

D : Energétique.

L'actualité scientifique et industrielle est basée sur la notion d'énergie et d'économie de celle-ci par amélioration du rendement ou récupération des pertes

Exemple : voici la Porsche 911 GT3 R hybride, sans batterie, l'hybride avec un volant d'inertie.



Cette voiture ultra sportive de 500cv utilise un accumulateur mécanique pour améliorer son rendement.



En effet l'énergie peut être récupérée au moment du freinage et restituée lors des phases d'accélération.



Le volant d'inertie (photo de gauche) est bien visible dans l'habitacle comme le montre la photo de droite.

Le but sera donc de qualifier les énergies mises en jeu au court du fonctionnement et de faire lien avec l'apport de puissance ainsi effectué au court des phases d'accélération.

Les relations que nous allons mettre en place vont permettre par exemple :

- de **déterminer la puissance minimale d'un actionneur** destiné à mettre en mouvement un solide au travers d'une chaîne cinématique,
- de calculer le **rendement** d'un mécanisme,
- d'exprimer la conservation de l'énergie cinétique d'un réducteur ou d'un variateur pour **déterminer le moment** d'un couple récepteur.

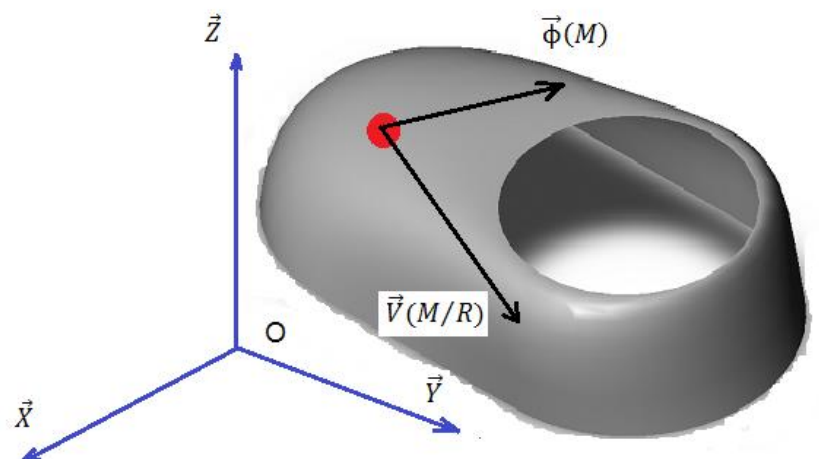
1-Puissance.

11- Puissance d'un champ de forces.

Considérons un champ de forces agissant sur un système (E) en mouvement par rapport à un repère R et défini par une densité $\vec{\Phi}$ relativement à une mesure μ .

Ainsi, à chaque point M du système (E) on associe le glisseur :

$$\left\{ \begin{array}{c} d\vec{F} = \vec{\Phi}(M)d\mu \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$$



Le torseur résultant de ces actions sur (E), réduit au point A, est alors :

$$\{F(\Phi \rightarrow E)\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \int_E \vec{\Phi}(M) d\mu \\ \int_E \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Phi}(M) d\mu \end{array} \right\}_A$$

Définition : la **puissance** développée à un instant t par le champ de forces de densité $\vec{\Phi}$ relativement à une mesure μ , appliqué au système (E) en mouvement par rapport au repère R_0 est :

$$P(\Phi \rightarrow E / R_0) = \int_E \vec{\Phi}(M) \cdot \vec{V}(M / R_0) d\mu$$

Remarque : il existe de nombreux exemples de champs de forces :

Champ de pesanteur : (champ volumique).

$\vec{\Phi}(M) = \rho \vec{g}(M) \Rightarrow d\vec{F} = \rho \vec{g}(M) dV$ avec $\vec{g}(M)$ est l'accélération de la pesanteur en M , avec $\mu = V$

12-Cas du solide.

