

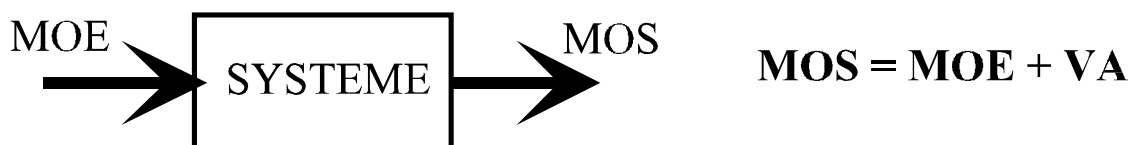
SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS ET INVARIANTS SYSTEMES ASSERVIS

AUTOMATIQUE : ASPECTS GENERAUX.

1- DEFINITIONS DIVERSES.

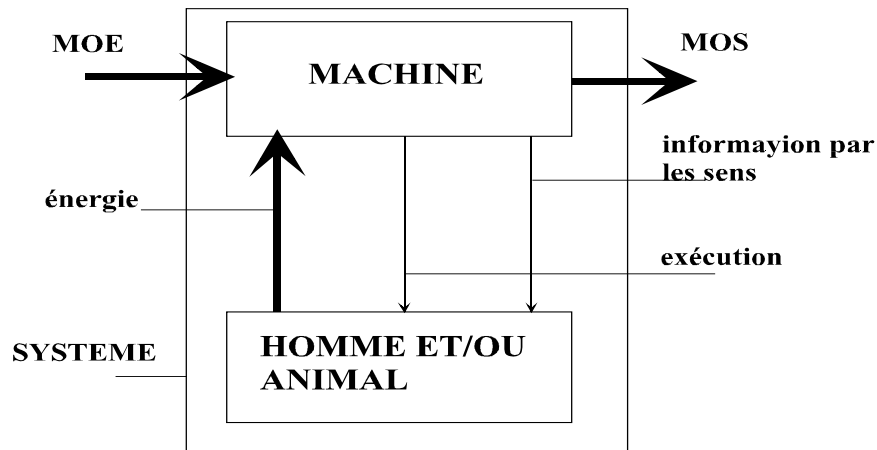
1-1- Historique des systèmes industriels.

Rappel-définition : un système est un ensemble de moyens mis en œuvre pour apporter une valeur ajoutée à une matière d'œuvre.



Evolution des systèmes.

- Avant la mécanisation (préhistoire !!- 18ème siècle).

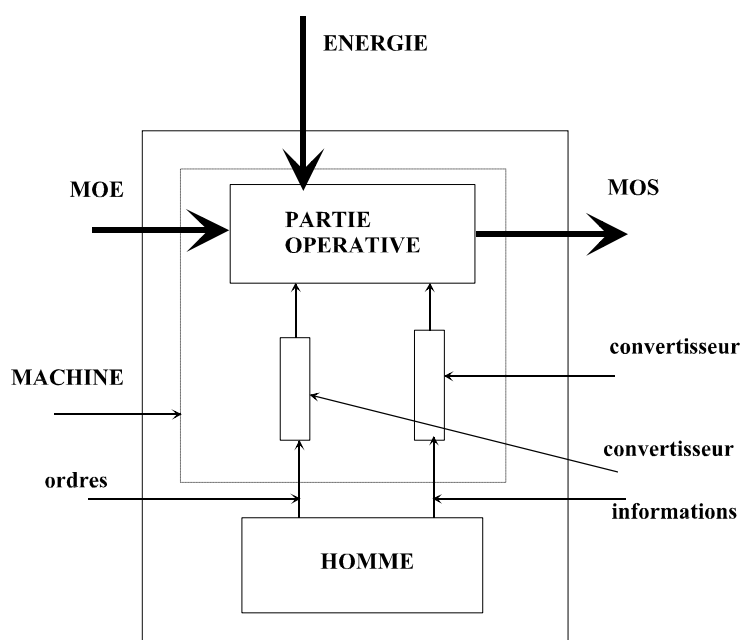


Remarque : l'homme et l'apport d'énergie font partie du système.

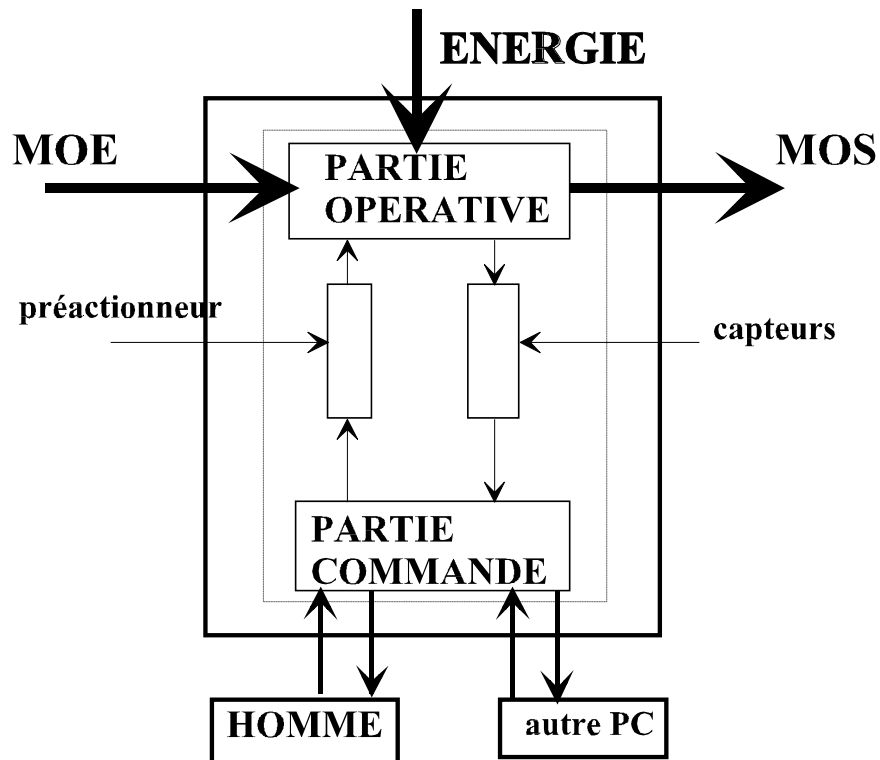
- Après la mécanisation (18ème - début 20ème).

Remarques : l'apport d'énergie est extérieur au système.

L'homme fait partie du système mais n'intervient plus que pour son savoir-faire ; il commande.



- Après l'automatisation (depuis 1950).



Remarques : dans cette constitution la machine est équivalente au système.

L'homme est donc extérieur au système.

De nos jours beaucoup de systèmes prennent leurs savoir-faire d'un autre système, souvent informatique qui possède son propre savoir-faire (système expert).

1-2- Partie opérative.

1-2-1- Rappels.

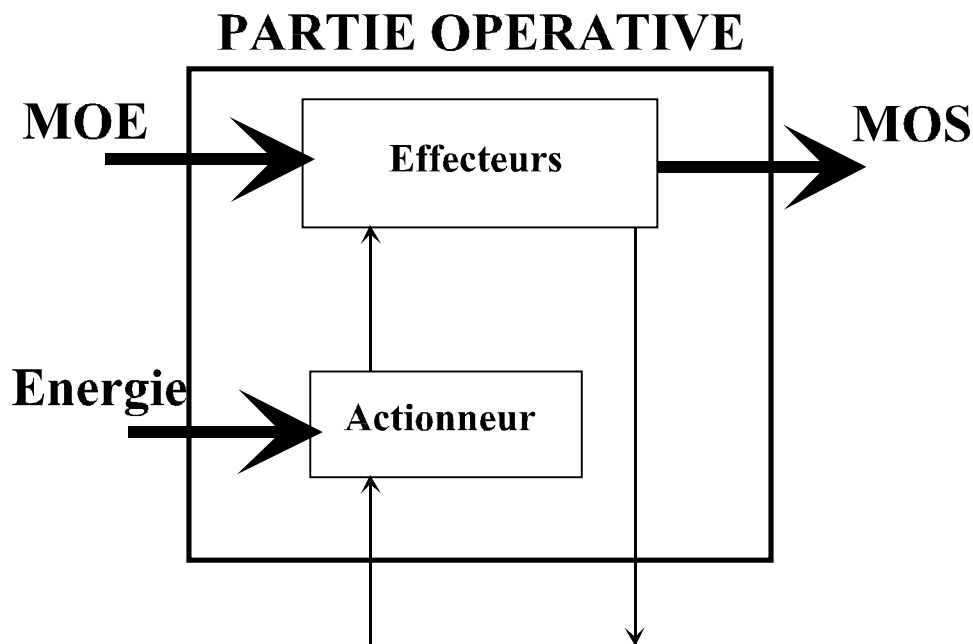
La partie-opérative est l'entité qui agit sur la matière d'œuvre afin d'élaborer la valeur ajoutée désirée.

