_{(A \in S/R_g)} + \iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{\Omega}_{(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{AM}) \cdot dm \end{aligned}$$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}$ et en utilisant les relations du centre d'inertie on peut écrire :

$$= m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{(A \in S/R_g)} + \iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{\Omega}_{(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{AM}) \cdot dm$$

Le premier terme sera assez facile à déterminer donc on va étudier le second terme de cette expression.

$$\iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{\Omega}_{(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{AM}) \cdot dm$$

La fonction $\vec{u} \rightarrow \iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}) \cdot dm$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, on va donc utiliser sa matrice représentative dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ notée $\bar{\bar{I}}_A(S)$.

Posons : $\vec{u} \begin{vmatrix} p \\ q \\ r \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AM} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$

Alors,

$$\begin{aligned} \iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}) \cdot dm &= \iiint_S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \left(\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \cdot dm \\ &= \iiint_S \begin{pmatrix} p(y^2 + z^2) - qxy - rxz \\ -pxy + q(x^2 + z^2) - ryz \\ -pxz - qyz + r(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \cdot dm = \bar{\bar{I}}_A(S) \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

On peut donc finalement écrire :

$$\bar{I}_A(S) = \begin{bmatrix} \iiint_S (y^2 + z^2). dm & - \iiint_S (xy). dm & - \iiint_S (xz). dm \\ - \iiint_S (xy). dm & \iiint_S (x^2 + z^2). dm & - \iiint_S (yz). dm \\ - \iiint_S (xz). dm & - \iiint_S (yz). dm & \iiint_S (x^2 + y^2). dm \end{bmatrix}_{A,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

On note de façon normalisée : $\bar{I}_A(S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{A,B}$

On nomme $\bar{I}_A(S)$ opérateur d'inertie ou tenseur d'inertie il est représenté par une matrice 3×3 dite matrice d'inertie dont les termes dépendent du point d'expression et de la base de calcul.

$\bar{I}_A(S)$ Caractérise la répartition de la matière par rapport au point A d'un corps dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, nous allons définir cet opérateur dans un chapitre qui lui sera dédié.

Ecriture finale du moment cinétique

$$\vec{\sigma}_{A(S/R_g)} = \bar{I}_A(S) \cdot \vec{\Omega}_{(S/R_g)} + m \cdot \vec{AG} \wedge \vec{V}_{(A \in S/R_g)}$$

En pratique bien sûr on écrit $\vec{\Omega}_{(S/R_g)}$ dans la même base que $\bar{I}_A(S)$ afin de pouvoir effectuer le produit.

422 Ecritures particulière du moment cinétique

Expression en un point A fixe

A est fixe donc : $\vec{V}_{(A \in S/R_g)} = \vec{0}$

D'où : $\vec{\sigma}_{A(S/R_g)} = \bar{I}_A(S) \cdot \vec{\Omega}_{(S/R_g)}$

Expression au centre d'inertie G

On a $\vec{GG} = \vec{0}$

D'où : $\vec{\sigma}_{G(S/R_g)} = \bar{I}_G(S) \cdot \vec{\Omega}_{(S/R_g)}$

43- Ecriture du torseur cinétique

431- Dans le cas général

$$\{C_{(E/R_g)}\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \vec{P}_{(E/R_g)} = \iiint_S \vec{V}_{(M/R_g)} \cdot dm \\ \vec{\sigma}_{A(S/R_g)} = \iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{(M/R_g)} \cdot dm \end{array} \right\}_A$$

$\vec{P}_{(E/R_g)}$ est la résultante cinétique ou quantité de mouvement de (E) par rapport à R_g .

$\vec{\sigma}_{(A, E/R_g)}$ est le moment cinétique en A de (E) dans son mouvement par rapport à R_g .

432- Dans le cas du solide

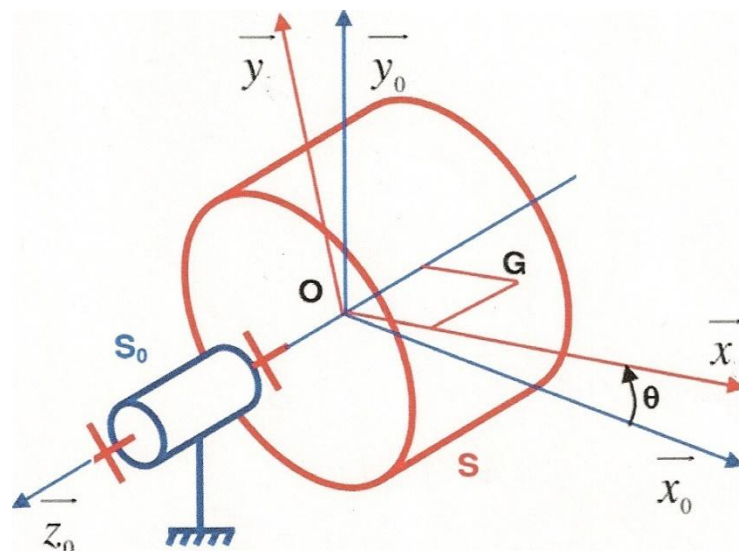
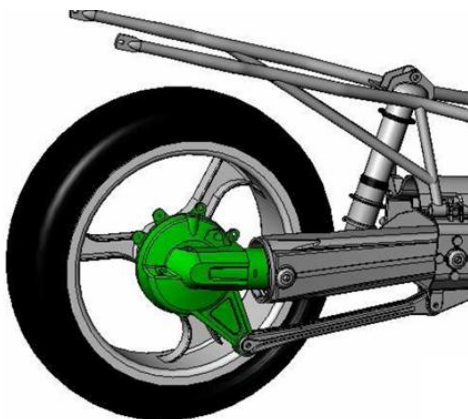
$$\{C_{(S/R_g)}\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \vec{P}_{(S/R_g)} = m \cdot \vec{V}_{(G \in S/R_g)} \\ \vec{\sigma}_{A(S/R_g)} = \bar{I}_A(S) \cdot \vec{\Omega}_{(S/R_g)} + m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{(A \in S/R_g)} \end{array} \right\}_A$$