Au mouvement du solide (S) correspond le torseur cinématique suivant :

$$\{V(S/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(A \in S/R_0) \end{array} \right\}_A$$

On définit un torseur d'action mécanique :

$$\{F(\phi \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\phi \rightarrow S) \\ \vec{M}_A(\phi \rightarrow S) \end{array} \right\} \quad (\text{Dans notre cas la mesure } d\mu = dm)$$

Donc la puissance s'écrit :

$$\begin{aligned} P(\phi \rightarrow S/R_0) &= \int \vec{\phi}(M) \cdot \vec{V}(M \in S/R_0) dm = \int \vec{\phi}(M) \cdot (\vec{V}(A \in S/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}) dm = \\ &= \int \vec{\phi}(M) \cdot \vec{V}(A \in S/R_0) dm + \int \vec{\Omega}(S/R_0) \cdot (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{\phi}(M)) dm = \\ &= (\vec{V}(A \in S/R_0) \cdot \int \vec{\phi}(M) \cdot dm + \vec{\Omega}(S/R_0) \cdot \int (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{\phi}(M)) dm = \\ &= (\vec{V}(A \in S/R_0) \cdot \vec{R}(\phi \rightarrow S) + \vec{\Omega}(S/R_0) \cdot \vec{M}_A(\phi \rightarrow S)) \end{aligned}$$

D'où on obtient :

$$P(\phi \rightarrow S/R_0) = \{F(\phi \rightarrow S)\} \otimes \{V(S/R_0)\}$$

La puissance développée par une action mécanique ϕ sur S, (S étant en mouvement par rapport à R_0) est égale au produit du torseur d'action mécanique ϕ sur S par le torseur cinématique du mouvement de S/ R_0 .

Remarques.

Ce résultat ne peut être appliqué que dans le cas de forces agissant sur un solide indéformable, ou d'un système de solides rigidement liés entre eux. Dans le cas des corps déformables, il faut utiliser le calcul intégral posé dans la définition.

Le comoment des deux torseurs ne dépend pas du point A choisi, mais bien entendu, le calcul doit être effectué lorsque les deux torseurs sont réduits en un même point.

La valeur de la puissance dépend bien entendu du repère dans lequel le système se déplace.

13- Puissance développée par une action mutuelle entre deux solides.

131 Puissance des inter-efforts de liaison.

Considérons la liaison entre deux solides (S1) et (S2). La puissance totale développée par les efforts de liaison entre deux solides (S1) et (S2), encore appelée puissance des inter-efforts de la liaison, s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned} P(S2 \rightarrow S1 / R_0) + P(S1 \rightarrow S2 / R_0) &= \{F(S2 \rightarrow S1)\} \{ \tau(S1 / R_0) \} + \{F(S1 \rightarrow S2)\} \{ \tau(S2 / R_0) \} \\ &= \{F(S1 \rightarrow S2)\} \{ \tau(S2 / R_0) \} - \{ \tau(S1 / R_0) \} \{F(S1 \rightarrow S2)\} \\ &= \{F(S1 \rightarrow S2)\} \{ \tau(S2 / S1) \} \\ &= \vec{R}(S1 \rightarrow S2) \cdot \vec{V}(A, S2 / S1) + \vec{M}_A(S1 \rightarrow S2) \cdot \vec{\Omega}(S2 / S1) \end{aligned}$$

Remarque : cette puissance est indépendante du repère R_0 par rapport auquel elle est calculée. On la notera :

$$P_i(S1, S2) = P(S1 \leftrightarrow S2 / R_0) = P(S2 \rightarrow S1 / R_0) + P(S1 \rightarrow S2 / R_0) = \{F(S1 \rightarrow S2)\} \{ \tau(S2 / S1) \}$$

132- Liaison énergétiquement parfaite.