1-2-2- Remarques.

- C'est le **processus** physique à **automatiser**.

- c'est le siège des conversions énergétiques principales.
- Au plan informationnel, elle reçoit des ordres (informations à caractère énergétique déclenchant, arrêtant ou modulant les actions sur la matière d'œuvre) et elle émet vers la partie commande des comptes-rendus (informations caractéristiques des modifications opérées sur la matière d'œuvre).

1-2-3- Constitution de la partie opérative.



On peut distinguer fonctionnellement deux sous-ensembles :

- **Les effecteurs** : ils agissent effectivement sur la matière d'œuvre. Si plusieurs effecteurs sont nécessaires au fonctionnement, alors les effecteurs intermédiaires sont appelés **transmetteurs** (ils transmettent l'énergie sans en changer la nature).
- **Les actionneurs** : ils convertissent l'énergie pour la rendre compatible avec la chaîne d'effecteurs.(Ils sont eux même pilotés par le pré actionneur).

Exemple : le store : la partie opérative est constituée :

De l'actionneur qu'est le moteur électrique,

De l'effecteur qu'est le tambour guide store,

du transmetteur qui est un réducteur car la vitesse angulaire du moteur électrique est bien trop élevée (ensemble de pignons réduisant la vitesse).

1-3- Partie commande.

- On l'appelle encore **automatisme**, c'est l'entité qui élabore les ordres et les envoie aux divers Préactionneurs-actionneurs.

- Elle agit en fonction :

- des informations en mémoire ou fournie par l'extérieur.

- des informations qu'elle reçoit de la partie opérative via les capteurs, en fonction d'un savoir-faire.

- Elle agit par combinaisons logique d'informations indépendantes du temps, il s'agit alors d'une commande **combinatoire**.

Exemple : distributeur automatique de billets : si votre code est bon et si vous avez tapé le montant du retrait vous aurez les billets.

- Elle agit par actions successives en fonction d'événements, il s'agit alors d'une commande **séquentielle**.

Exemple : ascenseur : la cage s'arrêtera à son prochain passage si votre volonté de mouvement (descente ou montée) correspond à la phase déjà entamée pour l'utilisateur précédent, sinon vous aurez la prochaine priorité.

- Elle agit par action continue en fonction d'événements, il s'agit alors d'une commande **continue**.

Exemple : pilote automatique pour barre de navire, une fois le cap entré le système effectuera une mesure continue du cap obtenu et corrigera en fonction de l'erreur.

1-4- Finalité.

La mise au point de systèmes automatisés consiste donc, à remplacer partiellement ou totalement l'intervention de l'homme et son savoir-faire par un ensemble appelé : partie-commande.

Les objectifs sont :

- libérer l'homme de tâches répétitives
- **accroître la productivité d'un système**
- rendre plus flexibles les productions de masse
- améliorer la qualité et la répétabilité d'un processus
- augmenter la sécurité et la rapidité
- s'adapter à des contextes particuliers.

I-5- Différents types de systèmes automatiques.

Il existe deux grands types de systèmes automatiques :

- ♦ *Les systèmes logiques combinatoires et séquentiels*, câblés ou programmés, qui n'ont pas nécessairement une structure bouclée, c'est à dire ne prennent pas nécessairement en considération une mesure de l'état **courant** du système. De plus l'automatisation porte sur un nombre fini d'opérations prédéterminées dans leur déroulement. De tel systèmes sont appelés systèmes à "événements discrets" ou encore "automatismes séquentiels ". (ex : un programmeur de machine à laver automatique).
- ♦ *Les systèmes asservis*, fonctionnant en régulation de maintien ou en poursuite d'une loi de référence. Dans le cas des systèmes asservis, toutes les situations possibles n'étant pas prévisibles (arrivée d'une perturbation par exemple), le déroulement des opérations ne peut être prédéterminé à l'avance. Les systèmes asservis sont nécessairement bouclés, c'est à dire qu'une mesure de la situation est en permanence prise en considération dans la détermination de la commande. En général, les variables traitées sont des variables à variation continue en amplitude, on parle alors de système "*continu*" ou "*analogique*". Lorsque les informations sont traitées par un ordinateur les variables sont échantillonnées dans le temps, on parle alors de système "*discret*" ou "*numérique*".

(Ex : un pilote automatique d'avion ou de bateau).

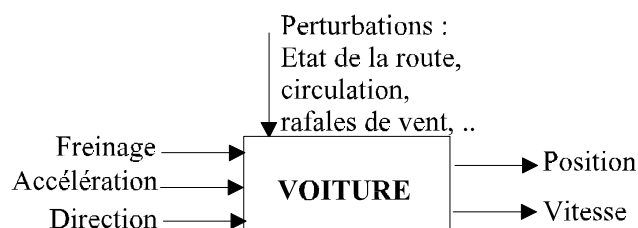
- ♦ *Les systèmes complexes*, peuvent présenter simultanément des aspects séquentiels et continus.

I-6- Systèmes bouclés.

Un *bouclage* apparaît chaque fois qu'au cours d'une opération, un système prend en compte **en permanence** l'observation de son état pour le modifier.

Exemples de systèmes bouclés :

- ♦ Automobile + chauffeur réalisant l'opération de conduite sur route (système non automatique). Les décisions concernant la direction, l'accélération et le freinage sont prises par le chauffeur à partir des mesures effectuées par l'œil, de manière à satisfaire un critère de performance qui peut être un compromis entre la durée du trajet, le confort, la consommation ou les réglementations. Le cerveau et les membres constituent les organes de commandes.



- ♦ Régulation de la température d'un fer à repasser (système automatique).

Le bouclage est nécessaire dans les opérations où :

- ♦ La **précision** mise en jeu est importante. L'observation de la grandeur à asservir permet de constater un écart ou une dérive quelconque par rapport à la référence souhaitée et donc de réagir en conséquence. Dans une solution sans bouclage on est amené à faire a priori des hypothèses quant au comportement de certains éléments, toute variation par rapport au comportement présumé entraîne irrémédiablement un défaut sur le résultat final.

- ♦ **Des perturbations** interviennent en cours d'opération modifiant ainsi l'état d'un système. Par exemple, l'ouverture de la porte d'un four thermostaté entraîne une déperdition de chaleur et donc une baisse de température que l'on compense en augmentant la puissance de chauffage. Dans le cas d'un système bouclé, l'observation de la grandeur de sortie rendra compte de l'apparition d'une telle perturbation.
- ♦ Le **Comportement** du système est mal connu ou variable.
- ♦ La **stabilité** est en cause.

I-7- Régulations ou asservissements.

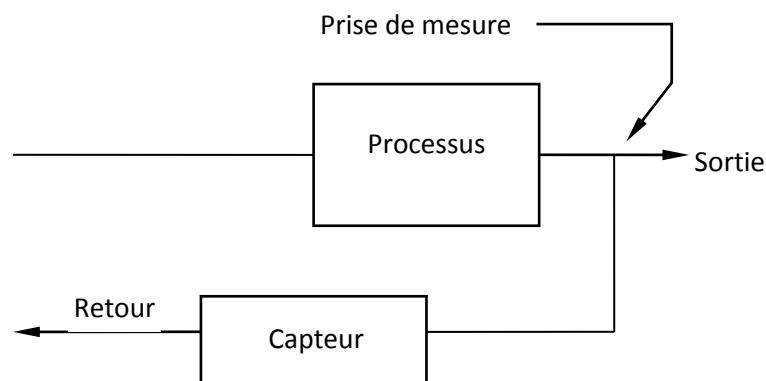
On distinguera plusieurs types de systèmes bouclés :

I-7-1- Systèmes asservis.

Un système asservi peut être défini en trois points :

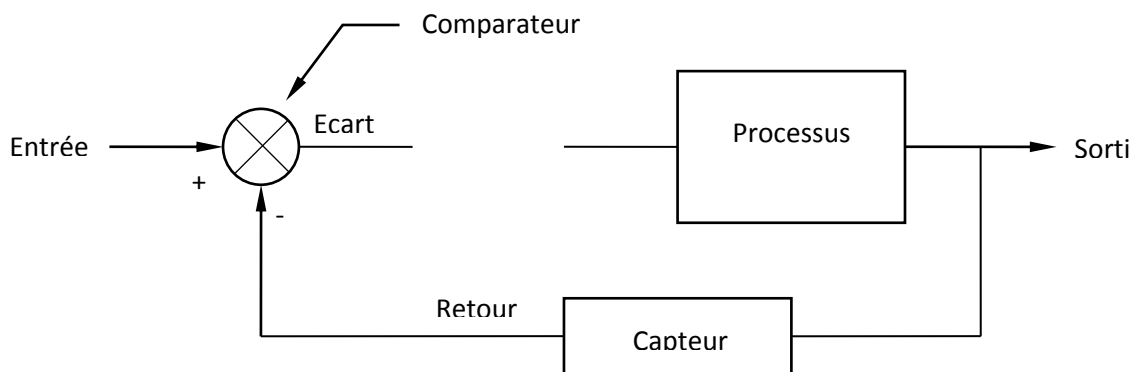
- **C'est un système à retour** : L'évolution de la grandeur de sortie est surveillée au moyen d'un capteur qui la transforme en une grandeur image appelée retour. Cette grandeur image doit être de la même nature et à la même échelle que la grandeur d'entrée.

