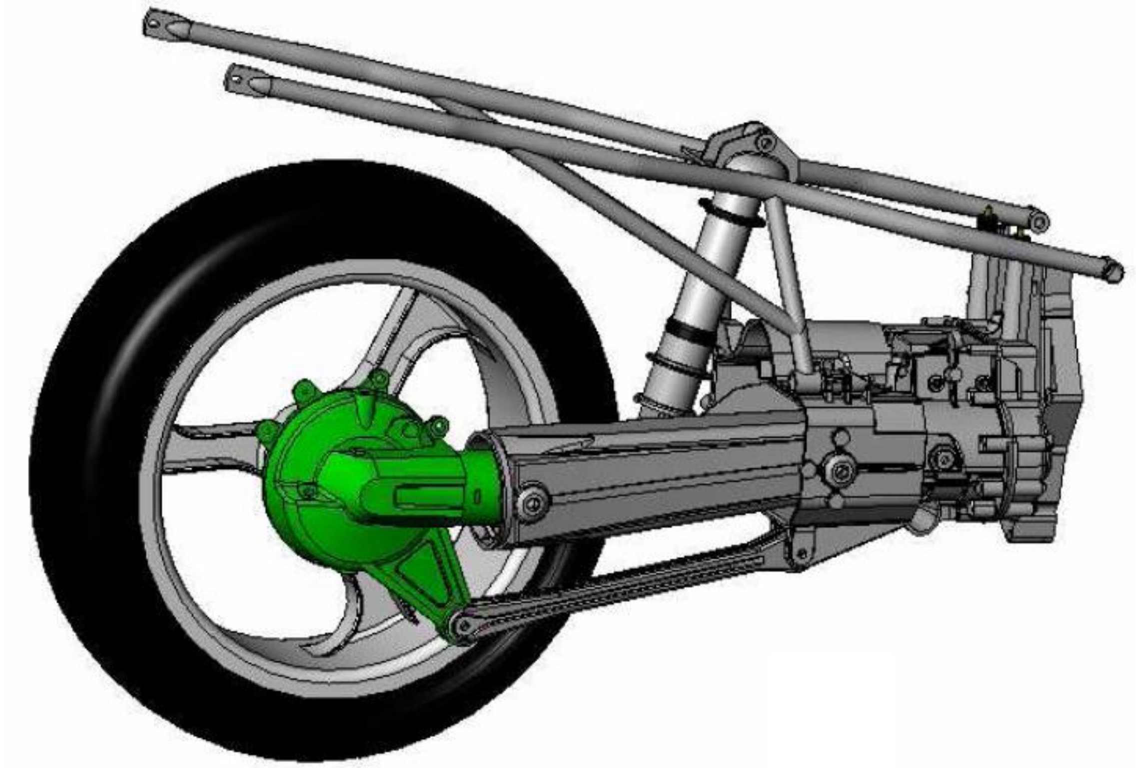
E : Equilibrage dynamique.

Problème d'équilibrage.

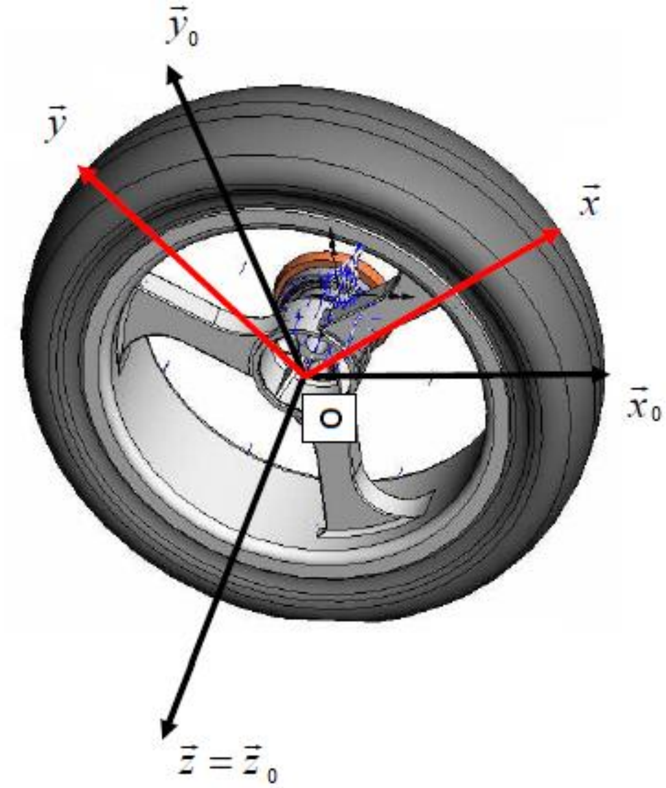
Lors de la rotation d'un solide autour d'un axe fixe, des efforts sont créés par effet dynamique. Ils sollicitent les paliers (liaison pivot avec le bâti) de manière cyclique : cela entraîne donc des vibrations et une usure accélérée des pièces.

