B : Masse et inertie des solides.

1- Nécessité d'un outil précisant la répartition de masse d'un solide

Exemple : le rotor d'hélicoptère (Eurocoptère 4 pales)

Le rotor d'un hélicoptère est composé principalement des pales et de la cellule de mise en mouvement de celles-ci (photos ci-dessus).

La cellule a pour rôle la liaison, la mise en mouvements des pales autour de trois axes afin de contrer la différence de portance entre pale, le couple gyroscopique .....

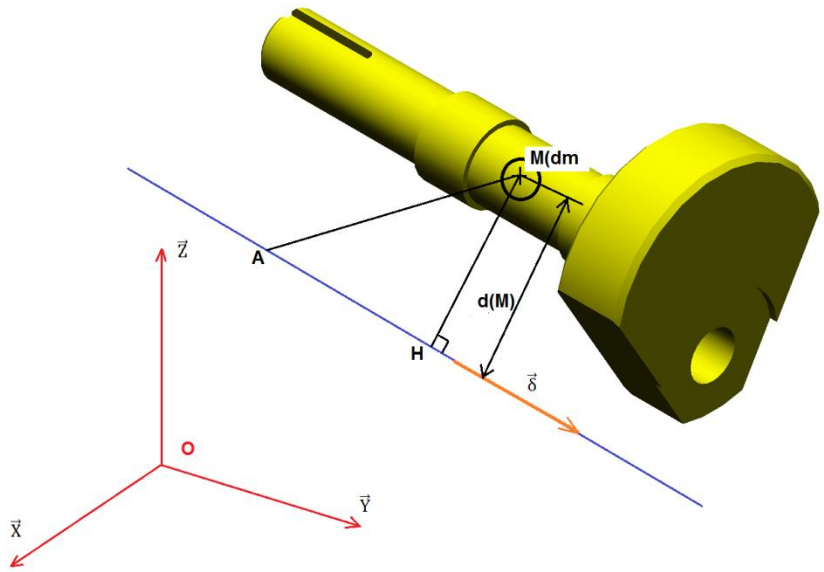
Si l'on regarde la forme d'une pale, celle-ci est assez simple et l'on pourra facilement décrire la répartition des masses dans un repère simple (plan de symétrie etc…)

Par contre il va falloir décrire et préciser l'influence de la masse et du mouvement sur la dynamique du système car la pale décrit un mouvement dans un repère très mobile et n'ayant rien à voir avec son repère propre.

Conclusion : la connaissance et la modélisation à l'aide d'outils de calcul de la répartition de la masse d'un solide dans l'espace sera nécessaire afin de prendre en compte dans notre modèle l'influence des formes et des matériaux sur le fonctionnement réel du système.

Il nous faudra un outil forcément complexe mais nous permettant d'obtenir rapidement toute l'information nécessaire à l'établissement de nos relations de dynamique.

2- INERTIE DES SOLIDES.



21- Moment d'inertie.

211- Notations.

Etant donné un solide (S) de masse m.

Soit un repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Soit un axe $\Delta(A,\vec{\delta})$.

212- Définition.

On appelle **moment d'inertie du solide (S) par rapport au point A**, la quantité positive

$$\boxed{I_A(S)=\int_{M\in S}\overrightarrow{AM}^2\,dm\,.}$$

213- Définition.

On appelle **moment d'inertie du solide (S) par rapport à un axe (Δ)**, la quantité positive :

$$\boxed{I_\Delta(S)=\int_S(\vec{\delta}\wedge\overrightarrow{AM})^2\,dm}\text{ soit encore :}$$

$$I_\Delta(S)=\int_S\overrightarrow{HM}^2\,dm=\int_S d(M)^2\,dm$$

d(M) étant la distance d'un point courant M à l'axe (Δ).

La dimension d'un moment d'inertie étant le produit d'une masse par le carré d'une distance, on définit pour le solide (S), **le rayon de giration R** par : $\boxed{I_\Delta(S) = mR^2}$

L'intérêt du rayon de giration est de donner une indication sur l'éloignement des masses par rapport à l'axe considéré. Deux corps de même masse peuvent avoir des moments d'inertie et donc des rayons de giration très différents ; c'est le cas par exemple pour un cylindre plein et un cylindre creux.

L'unité SI d'un moment d'inertie est le **kg.m²**.

214- Expressions analytiques dans un repère orthonormé.