La précision de la sortie dépend essentiellement de la précision du capteur.

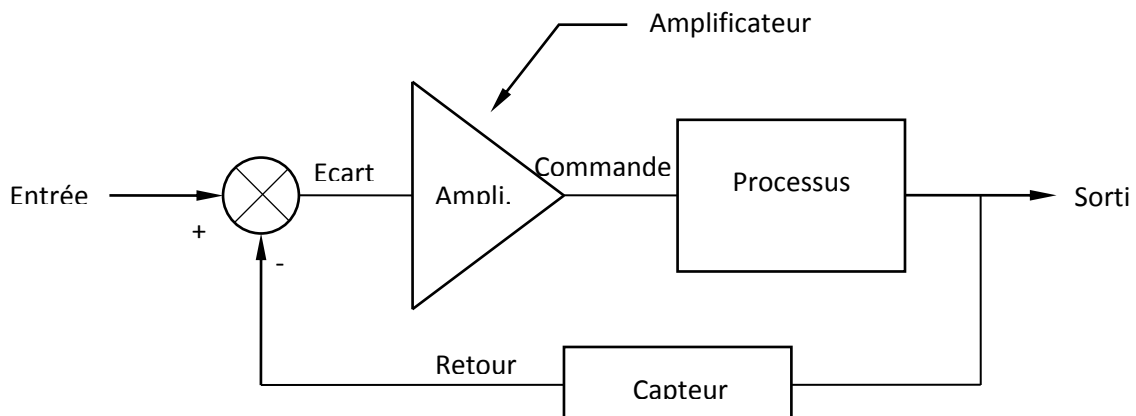


- **C'est un système générateur d'écart :** La grandeur de retour, image de la sortie, est comparée à la grandeur d'entrée par élaboration de la différence ou écart (parfois improprement appelée erreur).

Le but de l'asservissement est d'annuler constamment cet écart de telle sorte que la sortie suive l'entrée. La sortie est alors asservie à l'entrée.



- **C'est un système amplificateur :** L'écart est une grandeur d'autant plus faible que la sortie est proche de l'entrée et devient alors insuffisante pour maintenir un signal de commande en sortie. L'écart est donc amplifié.



I-7-2- Servomécanismes.

Un système asservi est appelé servomécanisme lorsque la grandeur contrôlée est une grandeur mécanique : Position, vitesse, force, couple...

Ceci en opposition avec les asservissements de grandeurs non-mécaniques telles que la température, le courant...

I-7-3- Régulations ou systèmes suiveurs.

- **Système suiveur** : Il doit maintenir un écart nul entre la consigne et la valeur de la sortie quelles que soient les variations de la première.

Exemples : Commande numérique d'une machine-outil, systèmes de poursuite (missile)...

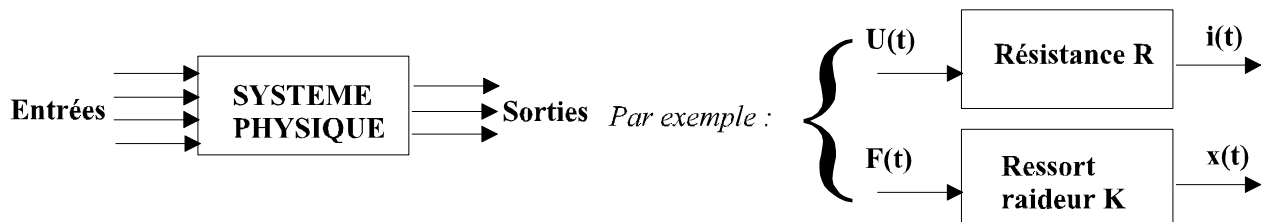
- **Système régulateur (ou régulation)** : Il doit maintenir la grandeur de sortie à une valeur constante quelles que soient les perturbations.

Exemples : régulation de la température d'un four, régulation de vitesse, pilote automatique (avion, bateau)...

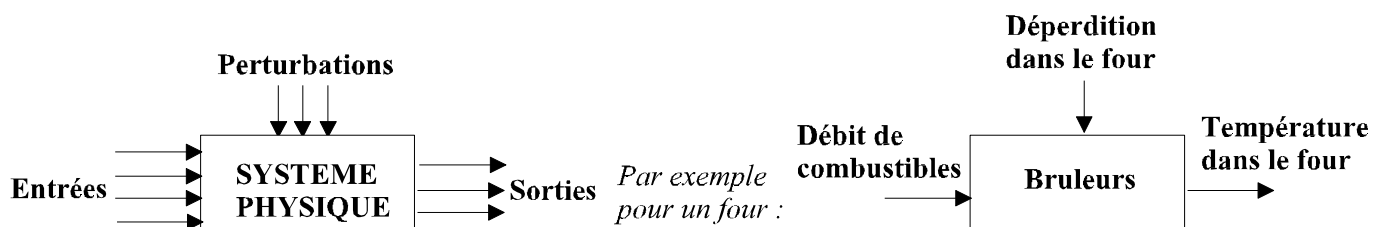
I-8- Systèmes physiques et schémas-blocs.

Un système physique peut être considéré comme un ensemble d'éléments fournissant des informations en sortie, en réponse à des sollicitations par des signaux d'entrée. La possibilité de prédire les sorties suppose une relation de cause à effet entre les signaux.

Le type de schéma utilisé par l'automaticien met en valeur la liaison entre les grandeurs physiques d'entrées et de sorties, soit :



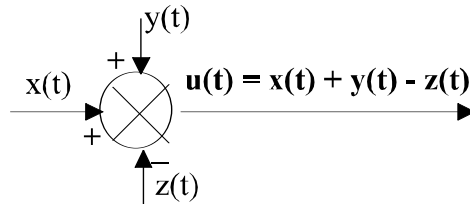
Lorsque le système est influencé par des perturbations, c'est à dire par des signaux parasites que l'on ne peut pas manipuler et que le système doit subir, on utilise la représentation suivante :



Cette représentation fonctionnelle par bloc est connue sous le terme de "**Schéma-Blocs**".

Pour représenter l'interconnexion des différents sous-ensembles d'un système on utilise également les symboles suivants :

- ♦ Point de Sommation (ou sommateur), décrit ci-dessous :



- ♦ Point de prélèvement (capteur), décrit ci-dessous :

Ce schéma signifie que $y(t)$ qui a pour cause $x(t)$ et qui agit sur $z(t)$ a été prélevé (ou capté) de manière à générer la grandeur $u(t)$.

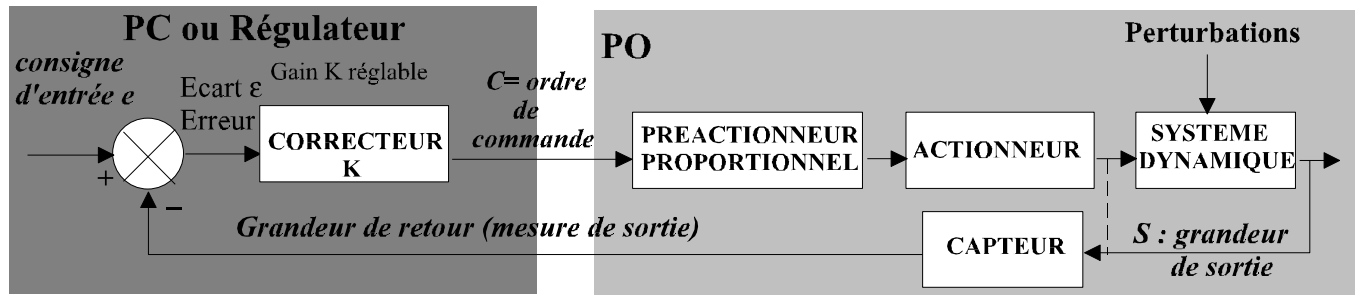
II- ETUDE DES SYSTEMES ASSERVIS.

II-1- Structure d'un système asservi ou ' bouclé '.

La figure ci-dessous représente la structure générale d'une chaîne fonctionnelle d'asservissement d'une grandeur de sortie S à une grandeur d'entrée e .