Ce problème se rencontre dans des cas très courants comme les roues des véhicules, intéressons-nous au cas posé par une roue arrière de motocyclette BMW dont voici le train arrière.



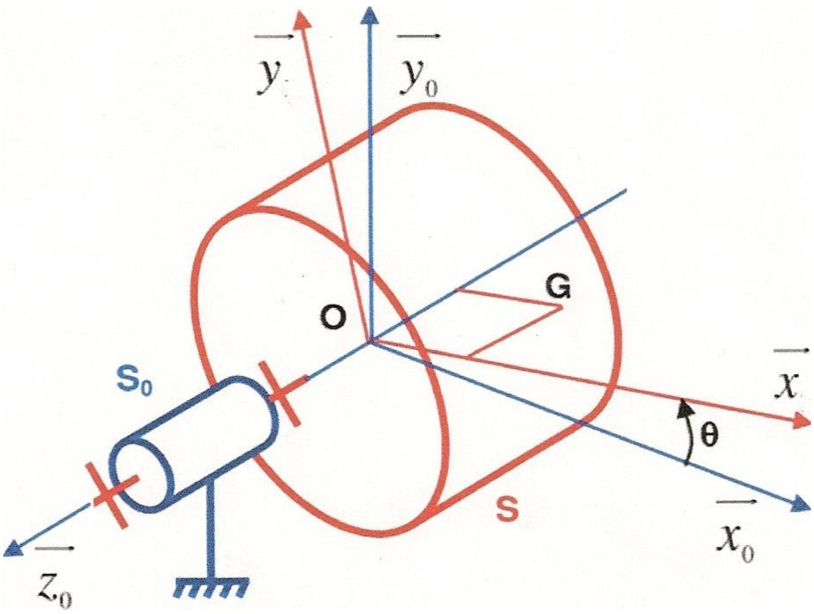
Solide en rotation autour d'un axe fixe : équilibrage dynamique.

Voici la roue issue du système choisi



1- Schématisation.

Soit un bâti (S0) auquel est lié le repère galiléen $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$. Un solide (S) de masse m, de centre d'inertie G, a une liaison pivot sans frottement d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec (S0).



Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à (S) choisi, pour simplifier les calculs, de telle façon que le plan $(O, \overrightarrow{z_0}, \vec{x})$ contienne le point G.

$(\overrightarrow{x_0}, \vec{x}) = \theta$ et $\overrightarrow{OG} = a.\vec{x} + c.\overrightarrow{z_0}$

Le solide (S) étant quelconque, la matrice d'inertie de (S) au point O, dans la base de R, est de la forme :

$$I(O,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)}$$

L'action mécanique (inconnue) exercée par (S0) sur (S) est représentée, au point O, par le torseur :

$\{F(S_0 \to S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_O \end{Bmatrix}_O$ Posons : $\begin{cases} \vec{R} = X.\vec{x} + Y.\vec{y} + Z.\vec{z} \\ \vec{M}_O = L.\vec{x} + M.\vec{y} \end{cases}$

Sur (S) s'exerce également l'action mécanique, supposée connue, d'un ensemble matériel (E), représentée au point O, par le torseur :

$\{F(E \to S)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} \\ \vec{M}_{1O} \end{Bmatrix}_O$ Posons : $\begin{cases} \vec{R} = X_1.\vec{x} + Y_1.\vec{y} + Z_1.\vec{z} \\ \vec{M}_{1O} = L_1.\vec{x} + M_1.\vec{y} + N_1.\vec{z} \end{cases}$

Lorsque (S) est la roue d'un véhicule, (E) est constitué, par exemple, par la route, la pesanteur, l'arbre de transmission...