Un point courant M ayant pour coordonnées x, y, z dans le repère R défini précédemment.

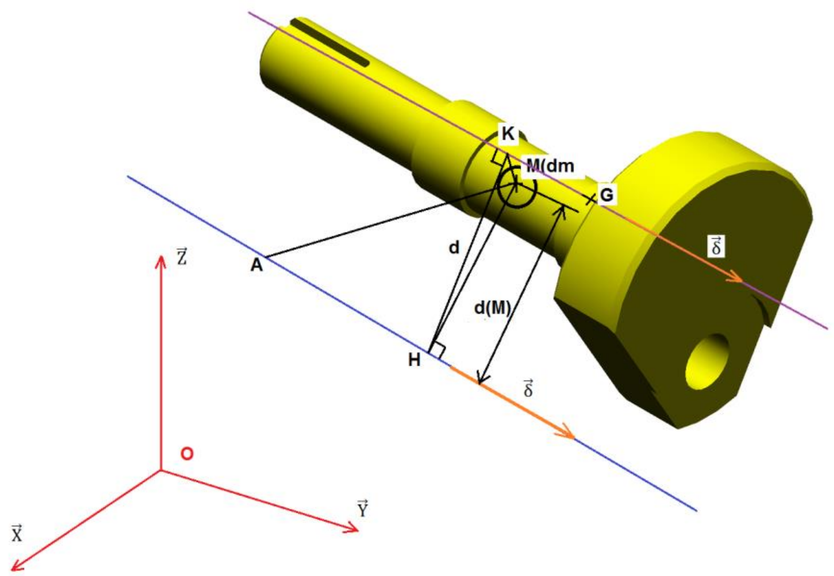
Le moment d'inertie par rapport au point O est donné par :

$$I_O = \int_S (x^2 + y^2 + z^2)dm$$

Les moments d'inertie par rapport aux axes du repère R sont donnés par :

$$I_{Ox}(S) = \int_S (y^2 + z^2)dm$$
$$I_{Oy}(S) = \int_S (x^2 + z^2)dm$$
$$I_{Oz}(S) = \int_S (x^2 + y^2)dm$$

215- Théorème de HUYGENS.



Soit $(G,\vec{\delta})$ un axe passant par le centre d'inertie G d'un solide (S).

Considérons un second axe $(A,\vec{\delta})$ passant par un point A et parallèle à l'axe$(G,\vec{\delta})$. Soit d la distance entre ces deux axes.

Appelons K et H les pieds des perpendiculaires issues de M sur respectivement $(G,\vec{\delta})$ et $(A,\vec{\delta})$. Le moment d'inertie de (S) par rapport à $(A,\vec{\delta})$ s'écrit

$$I_{A\delta}(S) = \int_S \overrightarrow{HM}^2 dm \text{ avec } \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KM} \text{ d'où :}$$

$$I_{A\delta}(S) = \int_S \overrightarrow{HK}^2 dm + \int_S \overrightarrow{KM}^2 dm + 2\overrightarrow{HK}\int_S \overrightarrow{KM}\, dm$$

le dernier terme qui peut encore s'écrire :

$$\overrightarrow{HK}\int_S \overrightarrow{KM}\, dm = \overrightarrow{HK}\int_S \overrightarrow{KG}\, dm + \overrightarrow{HK}\int_S \overrightarrow{GM}\, dm = \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{KG}\int_S dm + \overrightarrow{HK}\int_S \overrightarrow{GM}\, dm$$

est nul car d'une part : $\overrightarrow{HK}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{KG}$, et d'autre part : la deuxième intégrale est nulle par définition du centre d'inertie. Donc on obtient :

$$\boxed{I_{A\delta}(S) = md^2 + I_{G\delta}(S).}$$

22- Opérateur d'inertie, tenseur d'inertie.

La notion d'opérateur d'inertie et la matrice qui lui est associée, permet de définir complètement un solide du point de vue inertiel.

Par analogie avec le cours sur le moment cinétique et la représentation analytique du moment d'inertie vue précédemment dans ce cours.