Elle comporte :

- ♦ Une chaîne d'action, qui, à partir de l'ordre élaboré par la partie commande, génère la grandeur de sortie asservie (une position, une vitesse, une température, ..). Le préactionneur proportionnel fournit à l'actionneur un signal d'action proportionnel à la commande C .
- ♦ Une chaîne de retour, qui, à partir d'une mesure de la grandeur de sortie, effectuée par le capteur directement sur l'actionneur, ou indirectement sur le système dynamique (ou effecteur), fournit à la partie commande (ou régulateur) la grandeur de retour (ou mesure de sortie).
- ♦ La partie commande (ou régulateur), qui compare, en permanence, la mesure de sortie à l'entrée (ou grandeur de consigne) pour élaborer l'écart ε , par différence entre l'entrée et la mesure. Cet écart est ensuite amplifié (gain K réglable) pour élaborer l'ordre de commande de la chaîne d'action. Dans la pratique c'est généralement un dispositif électronique ou un ordinateur numérique.



II-2- Les signaux tests.

Pour étudier le comportement dynamique d'un système, il n'est pas toujours simple de traduire sous forme d'équations les lois de la physique qui régissent son comportement interne. Il est souvent plus efficace de soumettre l'entrée du système à des signaux tests et d'observer la sortie.

Nous allons passer en revue ces signaux tests afin de décrire leurs caractéristiques.

II-2-1- Impulsion de DIRAC.

Le signal, noté $\delta(t)$, est une brève impulsion qui vaut zéro en tout point sauf au voisinage de $t=0$.

L'impulsion de Dirac est la limite quand a tend vers 0 de la fonction $\delta_a(t)$ ci-contre.



$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \delta_a(t)$$

$$\text{Pour } a > 0 \text{ on a : } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(t) dt = 1.$$

Cela revient à générer une amplitude infinie pendant un temps nul, ce qui ne correspond évidemment à aucun signal physique réel, mais cette fonction est très utile dans l'analyse du comportement temporel d'un système.

II-2-2- Echelon.

Ce signal est aussi connu sous le nom de fonction de Heaviside.

L'échelon unitaire, noté $u(t)$, est une fonction qui vaut zéro pour $t < 0$ et 1 pour $t > 0$.

Un échelon d'amplitude a est simplement noté $a.u(t)$.



Ce signal est utilisé pour déterminer l'erreur statique d'un système. Lorsqu'il est appliqué à l'entrée d'un système, on parle alors de réponse indicielle.

II-2-3- Rampe.

La rampe (ou échelon de vitesse) est un signal qui évolue linéairement en fonction du temps.

La rampe unité est simplement égale à $t.u(t)$.

La rampe ci-contre vaut simplement :

$$x(t) = a.t.u(t)$$

Ce signal est utile lorsqu'on veut déterminer l'écart dynamique d'un système.



II-2-4- Sinusoïde.

Les entrées sinusoïdales sont utilisées pour étudier le comportement dynamique des systèmes. La sortie est alors appelée réponse harmonique.

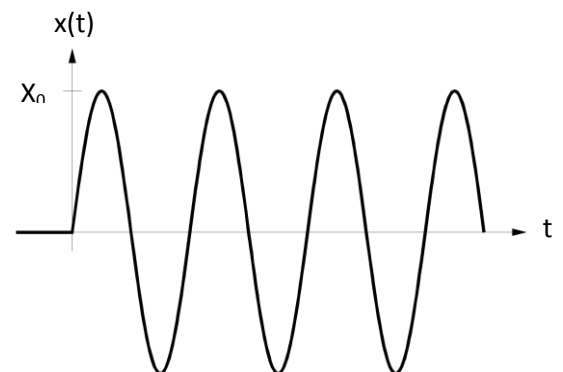
Ce signal vaut : $x(t) = u(t).X_0.\sin\omega t$

Avec : X_0 amplitude

ω pulsation (en radians par seconde)

$f = \omega/2\pi$ fréquence (en Hertz) et

$T = 2\pi/\omega$ période (en secondes)



II-3- Caractéristiques du comportement des systèmes.

Quatre critères permettent de caractériser les performances des systèmes :

- en régime transitoire :
 - Rapidité
 - Amortissement
- en régime permanent :
 - Stabilité
 - Précision

II-3-1- Rapidité et bande passante.

II-3-1-1- Temps de réponse à 5%.

La rapidité est définie par le temps de réponse du système soumis à une entrée en échelon d'amplitude E_0 . En pratique, on mesure (ou on calcule) le temps que met la réponse à rester dans une zone comprise entre plus ou moins 5% de la valeur désirée.

II-3-1-2- Bande passante.

On caractérise la bande passante d'un système en le soumettant à une entrée sinusoïdale à fréquence variable et en observant la sortie.

Elle est définie comme la fréquence en deçà de laquelle l'atténuation de la sortie est inférieure à 30%.

La bande passante est liée au temps de réponse : un système de bande passante élevée est un système rapide et inversement.

II-3-2- Amortissement

Un bon amortissement est la capacité d'un système oscillant à ne pas présenter de dépassement de la consigne important.

On demande généralement au dépassement de rester inférieur à un certain pourcentage de la consigne.

D'un autre côté, on ne veut pas qu'un système soit trop amorti car l'augmentation de l'amortissement provoque une chute du rendement du système.

II-3-3- Stabilité.

Elle est caractérisée par une absence de divergence entre l'entrée et la réponse c'est à dire qu'à une entrée bornée doit correspondre une sortie bornée.

II-3-4- Précision.

Elle est définie principalement par deux grandeurs qui sont soit calculées soit mesurées expérimentalement. Il s'agit de l'écart statique et de l'écart de trainage.

II-3-5- Ecart statique.

On soumet le système à une entrée en échelon d'amplitude constante : $e(t) = E_0 \cdot u(t)$.

L'écart statique ε_s est la différence entre la consigne et la réponse en régime permanent.

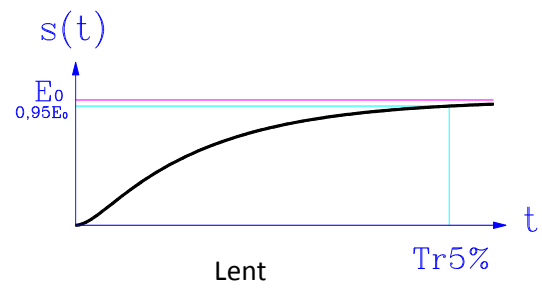
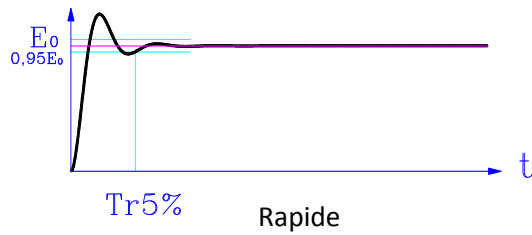
II-3-6- Ecart de trainage

Pour caractériser l'écart de trainage ε_v (ou écart de vitesse), on soumet le système à une entrée rampe de pente a : $e(t) = a \cdot t \cdot u(t)$.

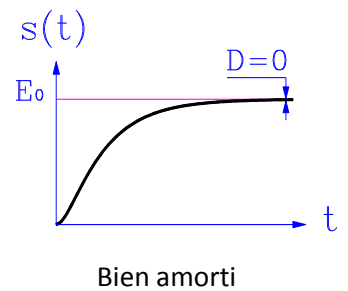
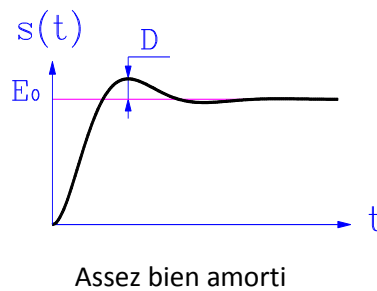
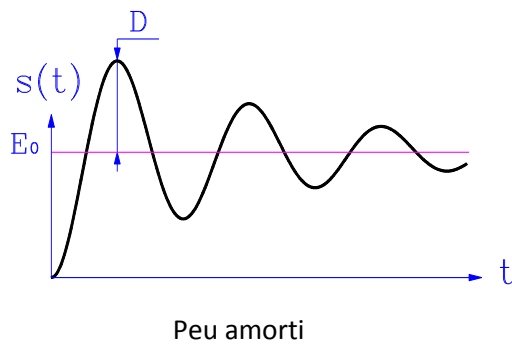
L'écart dynamique ε_v est la différence entre la consigne et la réponse en régime permanent.

NB : les figures de la page suivante illustre toutes ces caractéristiques.