2- Action mécanique de (S0) sur (S).

Le torseur d'action mécanique de (S0) sur (S) s'obtient en appliquant le principe fondamental de la dynamique à (S) dans son mouvement par rapport à R_0.

$\{D(S/R_0)\} = \{F(\bar{S} \to S)\}$ Sachant que $(\bar{S})$ est constitué de (S0) et (E), cette égalité s'écrit :

$\{D(S/R_0)\} = \{F(S_0 \to S)\} + \{F(E \to S)\}$; écrivons les équations vectorielles obtenues:

$$\begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}(G \in {}^{S}/_{R_0} \\ \vec{\delta}(O, {}^{S}/_{R_0} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_O \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} \\ \vec{M}_{1O} \end{Bmatrix}_O$$

D'où les deux équations vectorielles suivantes :

$$m\vec{\Gamma}\left(G \in {}^{S}/_{R_0}\right) = \vec{R} + \overrightarrow{R_1}$$

$$\vec{\delta}\left(O, {}^{S}/_{R_0}\right) = \vec{M}_O + \vec{M}_{1O}$$

En utilisant les données géométriques du problème on obtient les équations scalaires :

Avec : $\vec{V}\left(G \in {}^{S}/_{R_0}\right) = a\theta'\vec{y}$

Alors : $\vec{\Gamma}\left(G \in {}^{S}/_{R_0}\right) = a\theta''.\vec{y} - a\theta'^2\vec{x}$

Le point O étant fixe dans R_O, le moment dynamique $\vec{\delta}\left(O, {}^{S}/_{R_0}\right)$ se calcule à partir du moment cinétique $\vec{\sigma}(O, {}^{S}/_{R_0})$par la relation : $\vec{\delta}\left(O, {}^{S}/_{R_0}\right) = \frac{d\vec{\sigma}(O, {}^{S}/_{R_0})}{dt/Ro}$.

Le moment cinétique $\vec{\sigma}(O, {}^{S}/_{R_0})$ s'exprime en fonction de l'opérateur d'inertie par la relation : $\vec{\sigma}\left(O, {}^{S}/_{R_0}\right) = \bar{\bar{I}}_O . \vec{\Omega}(\mathrm{s/Ro})$ ce qui correspond à la multiplication matricielle suivante, sachant que $\vec{\Omega}(\mathrm{s/Ro}) = \theta' \vec{z}_0$.

$\vec{\sigma}\left(O, {}^{S}/_{R_0}\right) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta' \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ d'où : $\vec{\sigma}\left(O, {}^{S}/_{R_0}\right) = -E\theta'.\vec{x} - D\theta'.\vec{y} + C\theta'.\vec{z}_0$

.

Pour calculer le moment dynamique $\vec{\delta}\left(O, {}^{S}/_{R_0}\right)$, utilisons la base de dérivation du repère R.

d'où, avec l'expression de : $\vec{\sigma}\left(O, {}^{S}/_{R_0}\right)$ on obtient :

$$\vec{\delta}\left(O, {}^{S}/_{R_0}\right) = \frac{d\vec{\sigma}(O, {}^{S}/_{R_0})}{dt/R} + \vec{\Omega}(\mathrm{s/Ro}) \wedge \vec{\sigma}\left(O, {}^{S}/_{R_0}\right)$$

$$\vec{\delta}\left(O, {}^{S}/_{R_0}\right) = -E\theta''.\vec{x} - D\theta''.\vec{y} + C\theta''.\vec{z}_0 + \theta'\vec{z}_0 \wedge = -E\theta'.\vec{x} - D\theta'.\vec{y} + C\theta'.\vec{z}_0$$

D'où $\vec{\delta}\left(O, {}^{S}/_{R_0}\right) = \left(-E\theta'' + D\theta'^2\right)\vec{x} - (E\theta'^2 + D\theta'')\vec{y} + C\theta''.\vec{z}_0$

En rassemblant les résultats précédents déduits du principe fondamental de la dynamique, on peut écrire en projetant sur la base de R :

Sur $\vec{x} \rightarrow$	$-ma\theta'^2 = X + X_1$	et simultanément :	$-E\theta'' + D\theta'^2 = L + L_1$
Sur $\vec{y} \rightarrow$	$ma\theta'' = Y + Y_1$	et simultanément :	$-D\theta'' - E\theta'^2 = M + M_1$
Sur $\vec{z} \rightarrow$	$0 = Z + Z_1$	et simultanément :	$C\theta'' = N_1$

Equations à partir desquelles on peut exprimer facilement X, Y, Z, L, M.