L'opérateur d'inertie $\bar{\bar{I}}_A(S)$ qui caractérise la répartition de la matière d'un corps dans la base B est représenté par une matrice 3 × 3 dite matrice d'inertie dont les 9 termes dépendent :

- Du point d'expression
- De la base de calcul

Est Telle que

$$= \begin{bmatrix} \iiint_S (y^2+z^2).dm & -\iiint_S (xy).dm & -\iiint_S (xz).dm \\ -\iiint_S (xy).dm & \iiint_S (x^2+z^2).dm & -\iiint_S (yz).dm \\ -\iiint_S (xz).dm & -\iiint_S (yz).dm & \iiint_S (x^2+y^2).dm \end{bmatrix}_{A,B}$$

Notée : $\bar{\bar{I}}_A(S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{A,B}$

221- Notation.

On note que la matrice est symétrique, et que ses termes sont composés de :

A = **moment d'inertie de (S)** par rapport à l'axe $(A, \vec{x})$.

B = moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe $(A, \vec{y})$.

C = moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe $(A, \vec{z})$.

D = produit d'inertie de (S) par rapport aux axes $(A, \vec{y})$, $(A, \vec{z})$.

E = produit d'inertie de (S) par rapport aux axes $(A, \vec{x})$, $(A, \vec{z})$.

F = produit d'inertie de (S) par rapport aux axes $(A, \vec{x})$, $(A, \vec{y})$.

222- Propriétés.

a) La trace de la matrice d'inertie, somme des moments d'inertie par rapport aux axes $(O, \vec{x}), (O, \vec{y}), (O, \vec{z})$ est égale au double du moment d'inertie de (S) par rapport au point O.

$$\mathrm{Tr}I(O,S) = A + B + C = 2\int_S (x^2 + y^2 + z^2)dm = 2I_O(S).$$

Soit (B') une base autre que (B) : A+B+C=A'+B'+C'=$2I_O(S)$.

b) La matrice d'inertie est définie positive, ainsi ses termes vérifient les relations suivantes : $AB - F^2 \geq 0,\ BC - D^2 \geq 0,\ AC - E^2 \geq 0,\ \det \boldsymbol{I}(O,S) > 0.$

223- Trièdre principal d'inertie.

Comme la matrice d'inertie est réelle et symétrique, il existe une base orthonormée de vecteurs propres $B_p(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Dans cette base, la matrice est diagonale, elle s'écrit :

$$\bar{\bar{I}}_A(S) = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & B_p & 0 \\ 0 & 0 & C_p \end{bmatrix}_{B_p}$$

$B_p(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.est une base principale d'inertie.

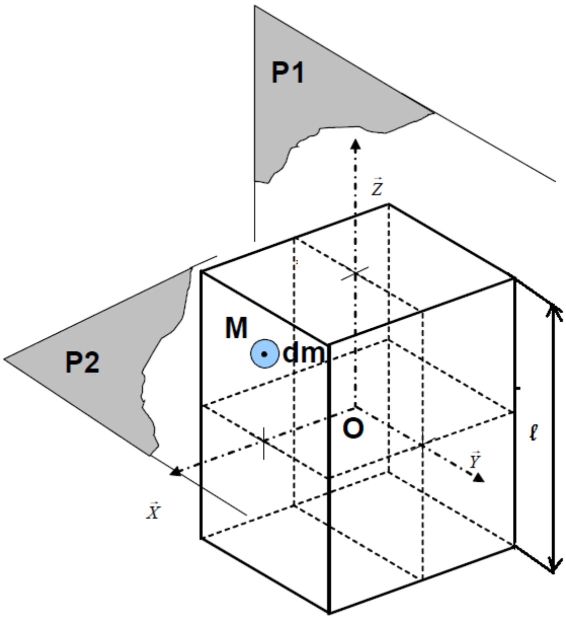
$(O, \vec{x}), (O, \vec{y}), (O, \vec{z})$ sont appelés axes principaux d'inertie du solide

A, B, C sont les moments principaux d'inertie en O.

Remarques : les éléments de symétrie ont une incidence sur la forme de la matrice d'inertie, en effet lorsque l'on exprime la matrice en un point O et dans une base B appartenant aux éléments de symétrie on peut simplifier la matrice.

Exemple : forme possédant deux plans de symétrie.

Soit un parallélépipède rectangle :



- les plans $P1$ $(O,\ y,\ z)$ et $P2$ $(O,\ x,\ y)$ sont plans de symétrie.