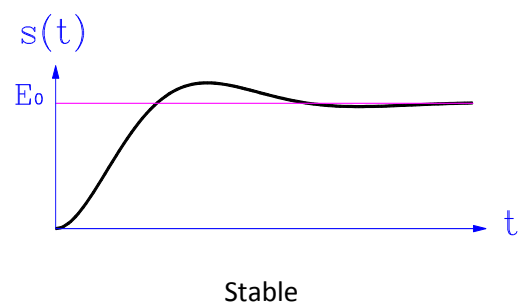
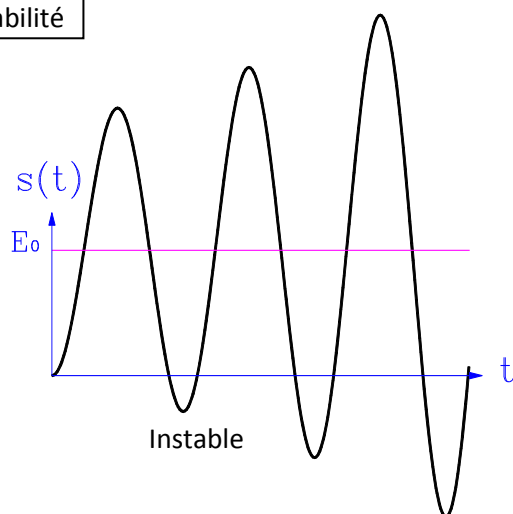
Rapidité



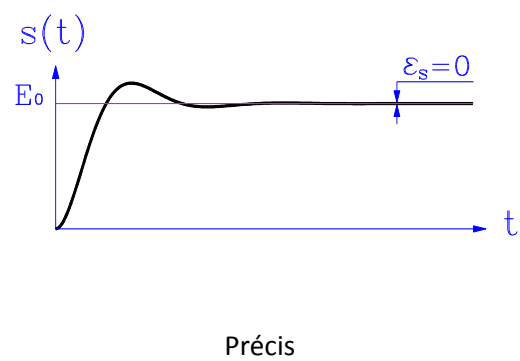
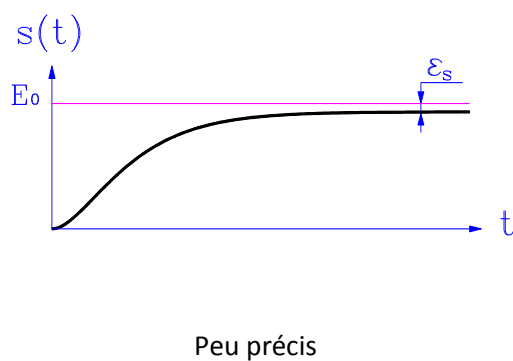
Amortissement



Stabilité



Précision



III-.SYSTEMES DYNAMIQUES LINEAIRES CONTINUS ET INVARIANTS.

III-1- Définitions.

III-1-1- Système dynamique.

On dit qu'un système est instantané si les grandeurs physiques de sortie dépendent uniquement et instantanément des grandeurs d'entrée, cette dépendance n'évoluant pas dans le temps.

En réalité, il n'existe que peu de systèmes instantanés car tout effet présente une certaine « inertie » ou « mémoire ». L'appellation « système instantané » relève donc souvent de l'approximation.

La notion de système dynamique prend en compte ces phénomènes d'inertie et de mémoire (inertie mécanique, inertie thermique) et dans ce cas les grandeurs de sortie dépendent des valeurs présentes et passées des grandeurs d'entrée. C'est le cas notamment des systèmes régis par des équations intégral-différentielles

$$a_0 \cdot y(t) + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \dots + a_n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 \cdot x(t) + b_1 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \dots + b_m \cdot \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

Cette mémoire du passé est généralement de durée infinie, tout en s'atténuant le plus souvent selon des modes exponentiels. Ainsi, on considère en pratique qu'un système dynamique a une mémoire finie dont la durée fixe le temps de réponse.

III-1-2- Système linéaire.

Un système est dit linéaire si la fonction qui le décrit est elle-même linéaire. Cette dernière vérifie alors le principe de superposition.

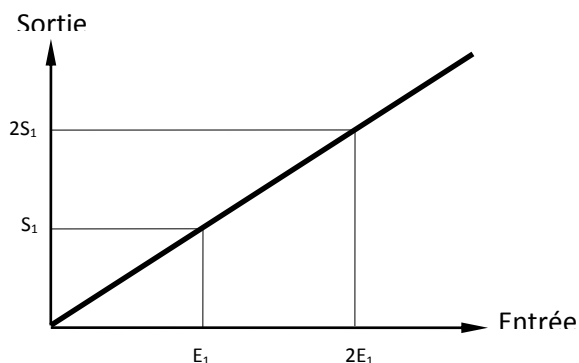
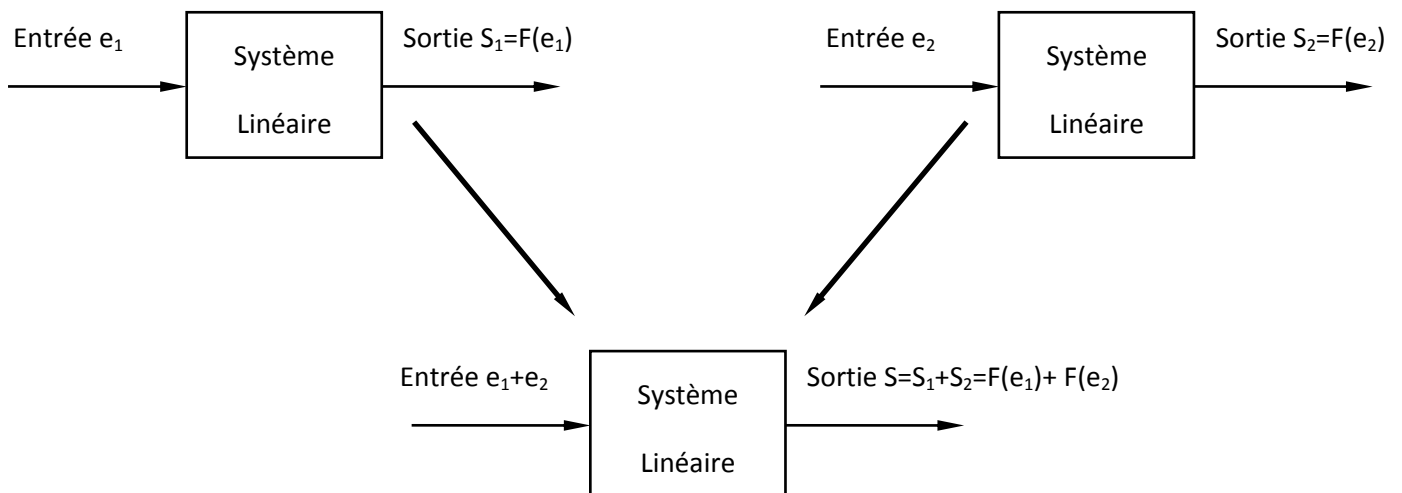
Si une fonction est linéaire, elle vérifie la relation :

$$F(a \cdot e_1 + b \cdot e_2) = a \cdot F(e_1) + b \cdot F(e_2)$$

Avec : e_1 et e_2 signaux d'entrée,

a et b constantes quelconques.

Dans le cas où le comportement du système considéré est décrit par une équation différentielle, celle-ci devra être linéaire pour que le système le soit.



La courbe caractéristique d'un système est la représentation de la loi entrée-sortie en **régime permanent**. On soumet le système à une entrée, on attend un temps suffisant pour que la sortie soit stabilisée et on mesure la valeur de la sortie.

La courbe caractéristique d'un système linéaire est une droite.

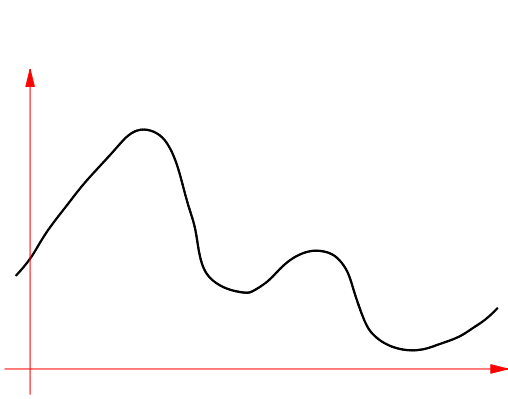
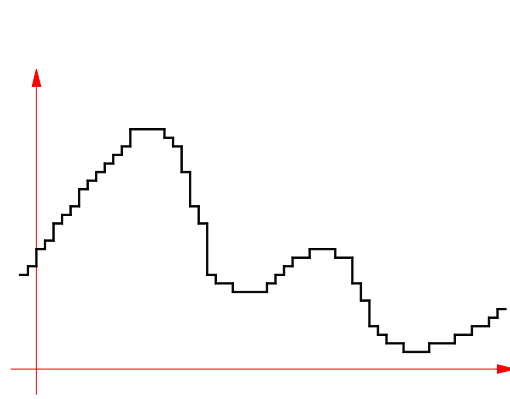
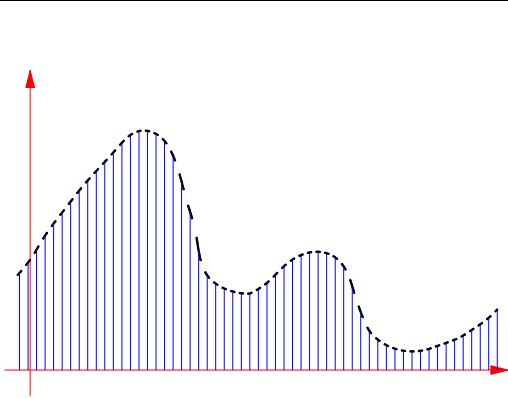
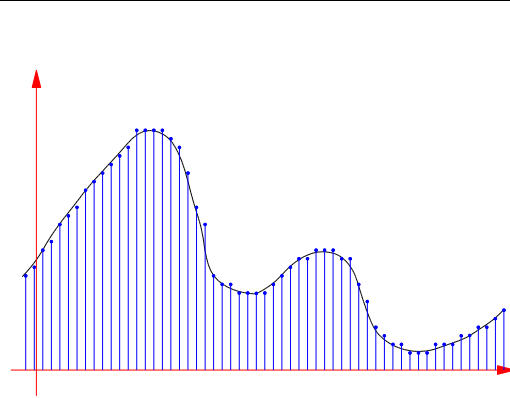
III-1-3- Système continu.