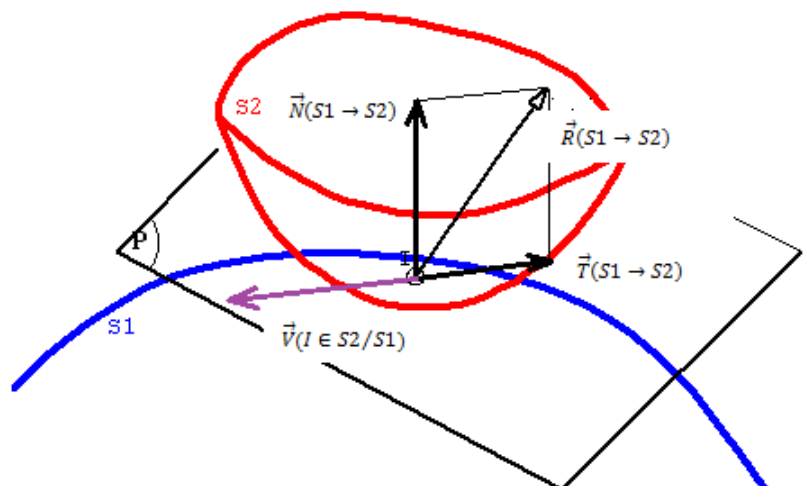
La liaison entre deux solides (S1) et (S2) est énergétiquement parfaite si : quel que soit le mouvement de S2 par rapport à S1 autorisé par la liaison, la puissance des actions mutuelles entre S1 et S2 est nulle :

$$P(S1 \leftrightarrow S2) = 0$$

Exemple :

Soit deux solides S1 et S2 en contact ponctuel en I avec frottement (on donne $f = \tan \phi$).

Le contact est supposé rigoureusement ponctuel.



On donne :

$$\{F(S1 \rightarrow S2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(S1 \rightarrow S2) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$$

$$\{V(S2/S1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S2/S1) \\ \vec{V}(I \in S2/S1) \end{array} \right\}_I$$

De plus d'après la figure on peut écrire :

$$\vec{R}(S1 \rightarrow S2) = \vec{N}(S1 \rightarrow S2) + \vec{T}(S1 \rightarrow S2)$$

En utilisant les lois de Coulomb sur le frottement on peut écrire :

$$P_i(S1, S2) = P(S1 \leftrightarrow S2) = \vec{T}(S1 \rightarrow S2) \vec{V}(I \in S2/S1).$$

Ce produit est négatif : **donc cette puissance est exclusivement perdue.**

Cette puissance sera nulle si :

- le contact a lieu sans frottements
- si le mouvement a lieu sans glissement.

14- Définition du travail d'une action.

On considère deux systèmes matériels E et E'. E' exerce sur E une action mécanique et E est en mouvement par rapport à un repère R.

On appelle travail, entre les dates t1 et t2 , de l'action mécanique de S sur E, dans le mouvement de E par rapport à R, l'expression :

$$W_{t1}^{t2}(E' \rightarrow E/R) = \int_{t1}^{t2} P(E' \rightarrow E/R) dt$$

Par dérivation de cette expression, on obtient le travail élémentaire entre deux dates t et t+dt

$$dW(E' \rightarrow E/R) = P(E' \rightarrow E/R)dt$$

Unité de travail : le Joule, « J » = N.m.

Unité de puissance : le Watt, « W » = J.s-1

2- Théorème de l'énergie cinétique.

Le théorème de l'énergie cinétique constitue l'une des traductions énergétiques du principe fondamental de la dynamique. Démontrons ce théorème pour un solide, puis pour un ensemble de solides.

21- Pour un solide.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un solide (S), de masse m, dans son mouvement par rapport à un repère galiléen Rg s'écrit :

$$\{D(S/Rg)\} = \{F(\bar{S} \rightarrow S)\}.$$

Multiplions les deux membres de cette relation par le torseur cinématique de (S) par rapport à Rg : $\{D(S/Rg)\} \cdot \{\tau(S/Rg)\} = \{F(\bar{S} \rightarrow S)\} \cdot \{\tau(S/Rg)\}.$

Le membre de droite représente la puissance des actions mécaniques extérieures à (S) s'exerçant sur (S), dans son mouvement par rapport à Rg, soit $P(\bar{S} \rightarrow S/Rg)$. Cette puissance est appelée **puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (S)**.