A un point $M(x, y, z)$ correspond par symétrie : un point $M(x, y, \text{-}z)$, symétrique par rapport à $P_2(O,\vec{x},\vec{y})$

Donc le produit d'inertie

$$\mathrm{D} = \int y.zdm = \int_{S1} y.zdm + \int_{S2} y.zdm \;\; = \int_{S1} y.zdm + \int_{S1} y.(-z)dm \;\; = 0$$

On montre de même que E=0 ceci signifie que $(O,\vec{z})$ est axe principal d'inertie, et la matrice d'inertie aura la forme suivante :

$$\bar{\bar{I}}_O(S) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{O,B}$$

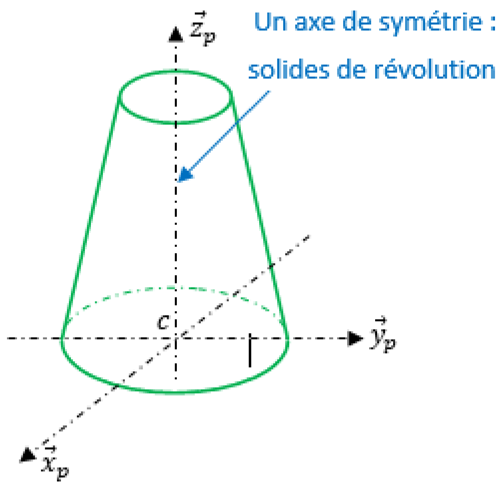
Le deuxième plan agira de même pour les produits E et F.

La matrice sera donc diagonale.

Cas particulier : axe de symétrie solide de révolution

Dans cet exemple, la symétrie est par rapport aux plans $P_1 = (C,\vec{x},\vec{z})$ et $P_2 = (C,\vec{y},\vec{z})$. Ce qui signifie que la répartition de masse est la même de part et d'autre de P_1 et de P_2.

$P_1 \xrightarrow{y} \begin{vmatrix} D = 0 \\ F = 0 \end{vmatrix}$ et $P_2 \xrightarrow{x} \begin{vmatrix} E = 0 \\ F = 0 \end{vmatrix}$ de plus, x et y varient de la même façon donc $A = B$



Finalement on a dans la base $(C,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ au point C pour le solide S :

$$\bar{\bar{I}}_C(S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B,C}$$

On constate que la base $(C,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est base principale d'inertie

224- Généralisation du Théorème de HUYGENS.

<u>Problème</u> : On a $\bar{\bar{I}}_G(S)$ et on veut $\bar{\bar{I}}_C(S)$

Nous savons que :

$$\bar{\bar{I}}_O(S).\vec{u} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})dm = \int_S (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}) \wedge (\vec{u} \wedge (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM})dm$$

$$= \int_S \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG})dm + \int_S \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM})dm + \int_S \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG})dm + \int_S \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM})dm$$

$$= \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG})\int_S dm + \overrightarrow{OG} \wedge \left[\vec{u} \wedge \int_S \overrightarrow{GM}\, dm\right] + \left[\int_S \overrightarrow{GM}\, dm\right] \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG}) + \bar{\bar{I}}_G(S, \vec{u})$$

Les deuxième et troisième termes étant nuls, il reste donc :

$$\bar{\bar{I}}_O(S).\vec{u} = \bar{\bar{I}}_G(S).\vec{u} + m\overrightarrow{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG})$$

Dans la base (B), en posant $\overrightarrow{OG} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$, alors les matrices d'inertie en O et G sont liées par :

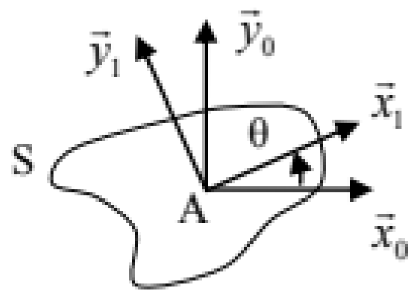
$$\boxed{\begin{bmatrix} A_O & -F_O & -E_O \\ -F_O & B_O & -D_O \\ -E_O & -D_O & C_O \end{bmatrix}_{O,B} = \begin{bmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{bmatrix}_{G,B} + \begin{bmatrix} m(b^2+c^2) & -mab & -mac \\ -mab & m(a^2+c^2) & -mbc \\ -mac & -mbc & m(a^2+b^2) \end{bmatrix}_B}$$

Pour obtenir la relation liant l'opérateur d'inertie en deux points O et O' quelconques, il suffit d'appliquer le théorème de HUYGENS en O puis en O' et de faire la différence membre à membre.