Un système est continu, par opposition à un système discret, lorsque les variations des grandeurs physiques le caractérisant sont des fonctions à temps continu et que l'on peut donc définir ces grandeurs à tout instant. On parle aussi dans ce cas de système analogique.

La plupart des systèmes physiques, du point de vue macroscopique, sont continus. Un système informatique par contre a besoin d'un temps non nul pour réaliser un traitement de l'information, on ne peut donc pas le qualifier de système continu, il ne peut que traiter des échantillons des signaux continus qui lui sont soumis, on parle dans ce cas de système échantillonné.

De plus, l'amplitude de ces signaux peut être elle aussi continue ou discrète ce qui fait apparaître deux autres types de signaux : les signaux quantifiés et les signaux numériques.

Le tableau suivant donne la représentation de ces quatre types de signaux.

		Amplitude	
		Continue	Discrete
Temps	Continu	 signal analogique	 signal quantifié
	Discret	 signal échantillonné	 signal numérique

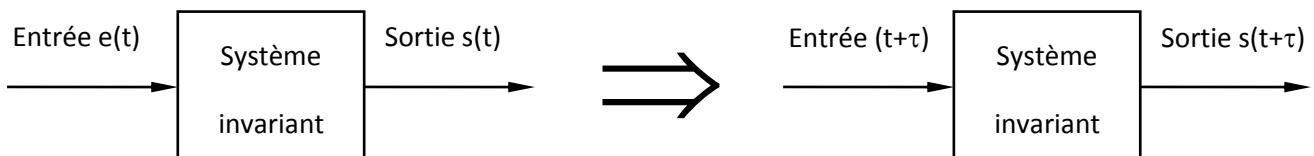
III-1-4- Système invariant.

Un système invariant est un système dont les caractéristiques de comportement ne se modifient pas dans le temps, en d'autres termes, un système qui ne vieillit pas.

Cette proposition se traduit par l'implication suivante :

si $x(t)$ induit $y(t)$, alors pour tout décalage temporel t , $x(t-t)$ induit $y(t-t)$

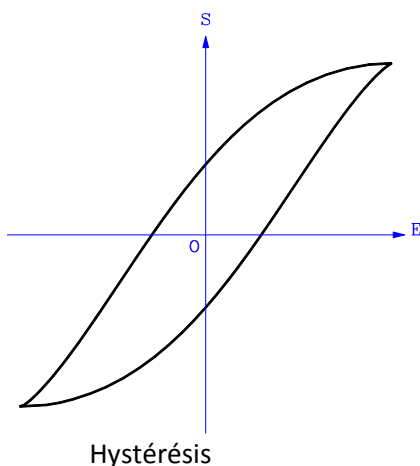
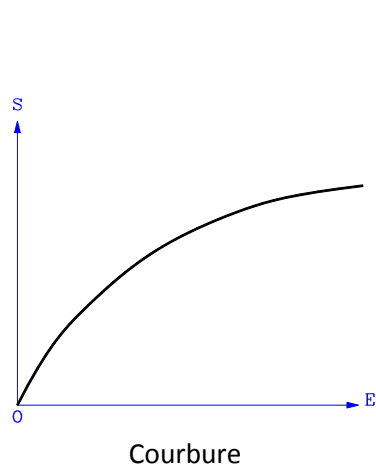
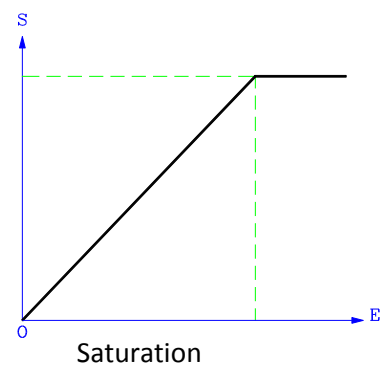
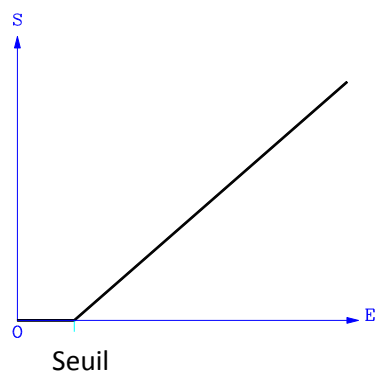
Implication qu'on peut représenter par :



Un système est invariant si la relation entrée-sortie ne se modifie pas dans le temps

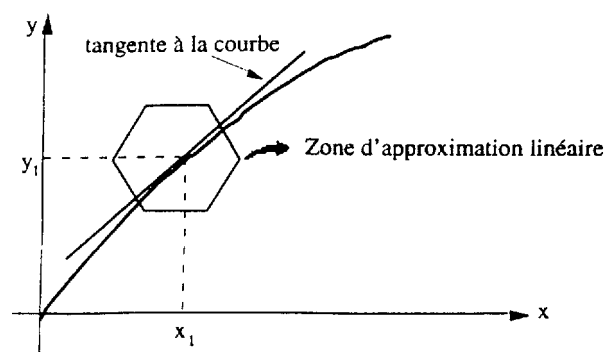
III-1-5- Non linéarité.

On peut recenser quatre types usuels de non linéarité : Le seuil, la saturation, la courbure et l'hystérésis dont les caractéristiques sont données ci-après.



III-1-6- Linéarisation : méthode.

On conçoit que de nombreux systèmes physiques ne répondent pas exactement au principe de proportionnalité; d'où la nécessité d'opérer une linéarisation dans une zone restreinte de comportement, zone pour laquelle l'automaticien désire concevoir une régulation. Une solution consiste, par exemple, à remplacer la caractéristique linéaire correspondant à la tangente au point de fonctionnement choisi.



Exemple : Comportement d'un réservoir d'eau avec un écoulement libre

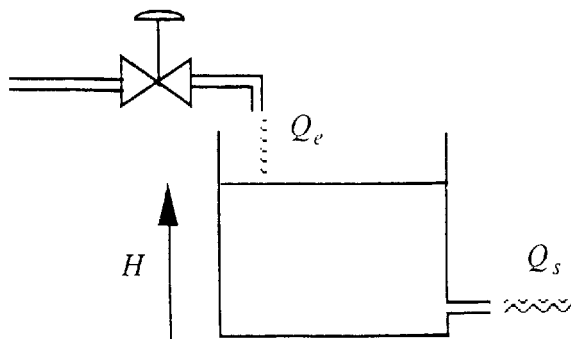


Schéma descriptif

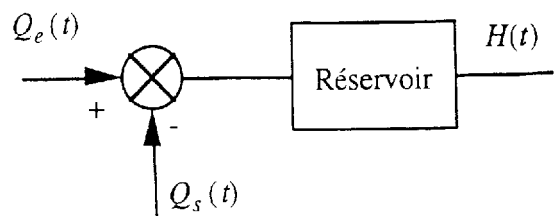


Schéma fonctionnel

La hauteur d'eau résulte de l'effet contradictoire du débit d'arrivée Q_e et du débit de fuite Q_s .

$$Q_e - Q_s = S \cdot \frac{dH}{dt}$$

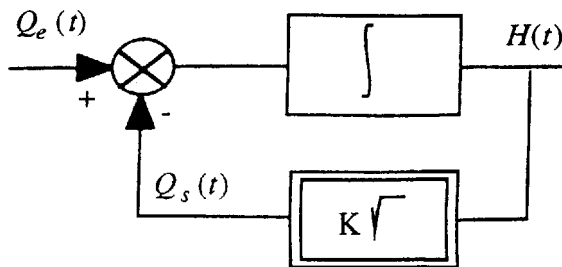
Le débit de sortie dépend de la hauteur dans la cuve selon une relation non linéaire du type :

$$Q_s = K\sqrt{H}$$

D'où l'équation différentielle de ce système :

$$Q_e - K\sqrt{H} = S \cdot \frac{dH}{dt} \quad \text{d'où} \quad \boxed{Q_e = S \cdot \frac{dH}{dt} + K\sqrt{H}} \quad (1)$$

On peut représenter le comportement du réservoir par le schéma fonctionnel suivant :



Le système est donc un **système non linéaire**.