3- Conditions d'équilibrage dynamique.

Pour éviter les vibrations, il faut rendre l'action mécanique dans la liaison entre (S) et (S0) aussi **constante que possible**. En particulier, indépendante du mouvement de (S) par rapport à (S0), c'est à dire de θ' et θ''.

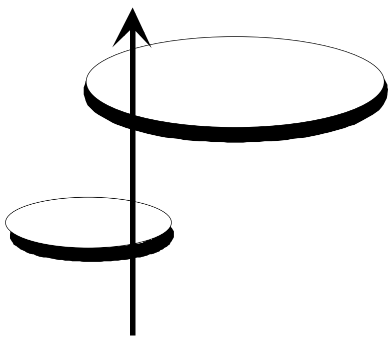
D'après les équations précédentes, les conditions d'équilibrage dynamique sont donc :

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{a} = 0 : \text{le centre d'inertieG est sur l'axe } \left(\mathrm{O}, \overrightarrow{Z_0}\right) \\ \mathrm{D} = \mathrm{E} = 0 : \text{l'axe } \left(\mathrm{O}, \overrightarrow{Z_0}\right) \textit{ est axe principal d'inertie.} \end{cases}}$$

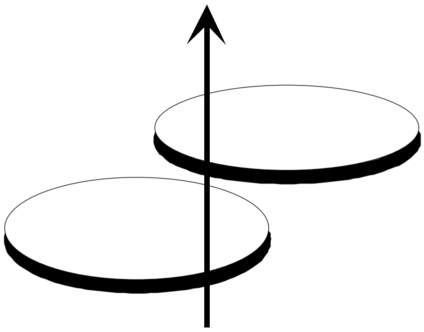
Remarques.

- Dans un équilibrage statique (a=0), seule la résultante générale de l'action mécanique de (S0) sur (S) est indépendante du mouvement de (S) par rapport à (S0).

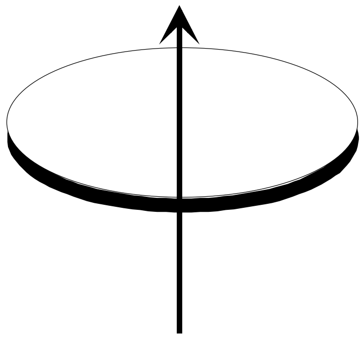
- D'une façon imagée, nous pouvons résumer les conditions d'équilibrage par les figures suivantes.



(a) solide non équilibré.



(b) solide équilibré statiquement, mais non équilibré dynamiquement.



(c) solide équilibré dynamiquement.

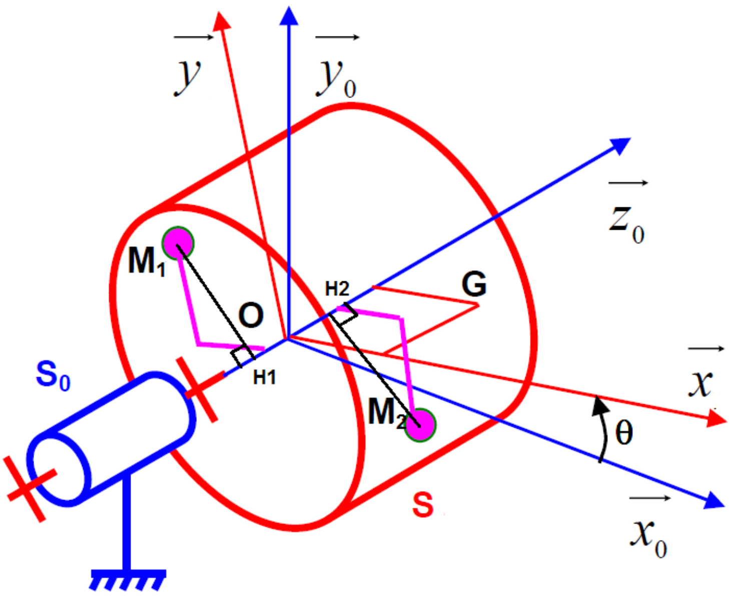
4- Réalisation pratique de l'équilibrage dynamique.