225- Matrice de passage d'une rotation

On a $\bar{\bar{I}}_A(S)$ dans la base B_0 et on veut l'avoir dans la base B_1

On a alors : $\boxed{\bar{\bar{I}}_A(S)_{B_1} = P_{0\to1}^{-1}.\bar{\bar{I}}_A(S)_0.P_{0\to1}}$



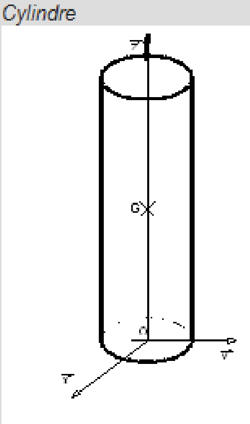
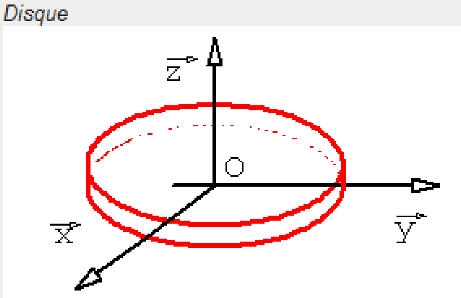
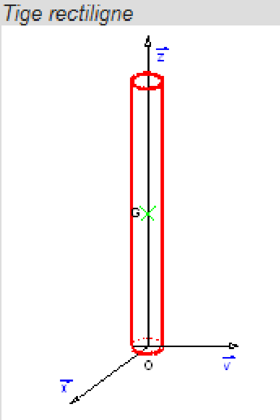
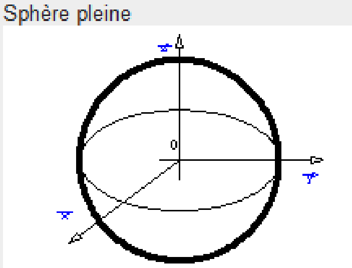
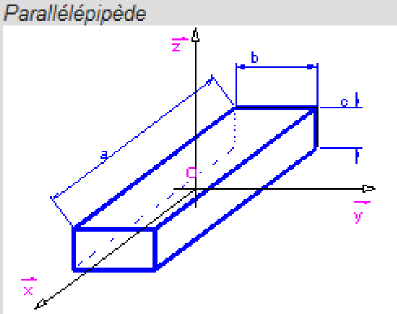
Avec $P_{0\to1}$ matrice de passage de 1 vers 2

Et $P_{0\to1}^{-1} = P_{0\to1}^{t}$

Dans le cas d'une rotation autour de l'axe $(G, \vec{z}_0)$ la matrice $P_{0\to1}$est définie telle que :

$$P_{0\to1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{x}_1 & \vec{y}_1 & \vec{z}_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{array}$$

226- Matrice d'inertie de formes courantes.

Cylindre 	masse m longueur l rayon R	symétrie de révolution axe $(O,\vec{z})$ D=E=F=0 et A=B $A=B=\int_{Cyl}(y^2+z^2)\,dm=m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right)$ $C=\int_{Cyl}(x^2+y^2)\,dm=m\frac{R^2}{2}$ $\Im_G(Cyl)=\begin{pmatrix} m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2}\end{pmatrix}_{(\vec{?},\vec{?},\vec{z})}$ en G
Disque 	masse m rayon R épaisseur e	symétrie de révolution axe $(O,\vec{z})$ $\Im_G(Dis)=\begin{pmatrix} m\frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2}\end{pmatrix}_{(\vec{?},\vec{?},\vec{z})}$ en G
Tige rectiligne 	masse m Longueur L rayon r<	symétrie de révolution axe $(O,\vec{z})$ $\Im_G(tige)=\begin{pmatrix} m\frac{L^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{(\vec{?},\vec{?},\vec{z})}$ en G
Sphère pleine 	masse m rayon R	Symétrie sphérique $\Im_G(Sph\grave{e}re)=\begin{pmatrix} 2m\frac{R^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2m\frac{R^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2m\frac{R^2}{5}\end{pmatrix}_{(\vec{?},\vec{?},\vec{?})}$ en G pour toute base.
Parallélépipède 	masse m	$\Im_G(para)=\begin{pmatrix} \frac{m(b^2+c^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(a^2+c^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12}\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ en G pour le cube $A=B=C=\frac{ma^2}{6}$