Plaçons-nous autour du niveau d'équilibre (régime permanent) suivant :

Débit d'entrée = Débit de sortie = $Q_0 = K\sqrt{H_0}$ avec H_0 = hauteur d'équilibre

Il est alors possible de linéariser la relation précédente pour des petites variations du débit Q_e autour de Q_0 (entraînant des variations de hauteur H , donc de débit de sortie Q_s).

Posons : $Q_e = Q_0 + q_e$

$Q_s = Q_0 + q_s$

$H = H_0 + h$

La relation (1) devient :

$$Q_0 + q_e = S \cdot \frac{d(H_0 + h)}{dt} + K\sqrt{H_0 + h}$$

$$Q_0 + q_e = S \cdot \frac{dh}{dt} + K\sqrt{H_0 \left(1 + \frac{h}{H_0}\right)} = S \cdot \frac{dh}{dt} + K\sqrt{H_0} \cdot \left(1 + \frac{h}{H_0}\right)^{1/2}$$

$$Q_0 + q_e = S \cdot \frac{dh}{dt} + K\sqrt{H_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h}{H_0}\right)$$

$$Q_0 + qe = S \cdot \frac{dh}{dt} + Q_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h}{H_0}\right) = S \cdot \frac{dh}{dt} + Q_0 + \frac{Q_0}{2} \frac{h}{H_0}$$

d'où $qe = S \cdot \frac{dh}{dt} + \frac{Q_0}{2} \frac{h}{H_0} = S \cdot \frac{dh}{dt} + \lambda h$

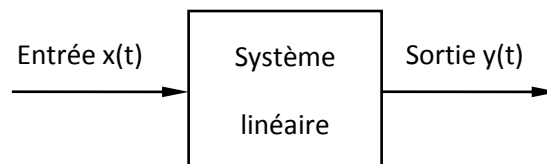
$qe = S \cdot \frac{dh}{dt} + \lambda h$

(2)

Cette relation (2), équation différentielle du 1er ordre, est une relation linéaire représentant le comportement dynamique du réservoir autour de la hauteur H_0 .

III-2- Représentation des systèmes dynamiques, continus, linéaires et invariants.

III-2-1- Notion mathématique.



L'application des lois de la physique à l'étude des systèmes linéaires nous conduit à une équation différentielle linéaire à coefficients constants liant les grandeurs d'entrée $x(t)$ aux grandeurs de sortie $y(t)$:

$$a_0 \cdot y(t) + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \dots + a_n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 \cdot x(t) + b_1 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \dots + b_m \cdot \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

Les cas pratiques rencontrés impose d'avoir $m \leq n$, et **n est appelé l'ordre du système.**

La solution d'une telle équation s'obtient en ajoutant une solution particulière (régime permanent) à la solution générale sans second membre (régime transitoire).

On pourrait écrire l'équation différentielle dans la case « système » ce qui n'avancerait à rien, la sortie n'étant pas exprimable en fonction de l'entrée tant qu'on n'a pas résolu l'équation.

L'idée consiste à utiliser la **transformation de Laplace** qui permet d'obtenir **une relation algébrique** entre la sortie et l'entrée sans avoir à résoudre l'équation différentielle.

III-2-2- Fonction de transfert d'un système ; schéma-bloc.

Un système physique dynamique, continu, linéaire et invariant a un comportement qui répond à une équation intégral-différentielle du type :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t)$$

Si nous effectuons la transformée de Laplace de cette équation différentielle, nous obtenons :

$$a_n p^n Y(p) + a_{n-1} p^{n-1} Y(p) + \dots + a_0 Y(p) = b_m p^m X(p) + b_{m-1} p^{m-1} X(p) + \dots + b_0 X(p)$$

Soit encore :

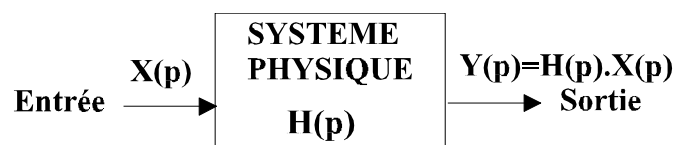
$$\frac{Y(p)}{X(p)} = H(p) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}$$

H(p) est appelé

fonction de transfert

Cette fonction de transfert s'exprime donc simplement par le rapport de deux polynômes en p construits à partir des coefficients de l'équation différentielle.

Un système physique peut être représenté fonctionnellement par "Schéma-Blocs" de la façon suivante :

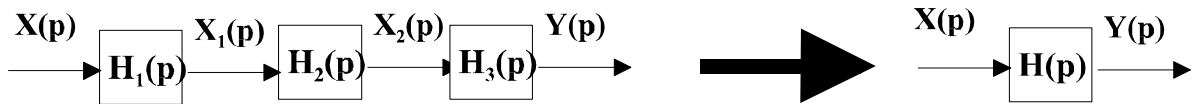


III-2-3- Manipulation des schémas-blocs.

Un système complexe se décompose en réalité d'une combinaison d'un certain nombre de sous-ensembles physiques élémentaires auxquelles on peut associer individuellement une fonction de transfert.

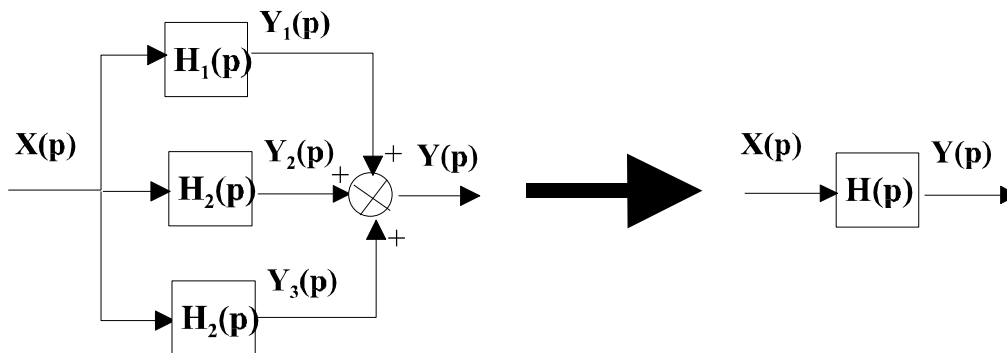
Blocs en cascade : $Y(p) = H_3(p).X_2(p) = H_3(p).H_2(p).X_1(p) = H_3(p).H_2(p).H_1(p).X(p) = H(p).X(p)$

$$\text{D'où } H(p) = H_3(p).H_2(p).H_1(p)$$



Blocs en parallèle : $Y(p) = Y_3(p) + Y_2(p) + Y_1(p) = H_3(p).X(p) + H_2(p).X(p) + H_1(p).X(p)$

$$\text{D'où } H(p) = H_3(p) + H_2(p) + H_1(p)$$



III-3-Systèmes linéaires fondamentaux.

III-3-1- Système à action proportionnelle.

C'est un système défini par l'équation différentielle d'ordre 0 suivante :

$a_0 y(t) = b_0 x(t)$ équation que l'on peut mettre sous la forme : $y(t) = Kx(t)$.

Si nous effectuons la transformée de Laplace de cette équation, nous obtenons : $Y(p) = KX(p)$.

Soit encore **$H(p)=K$ fonction de transfert d'un système à action proportionnelle.**

III-3-2- Système dérivateur pur.

C'est un système défini par l'équation différentielle suivante :

$$y(t) = K \left[x(t) + T' \cdot \frac{dx(t)}{dt} \right].$$

Si nous effectuons la transformée de Laplace de cette équation, nous obtenons :

$$Y(p) = K(1 + T'p)X(p)$$

Soit encore **$H(p) = K(1 + T'p)$ fonction de transfert d'un système dérivateur pur.**

III-3-3- Système à retard.

C'est un système défini par l'équation suivante :

$$y(t) = x(t - \tau).$$

Si nous effectuons la transformée de Laplace de cette équation, nous obtenons :

$$Y(p) = e^{-\tau.p}.X(p).$$

Soit encore **$H(p) = e^{-\tau.p}$ fonction de transfert d'un système à retard pur.**

III-3-4- Système intégrateur.