Pour obtenir le membre de gauche, écrivons les éléments de réduction de chaque torseur en un même point A lié au solide (S).

$$\{D(S/Rg)\} \cdot \{\tau(S/Rg)\} = \left\{ \begin{array}{c} \int_{M \in S} \vec{\Gamma}(M \in S/Rg) dm \\ \int_{M \in S} \vec{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M \in S/Rg) dm \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S/Rg) \\ \vec{V}(A \in S/Rg) \end{array} \right\}_A$$

Ce comoment de deux torseurs vaut :

$$\vec{V}(A \in S/Rg) \cdot \int_{M \in S} \vec{\Gamma}(M \in S/Rg) dm + \vec{\Omega}(S/Rg) \cdot \int_{M \in S} \vec{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M \in S/Rg) dm$$

$$\text{en remplaçant } \vec{V}(A \in S/Rg) \text{ par } \vec{V}(M \in S/Rg) + \vec{\Omega}(S/Rg) \wedge \vec{MA}$$

Après l'avoir introduit sous le signe somme, l'expression précédente se simplifie pour se mettre sous la forme :

$$\int_{M \in S} \vec{\Gamma}(M \in S/Rg) \cdot \vec{V}(M \in S/Rg) dm \text{ de plus, comme :}$$

$$\vec{\Gamma}(M/Rg) \cdot \vec{V}(M/Rg) = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(M \in S/Rg) \right]_{Rg} \cdot \vec{V}(M/Rg) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\vec{V}(M \in S/Rg)]^2$$

$$\text{on peut écrire que : } \int_{M \in S} \vec{\Gamma}(M \in S/Rg) \cdot \vec{V}(M \in S/Rg) dm = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left[\int_{M \in S} [\vec{V}(M \in S/Rg)]^2 dm \right]$$

Ce qui fait apparaître l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à Rg : $T(S/Rg)$ d'où : $\int_{M \in S} \vec{\Gamma}(M \in S/Rg) \cdot \vec{V}(M \in S/Rg) dm = \frac{d}{dt} T(S/Rg).$

Par suite, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit pour un solide :

$$\frac{d}{dt} T(S/Rg) = P(\bar{S} \rightarrow S/Rg)$$

Enoncé : la dérivée, par rapport à la date t, de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide (S) est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (S).

22- Pour un ensemble de solides.

Soit un ensemble (E) de n solides (S1), (S2),, (Sn) en mouvement par rapport à un repère galiléen Rg. Pour un solide (Si) de (E) le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$\frac{d}{dt} T(Si / Rg) = P(\bar{S}i \rightarrow Si / Rg)$, ajoutons membre à membre les n relations analogues à celle-ci, écrites pour les n solides ; on obtient :

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n T(Si / Rg) = \sum_{i=1}^n P(\bar{S}i \rightarrow Si / Rg)$$

Le membre de gauche représente la dérivée, par rapport à la date t, de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble (E) de solides, notée : $\frac{d}{dt} T(E / Rg)$. Le membre de droite représente la somme des puissances des actions mécaniques extérieures à chaque solide de (E), ou si l'on veut, la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (E) et des puissances des actions mutuelles entre chaque solide de (E). On l'écrira :

$$P(\bar{E} \rightarrow E / Rg) + \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i < j}}^n P_i(Si, Sj)$$

Par suite le théorème de l'énergie cinétique s'écrit pour un ensemble de solides :

$$\frac{d}{dt} T(E / Rg) = P(\bar{E} \rightarrow E / Rg) + \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i < j}}^n P_i(Si, Sj)$$

Enoncé : la dérivée, par rapport à la date t, de l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble (E) de solides, est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (E) et des puissances des actions mutuelles entre chaque solide de (E).

23- Remarques.

- Le théorème de l'énergie cinétique n'est valable qu'à condition de tenir compte dans le calcul de la puissance, des actions mutuelles entre les solides de (E), donc intérieures à (E). Il y a là une différence essentielle avec le principe fondamental de la dynamique.

- Vu la construction du théorème de l'énergie cinétique, l'équation obtenue n'est pas indépendante des équations scalaires fournies par le principe fondamental de la dynamique. Par contre, elle se substitue souvent avantageusement à l'une d'entre elles.

- l'application du principe fondamental de la dynamique donne six équations scalaires indépendantes et l'application du théorème de l'énergie cinétique n'en donne qu'une. Par conséquent, l'application du théorème de l'énergie cinétique est généralement insuffisante, à elle seule, pour résoudre un problème de dynamique.

- Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit aussi en faisant intervenir le travail des actions mécaniques entre deux instants t1 et t2 :

$$\begin{aligned} T_2(E / Rg) - T_1(E / Rg) &= W_{t_1}^{t_2}(\bar{E} \rightarrow E / Rg) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n W_{t_1}^{t_2}(Si, Sj) \\ &= W_{t_1}^{t_2}(\bar{E} \rightarrow E / Rg) + W_{t_1}^{t_2}(E) \text{ avec } W_{t_1}^{t_2}(E) \text{ travail des efforts intérieurs à (E).} \end{aligned}$$

3 : Inertie équivalente ou masse équivalente d'un système matériel.

Position du problème.

Un système matériel (E) est constitué de n solides (S_i) en mouvement par rapport à un repère supposé galiléen que l'on notera R_0 .

L'énergie cinétique d'un tel système (E) par rapport au repère R_0 est définie par l'expression suivante :

$$T(E/R_0) = \frac{1}{2} \int \vec{V}(M \in S/R_0)^2 dm = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \int \vec{V}(M \in S_i/R_0)^2 dm$$

Donc : $T(E/R_0) = \sum_{i=1}^n T(S_i/R_0)$

Lorsqu'il existe des relations cinématiques entre les solides, il peut être intéressant d'exprimer l'énergie cinétique de E en fonction d'une seule variable sous la forme :

$$T(E/R_0) = \frac{1}{2} I_{eq} \omega^2$$

Dans cette forme le « I_{eq} » est appelé **inertie équivalente** de la chaîne de solides ramenée au solide définissant le paramètre ω .

Remarque : si l'on met l'énergie cinétique sous la forme $T(E/R_0) = \frac{1}{2} m_{eq} V^2$ alors « m_{eq} » sera appelée **masse équivalente**.

Exemple ascenseur :

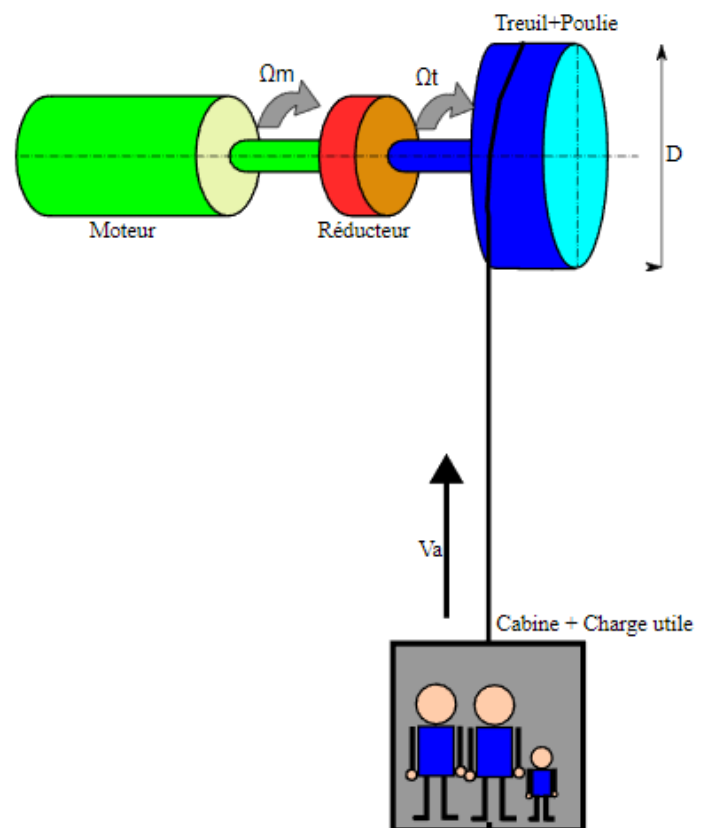
La cabine de masse M est entraînée par un ensemble motoréducteur plus poulie dont les caractéristiques sont les suivantes, rapport de réduction du réducteur $\rho < 1$, on donne I_m , I_r et I_p les inerties respectives du moteur du réducteur et de la poulie.

Le reste des données est présent sur la figure.