Remarque : le torseur cinétique est bien un torseur avec les mêmes liens entre ses éléments de réduction que dans les torseurs déjà connus (cinématique et d'action mécanique).

Donc on peut utiliser le théorème de KOENIG :

$$\vec{\sigma}_{A(S/R_g)} = \vec{\sigma}_{B(S/R_g)} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{P}_{(S/R_g)}$$

Petit exemple



Notations : soit B_0 la base liée au solide S_0 , et B la base liée au solide S

Données : soit $\bar{I}_G(1) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(G;B)}$ l'opérateur d'inertie de S dans la base B et G son centre d'inertie avec $\overrightarrow{OG} = r \vec{x} + l \vec{z}$

En utilisant les notations de la figure ci-dessus à droite donnez le torseur cinétique en G de S/R_0 puis en O

5- Energie cinétique.

On appelle énergie cinétique de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport à R_g , la quantité scalaire :

$$T(S/R_g) = \frac{1}{2} \int (\vec{V}(M \in S/R_g))^2 dm$$

L'unité est le JOULE.

51- Cas du solide.

Considérons le solide (S) dans son mouvement par rapport au repère R_g .

On considère un solide (S) de masse m et de centre d'inertie G dans son mouvement par rapport à un repère R_g défini sur la figure.

En utilisant les relations de la cinématique du solide, l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport au repère R_g devient :

$$T(S/R_g) = \frac{1}{2} \int (\vec{V}(M \in S/R_g))^2 dm = \frac{1}{2} \int (\vec{V}(G \in S/R_g) + \vec{\Omega}(S/R_g) \wedge \overrightarrow{GM})^2 dm =$$

$$\frac{1}{2} \int \vec{V}(G \in S/R_g)^2 dm + \frac{1}{2} \int (\vec{\Omega}(S/R_g) \wedge \overrightarrow{GM})^2 dm + \int \vec{V}(G \in S/R_g) \cdot \vec{\Omega}(S/R_g) \wedge \overrightarrow{GM} dm =$$

(On sait que $\vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{C} \cdot \vec{A} \wedge \vec{B}$)

$$\frac{1}{2} m \vec{V}(G \in S/R_g)^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/R_g) \cdot \int \overrightarrow{GM} \wedge [\vec{\Omega}(S/R_g) \wedge \overrightarrow{GM}] dm + \vec{V}(G \in S/R_g) \cdot \vec{\Omega}(S/R_g) \wedge \int \overrightarrow{GM} dm$$

Le dernier terme étant nul par définition du centre d'inertie on obtient :

$$T(S/R_g) = \frac{1}{2} m \vec{V}(G \in S/R_g)^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{(S/R_g)} \cdot \bar{I}_G(S) \cdot \vec{\Omega}_{(S/R_g)}$$

$$T(S/R) = \frac{1}{2} m \vec{V}(G \in S/R_g)^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{\sigma}(G, S/R_g)$$

On obtient finalement : $T(S/Rg) = \frac{1}{2} \{C(S/Rg)\} \cdot \{V(S/Rg)\}$

Remarque : l'énergie cinétique ne dépend pas du point de calcul, elle est donc souvent simple à calculer lorsque l'on choisit bien le point

Cas particulier.

Mouvement d'un solide (S) autour d'un point fixe A du repère Rg.

$$T(S/R) = \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/Rg) \cdot \vec{\sigma}(A, S/Rg)$$

Mouvement d'un solide (S) autour d'un axe fixe (A, $\vec{x}$) du repère Rg.

Posons : $\vec{\Omega}(S/Rg) = \omega \cdot \vec{x} : T(S/R) = \frac{1}{2} I_{Ax}(S) \omega^2$

ii

6 : Éléments cinétiques d'un ensemble de solides.

Soit (E) un système de n solides (S_i) en mouvement par rapport au repère Rg. pour déterminer les éléments cinétiques du système (E), on procède généralement en calculant ces éléments pour chacun des solides, puis on effectue ensuite leur somme en prenant la précaution, dans le cas des moments, de les réduire au même point.

$$C(E/R) \equiv \left\{ \begin{array}{l} p(E/Rg) = \sum_{i=1}^n p(S_i/Rg) \\ \sigma_A(E/Rg) = \sum_{i=1}^n \sigma_A(S_i/Rg) \end{array} \right\}_A$$

$$T(E/Rg) = \sum_{i=1}^n T(S_i/Rg)$$

Compétences et objectifs

MODELISER

Déterminer le torseur cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide

MODELISER

Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide