C : Dynamique et PFD

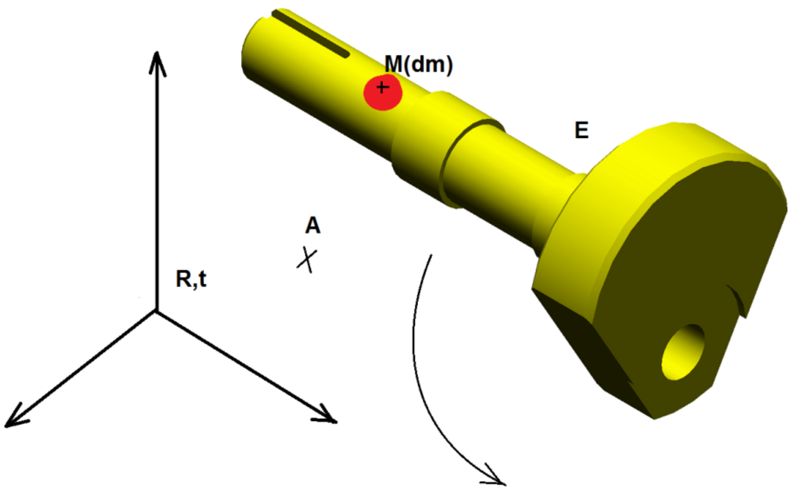
1- Dérivation vectorielle rappel

Pour dériver un vecteur, on utilise la relation suivante (relation de Boor :

$$\boxed{\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R} + \vec{\Omega}_{(R/R_0)} \wedge \vec{u}}$$

2- Torseur dynamique.

Soit un système matériel E en mouvement par rapport à un repère R.



En tout point M de ce système, on associe à un volume élémentaire dv un scalaire positif dm tel que dm =ρ(M).dv

Le torseur dynamique ou torseur des quantités d'accélération de (E) dans son mouvement par rapport à R est défini par :

$$\boxed{\{D(E/R)\} \equiv \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_d}(E/R) = \int_E \vec{\Gamma}(M/R)dm \\ \vec{\delta}(A, E/R) = \int_E \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M/R)dm \end{Bmatrix}_A}$$

$\overrightarrow{R_d}(E/R)$est la résultante dynamique de (E) par rapport à R.

$\vec{\delta}(A,E/R)$est le moment dynamique en A de (E) dans son mouvement par rapport à R.

3- Relations entre les divers éléments de réduction.

31- Résultante dynamique dans le cas du solide.

Soit un point M quelconque d'un solide S. En admettant le principe de conservation de la masse, on peut écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{Rd}_{(S/R_g)} = \iiint_S \vec{\Gamma}_{(M/R_g)} \, . dm}$$

$$\vec{\Gamma}_{(M/R_g)} = \vec{\Gamma}_{(M\in S/R_g)}$$

D'où

$$\overrightarrow{Rd}_{(S/R_g)} = \iiint_S \vec{\Gamma}_{(M\in S/R_g)} \, . dm = \iiint_S \left[\frac{d\vec{V}_{(M)}}{dt}\right]_{R_g} . dm$$

$$= \iiint_S \left[\frac{d\vec{V}_{(M\in S/R_g)}}{dt}\right]_{R_g} . dm = \left[\frac{d\left(m.\vec{V}_{(G\in S/R_g)}\right)}{dt}\right]_{R_g}$$

$$= \overrightarrow{Rd}_{(S/R_g)} = \left[\frac{d\,m}{dt}\right]_{R_g} . \vec{V}_{(G\in S/R_g)} + m \, . \left[\frac{d\left(\vec{V}_{(G\in S/R_g)}\right)}{dt}\right]_{R_g}$$

Cas du solide à masse conservative : $\left[\frac{d\,m}{dt}\right]_{R_g} = 0.$

On a alors : $\overrightarrow{Rd}_{(S/R_g)} = m \, . \left[\frac{d\left(\vec{V}_{(G\in S/R_g)}\right)}{dt}\right]_{R_g}$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{Rd}_{(S/R_g)} = m \, . \vec{\Gamma}_{(G\in S/R_g)}}$

Ainsi la résultante dynamique est la dérivée de la résultante cinétique par rapport au temps.

32- Relation entre les moments dans le cas du solide.

Soit A un point choisi arbitrairement, et soit G le centre d'inertie de (E).

$$\vec{\delta}_{A(S/R_g)} = \iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}_{(M/R_g)}.dm$$

Nous pouvons écrire dans le cas du solide:

$$\vec{\delta}_{A(S/R_g)} = \iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}_{(M\in S/R_g)}.dm$$

Si on écrit :

$$\vec{\delta}_{A(S/R_g)} = \iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge \frac{d\left(\vec{V}_{(M\in S/R_g)}\right)}{dt}.dm$$

$$= \iiint_S \left[\frac{d\left(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{(M\in S/R_g)}\right)}{dt}\right]_{R_g} - \left[\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right]_{R_g} \wedge \vec{V}_{(M\in S/R_g)}.dm$$

Avec :

$$\iiint_S \left[\frac{d\left(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{(M\in S/R_g)}\right)}{dt}\right]_{R_g} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_{A(S/R_g)}}{dt}\right]_{R_g}$$

Soit O le centre du repère R_g

Soit A un point géométrique connu qui n'appartient pas forcément à S

M lui est un point courant de S donc $\vec{V}_{M/S} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} \Rightarrow \left[\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right]_{R_g} = -\vec{V}_{A/R_g} + \vec{V}_{M/R_g} = -\vec{V}_{A/R_g} + \vec{V}_{M\in S/R_g}$$

On a alors :

$$\vec{\delta}_{A(S/R_g)} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_{A(S/R_g)}}{dt}\right]_R + \vec{V}_{A/R_g} \wedge \iiint_S \vec{V}_{(M\in S/R_g)}.dm$$

D'où on obtient finalement :

$$\boxed{\vec{\delta}_{A(S/R_g)} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_{A(S/R_g)}}{dt}\right]_R + \vec{V}_{A/R_g} \wedge m.\vec{V}_{G\in S/R_g}}$$

Cas particulier : la relation ci-dessus permet d'énoncer :

- Si A est confondu avec G alors :

$$\vec{\delta}(G,E/R)=\frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}\left(G,S/R_g\right)\right)$$

- Si A est un point fixe de R alors :

$$\vec{\delta}(A,E/R)=\frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}\left(A,S/R_g\right)\right)$$

-Si $\vec{V}(A,E/R)$ est parallèle à $\vec{V}(G,E/R)$ alors :

$$\vec{\delta}(A,E/R)=\frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}\left(A,S/R_g\right)\right)$$

Remarque : le calcul du moment dynamique en G ou en un point fixe de R est souvent plus simple. Ainsi, pour déterminer le moment dynamique en un point quelconque, on le calculera en un point particulier, puis on fera un changement de point.

33- Ecriture du torseur dynamique dans le cas du solide

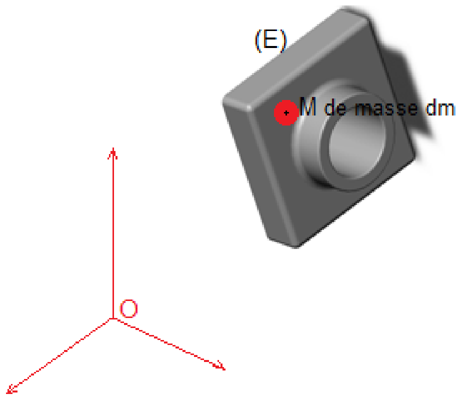
$$\boxed{\left\{\mathcal{D}_{(S/R_g)}\right\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{Rd}_{(S/R_g)}=m\,.\vec{\Gamma}_{(G\in S/R_g)}\\ \vec{\delta}_{A(S/R_g)}=\left[\dfrac{d\vec{\sigma}_{A(S/R_g)}}{dt}\right]_{R_g}+\vec{V}_{A/R_g}\wedge m.\vec{V}_{G\in S/R_g}\end{array}\right\}_A}$$

34- Ecriture du torseur dynamique d'un ensemble de solides

Soit (S) un système de n solides (S_i) en mouvement par rapport au repère Rg.

$$\boxed{\left\{\mathcal{D}_{(S/R_g)}\right\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{Rd}_{(S/R_g)}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{Rd}_{(S_i/R_g)}\\ \vec{\delta}_{A(S/R_g)}=\sum_{i=1}^{n}\vec{\delta}_{A(S_i/R_g)}\end{array}\right\}_A}$$

4- Principe fondamental de la dynamique.



Soit un système matériel E.

En tout point M de ce système, on associe à un volume élémentaire dv un scalaire positif dm tel que dm =r(M).dv, où r(M) est la masse volumique en ce point.

On peut caractériser le comportement de ce système matériel par différents torseurs.

$$\{D(E/R)\} \equiv \begin{Bmatrix} m\,.\vec{\Gamma}_{(G/R_g)} \\ \vec{\delta}(A,E/R) \end{Bmatrix}_A \text{ et } \{\tau(E/R)\} \equiv \begin{Bmatrix} \vec{R}(\bar{E} \to E) \\ \overrightarrow{M_A}(\bar{E} \to E) \end{Bmatrix}_A$$

41- Enoncé.

Il existe au moins un repère Rg, appelé repère galiléen et au moins une chronologie, appelée chronologie galiléenne, tels que pour tout sous-ensemble (e) d'un ensemble matériel (E), le torseur dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à Rg soit égal au torseur des actions mécaniques extérieures à (e).

Notons $(\bar{E})$ l'extérieur de (E)

$$\boxed{\{D(E/R_g)\} = \{\tau(\bar{E} \to E)\}}$$

42- Théorèmes généraux de la dynamique dans le cas du solide.

Soit S un solide en mouvement par rapport à un référentiel galiléen, les torseurs dynamique et d'action mécanique de l'extérieur de S sur S seront notés comme suit :

$$\{D(E/R)\} \equiv \begin{Bmatrix} m\,.\vec{\Gamma}_{(G\in S/R_g)} \\ \vec{\delta}(A,S/R) \end{Bmatrix}_A \text{ et } \{\tau(E/R)\} \equiv \begin{Bmatrix} \vec{R}(\bar{S} \to S) \\ \overrightarrow{M_A}(\bar{S} \to S) \end{Bmatrix}_A$$

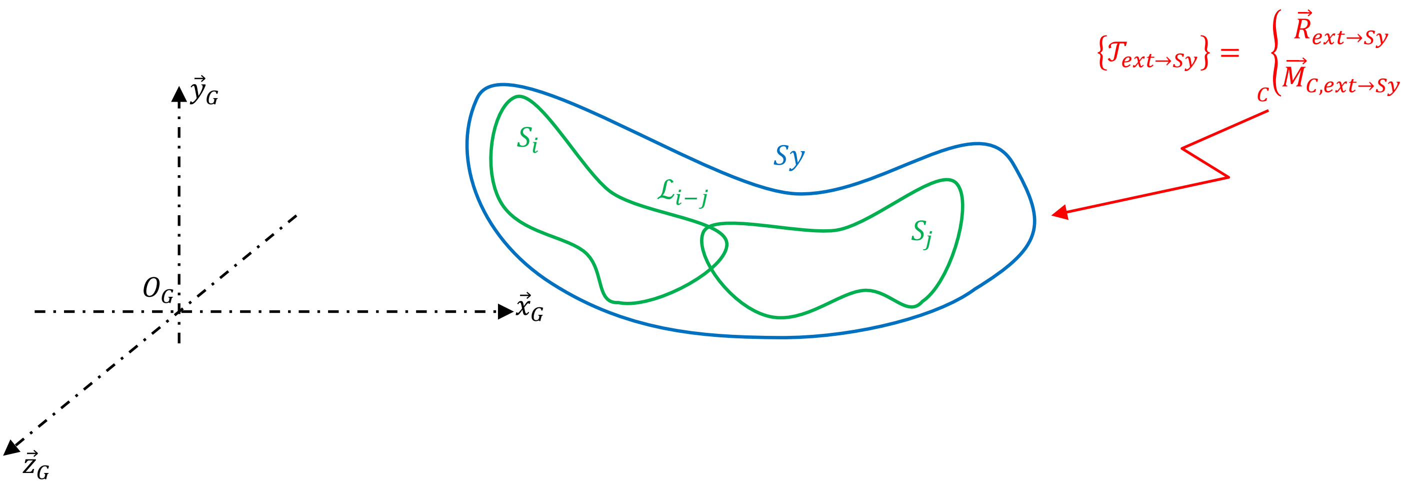
421- Théorème de la résultante dynamique.