On remplace (S) par un solide (S') constitué de (S) et de deux solides (S1) et (S2), assimilables à des points matériels, tel que (S') soit dynamiquement équilibré.

Soit mi la masse du solide (Si) (i=1 et 2) placé au point Mi de coordonnées cartésiennes xi, yi, zi dans le repère R.

Notons G' le centre d'inertie de (S'), D' et E' les produits d'inertie de (S') par rapport aux axes du repère R.

(S') est dynamiquement équilibré si G' est sur l'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$ et si D'=0 et E'=0.



Traduisons ces conditions.

La position du centre d'inertie G' est donnée par la relation :

$$\overrightarrow{OG'} = \frac{m\overrightarrow{OG} + m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{m + m_1 + m_2}.$$

Si G' est sur l'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$ cette équation vectorielle s'écrit en projection sur :

$\vec{x} \rightarrow \; ma + m_1x_1 + m_2x_2 = 0$
$\vec{y} \rightarrow \; m_1y_1 + m_2y = 0$

Les deux produits d'inertie D' et E' ont pour valeur

$D' = D + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2$
$E' = E + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2$

Si ces deux produits sont nuls on obtient les deux relations supplémentaires suivantes :

$D + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2 = 0$
$E + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 = 0$

Remarque : si D est différent de zéro (cas général) l'équilibrage dynamique ne peut se faire avec une seule masse. En effet, si par exemple $m_2 = 0$ à partir des relations précédentes, on obtient : $y_1 = 0$ et donc D=0 ce qui est incompatible avec l'hypothèse de départ.

On dispose de quatre équations pour déterminer les huit inconnues x_i, y_i, z_i et m_i pour $i = 1$ et 2. Le problème admet une infinité de solutions, il faut donc se fixer quatre conditions. Examinons ces conditions dans le cas de l'équilibrage dynamique de la roue de véhicule de notre exemple. Dans ce type d'équilibrage les masses sont fixées sur le bord de la jante, de chaque côté de la roue.

Notons H_i, la projection orthogonale du point M_i, sur l'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$ et posons :

$\theta_i = \left(\vec{x}, \overrightarrow{H_iM_i}\right)$ et $r_i = \left\|\overrightarrow{H_iM_i}\right\|$

Remplaçons les coordonnées cartésiennes x_i, y_i, z_i du point M_i par les coordonnées cylindriques r_i, θ_i, z_i. Les quatre conditions imposées sont les valeurs des paramètres z_1, z_2, r_1, r_2 (généralement : $r_1 = r_2$) et les quatre inconnues sont : m_1, m_2, θ_1, θ_2. Inconnues que l'on détermine avec les quatre équations précédentes.

En éliminant m_2x_2 entre deux équations, on obtient : $m_1x_1(z_2 - z_1) = E - maz_2$.

En éliminant m_2y_2 entre deux équations, on obtient : $m_1y_1(z_2 - z_1) = D$.

Remarque: lorsque D n'est pas nul, la relation précédente montre que z_2 doit être différent de z_1. En effet, dans ce cas m_1 est différent de zéro, et y_1 n'est généralement pas nul. Ce qui veut dire que les deux masses doivent être situées dans deux plans de section droite de la roue distincts.

En remplaçant x_1 par $r_1\cos\theta_1$ et y_1 par $r_1\sin\theta_1$ dans la dernière relation, on a à résoudre le système en m_1 et θ_1 suivant :

$$\begin{cases} m_1r_1\cos\theta_1(z_2 - z_1) = E - maz_2 \\ m_1r_1\sin\theta_1(z_2 - z_1) = D \end{cases}$$

$$\Rightarrow (E - maz_2)\sin\theta_1 = D\cos\theta_1 \text{ et si } D \neq 0 :$$

$$\Rightarrow \mathrm{cotg}\theta_1 = \frac{E - maz_2}{D}$$

D'où on obtient θ_1 modulo Π, on trouve donc immédiatement m_1, puis les équations restantes permettent le calcul de m_2 et θ_2.

Remarques : Au lieu d'ajouter des masses aux points M_1 et M_2, on peut aussi enlever les mêmes masses aux points N_1 et N_2 symétriques des points M_1 et M_2 par rapport à l'axe de rotation. Cette méthode est couramment utilisée dans l'industrie.