Donner les relations existant entre les différentes vitesses.

Donner l'inertie équivalente de l'ensemble ramenée sur l'arbre moteur

Donner la masse équivalente ramenée à la vitesse de la cabine.



4 : Rendement d'une transmission de puissance

Problématique :



L'énergie transformée par un actionneur ou un transmetteur n'est que rarement utilisable dans son intégralité en effet ces éléments changent les caractéristiques de cette énergie (ils modifient la vitesse, le couple), et ces changements ne se font pas sans « égarer » de l'énergie en chemin, c'est ce qui devra être qualifié par la notion de rendement.

Définition :

Le rendement est le rapport entre la puissance de sortie et la puissance d'entrée (respectivement nommée puissance utile et puissance absorbée)

$$\eta = \frac{\text{puissance de sortie}}{\text{puissance d'entrée}}$$

(η se prononce éta)

Remarque :

Bien évidemment le rendement est toujours inférieur ou égale à 1.

Remarque :

On trouve souvent plusieurs écritures équivalentes.

$$\eta = \frac{\text{puissance de sortie}}{\text{puissance d'entrée}} = \frac{\text{Travail en sortie}}{\text{travail en entrée}} = \frac{P_s}{P_e} = \frac{E_s}{E_e}$$

Exemple :

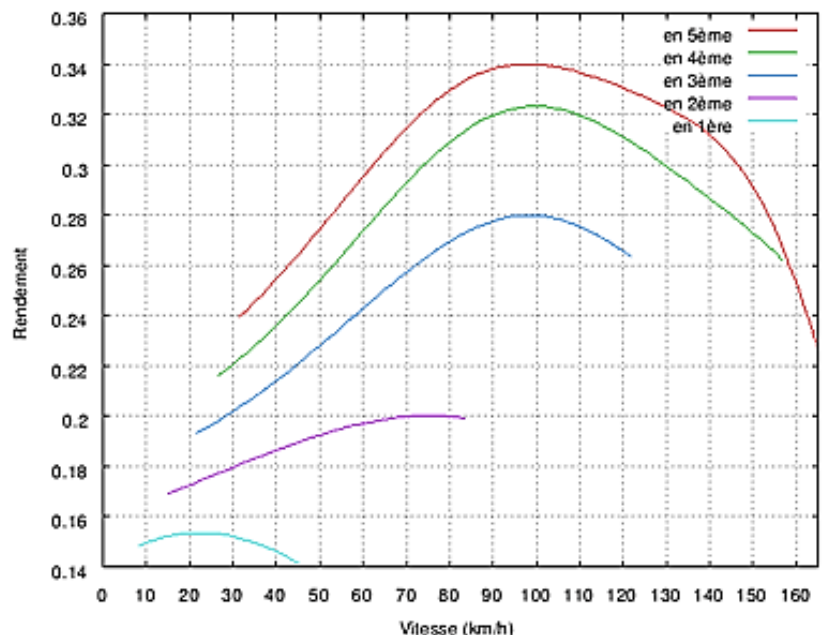
Voici les courbes du rendement de la Toyota Yaris (voiture citadine) en fonction de la vitesse du véhicule et du rapport de boîte enclenché.

On peut remarquer qu'il n'excède jamais 34%.

On pourra donc évidemment conclure que la notion de rendement est une notion vitale dans la conception des systèmes multiphysiques actuels, c'est effet cela qui va conditionner la consommation de la voiture par exemple.

Il conviendra donc de toujours rester lucide sur nos modélisations lorsque nous considérons nos systèmes comme « parfaits ».

Et c'est ce qui explique les nombreuses tentatives de récupération des énergies perdues de fonctionnement.



Compétences et objectifs

MODELISER	Associer les grandeurs physiques aux échanges d'énergie et à la transmission de puissance
MODELISER	Identifier les pertes d'énergie
MODELISER	Évaluer le rendement d'une chaîne d'énergie en régime permanent
MODELISER	Déterminer la puissance des actions mécaniques extérieures à un solide ou à un ensemble de solides, ou à un ensemble de solides
MODELISER	Déterminer la puissance des actions mécaniques intérieures à un ensemble de solides