$$\boxed{m\,.\vec{\Gamma}_{(G\in S/R_g)} = \vec{R}(\bar{S} \to S)}$$

422- Théorème du moment dynamique

$$\boxed{\vec{\delta}(A,S/R) = \overrightarrow{M_A}(\bar{S} \to S)}$$

43- Cas d'un ensemble de solides.



Soit Sy un ensemble de solide isolé soumis à des actions mécanique dues à l'environnement extérieur noté Ext tel que :

$$Sy = \{S_1, S_2, \dots S_i, S_j, \dots, S_n\} \quad \text{Et} \quad Ext = \overline{Sy}$$

- Le PFD appliqué à S_i s'écrit : $\left\{\mathcal{T}_{ext\to S_i}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{S_j\to S_i}\right\} = \mathcal{D}_{(S_i/R_g)} \Leftrightarrow (i)$
- Le PFD appliqué à S_j s'écrit : $\left\{\mathcal{T}_{ext\to S_j}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{S_i\to S_j}\right\} = \mathcal{D}_{(S_j/R_g)} \Leftrightarrow (j)$

$$(1) + \cdots + (i) + (j) + \cdots (n)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\mathcal{T}_{ext\to S_1}\right\} + \cdots + \left\{\mathcal{T}_{ext\to S_i}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{ext\to S_j}\right\} + \cdots + \left\{\mathcal{T}_{ext\to S_n}\right\}$$
$$= \mathcal{D}_{(S_1/R_g)} + \cdots + \mathcal{D}_{(S_i/R_g)} + \mathcal{D}_{(S_j/R_g)} + \cdots + \mathcal{D}_{(S_n/R_g)}$$

Finalement, le PFD appliqué à Sy s'écrit :

$$\boxed{\left\{\mathcal{T}_{ext\to Sy}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \left\{\mathcal{D}_{(S_k/R_g)}\right\}}$$

44- Equations de mouvement.

Soit un ensemble matériel (E) dont la position par rapport au repère galiléen Rg dépend de n paramètres $q_i(t)$ (i=1 à n). La projection sur un axe d'une équation vectorielle traduisant l'un des théorèmes généraux appliqué à (E) (ou à un de ses sous-ensembles), donne une équation différentielle du second ordre, non linéaire en général. Dans cette équation, peuvent figurer : les paramètres $q_i(t)$, leurs dérivées premières et secondes, les efforts s'exerçant sur (E).

Définition : les relations liant ces paramètres, leurs dérivées et **les efforts connus** sont appelées : **équations différentielles du mouvement.** Leur intégration permet de déterminer la loi du mouvement des éléments du système à partir des conditions initiales connues, on l'appelle **intégrale première du mouvement**

Compétences et objectifs

MODELISER	Déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
RESOUDRE	Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement
RESOUDRE	Proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison
RESOUDRE	Choisir une méthode pour déterminer la valeur des paramètres conduisant à des positions d'équilibre
RESOUDRE	Déterminer les inconnues de liaison ou les efforts extérieurs spécifiés dans le cas où le mouvement est imposé
RESOUDRE	Déterminer la loi du mouvement sous forme d'équations différentielles dans le cas où les efforts extérieurs sont connus