C'est un système physique dynamique, continu, linéaire et invariant ayant un comportement qui répond à une équation intégral-différentielle du type :

$$\boxed{\frac{dy(t)}{dt} = K.x(t)}$$

Si nous effectuons la transformée de Laplace de cette équation différentielle, nous obtenons :

$$p.Y(p) = K.X(p)$$

Soit encore :
$$\boxed{\frac{Y(p)}{X(p)} = H(p) = \frac{K}{p}}$$

$H(p)$: fonction de transfert d'un système intégrateur

On définit : **K = Gain**

III-3-5- Système du 1^{er} ordre.

C'est un système physique dynamique, continu, linéaire et invariant ayant un comportement qui répond à une équation intégral-différentielle du type :

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot x(t)$$

Si nous effectuons la transformée de Laplace de cette équation différentielle, nous obtenons :

$$TpY(p) + Y(p) = K \cdot X(p)$$

Soit encore :
$$\frac{Y(p)}{X(p)} = H(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

H(p) : **fonction de transfert du premier ordre**

On définit : **T = Constante de temps**

K = Gain

III-3-6- Système du 1^{er} ordre généralisé :

C'est un système physique dynamique, continu, linéaire et invariant ayant un comportement qui répond à une équation intégral-différentielle du type :

$$T_2 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot \left[T_1 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \right]$$

Si nous effectuons la transformée de Laplace de cette équation différentielle, nous obtenons :

$$T_2 \cdot p \cdot Y(p) + Y(p) = K \cdot [T_1 \cdot p \cdot X(p) + X(p)]$$

Soit
$$\frac{Y(p)}{X(p)} = H(p) = \frac{K \cdot (1 + T_1 p)}{1 + T_2 p}$$

H(p) : **fonction de transfert du premier ordre généralisé.**

On définit : **T₁ = Constante de temps du numérateur**

T₂ = Constante de temps

K = Gain

III-3-7- Système du 2^{ème} ordre.

C'est un système physique dynamique, continu, linéaire et invariant ayant un comportement qui répond à une équation intégral-différentielle du type :

$$\frac{1}{\omega_o^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_o} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot x(t)$$

Si nous effectuons la transformée de Laplace de cette équation différentielle, nous obtenons :

$$\frac{1}{\omega_o^2} p^2 Y(p) + \frac{2\xi}{\omega_o} p Y(p) + Y(p) = K \cdot X(p)$$

soit encore :

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = H(p) = \frac{K}{\left(\frac{p}{\omega_o}\right)^2 + \frac{2\xi}{\omega_o} p + 1}$$

$H(p)$: **fonction de transfert du 2ème ordre**

On définit : ξ = **coefficient d'amortissement réduit**

ω_o = **Pulsation propre du système non amorti**

K = **Gain**

IV- ETUDE TEMPORELLE DES SYSTEMES LINEAIRES FONDAMENTAUX.

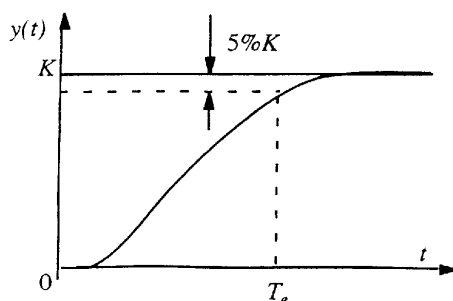
IV-1- Réponse indicielle des systèmes fondamentaux.

IV-1-1- Définitions générales relatives à la réponse indicielle :

Le signal de sortie en réponse à un échelon d'entrée est appelé réponse indicielle. Suivant sa forme, on définit des paramètres caractéristiques suivants :

a-Temps de réponse :

Si la réponse à un échelon présente l'allure ci-dessous, on peut noter que la valeur K avec $K = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ qualifie le comportement statique.



Pour qualifier la durée du régime transitoire, on introduit le temps de réponse défini comme le temps à partir duquel :

$$\forall t > Tr \quad \frac{|y(t) - K|}{K} < 5\%$$

b- Ecart statique :

L'écart statique est la différence entre la consigne et la réponse en régime permanent.

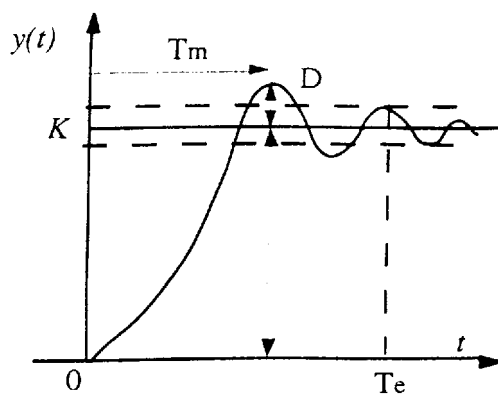
$$\mathcal{E}s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) - s(t)$$

D'après le théorème de la valeur finale (cf polycopié "les outils mathématiques")

$$\mathcal{E}s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) - s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot (E(p) - S(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot E(p) (1 + H(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} Eo (1 + H(p))$$

c- Dépassement :

Si la réponse à un échelon est telle que temporairement elle dépasse sa valeur finale, on introduit les valeurs suivantes pour qualifier le régime transitoire.



Le dépassement est égal au rapport D/K

On l'exprime en % de K.

Une réponse indicielle **sans dépassement** sera dite **apériodique**.

Tm est défini comme l'instant du premier maximum.

IV-1-2- Réponse indicielle à un système intégrateur.

Soit un système physique du premier ordre ayant pour fonction de transfert :

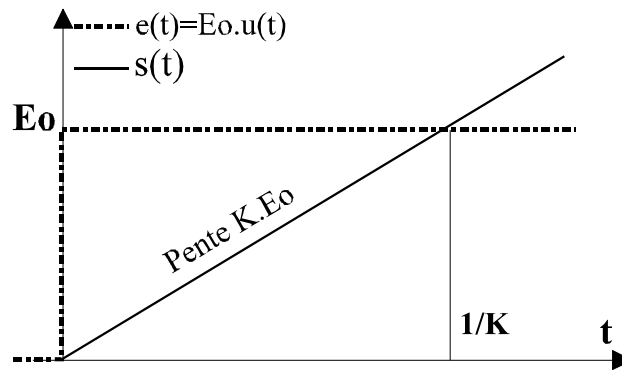
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p}$$

Pour une entrée échelon du type : $e(t) = Eo u(t)$, nous avons $E(p) = \frac{Eo}{p}$

$$\text{Soit : } S(p) = \frac{K \cdot E(p)}{p} = \frac{K \cdot Eo}{p^2}$$

Après transformation inverse de S(p), on obtient finalement : $s(t) = K \cdot Eo \cdot t$

La courbe ci-dessous donne l'allure de la courbe s(t)



IV-1-3- Réponse indicielle à un système du premier ordre.

Soit un système physique du premier ordre ayant pour fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + Tp}$$

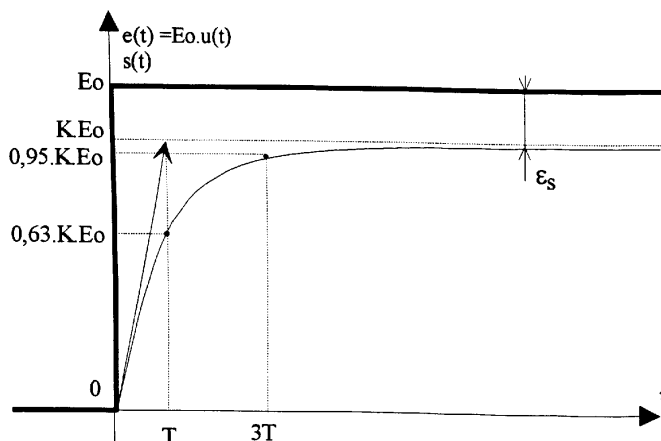
Pour une entrée échelon du type : $e(t) = E_0 u(t)$, nous avons $E(p) = \frac{E_0}{p}$

$$\text{Soit } S(p) = \frac{K}{1 + Tp} E(p) = \frac{K.E_0}{p(1 + Tp)} = \frac{K.E_0}{p} - \frac{K.E_0}{p + 1/T}$$

Après transformation inverse de $S(p)$, on obtient finalement :

$$s(t) = K.E_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

La courbe ci-dessous donne l'allure de la courbe $s(t)$



Remarque : $s(0) = 0$

Pente à l'origine : $K.E_0/T$

La tangente à l'origine coupe l'asymptote à $t=T$

$$s(T) = 0,63.K.E_0$$

Pas de dépassement

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K.E_0$$

$$\text{Ecart statique : } \mathcal{E}_s = E_0.(1 - K)$$

$$\text{Temps de réponse : } Tr = 3T$$

$$\text{car } s(3T) = 0,95.K.E_0$$

IV-1-4- Réponse indicielle à un système du premier ordre généralisé.

Soit $H(p)$ une fonction de transfert du premier ordre généralisé :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K.(1+T_1p)}{1+T_2p}$$

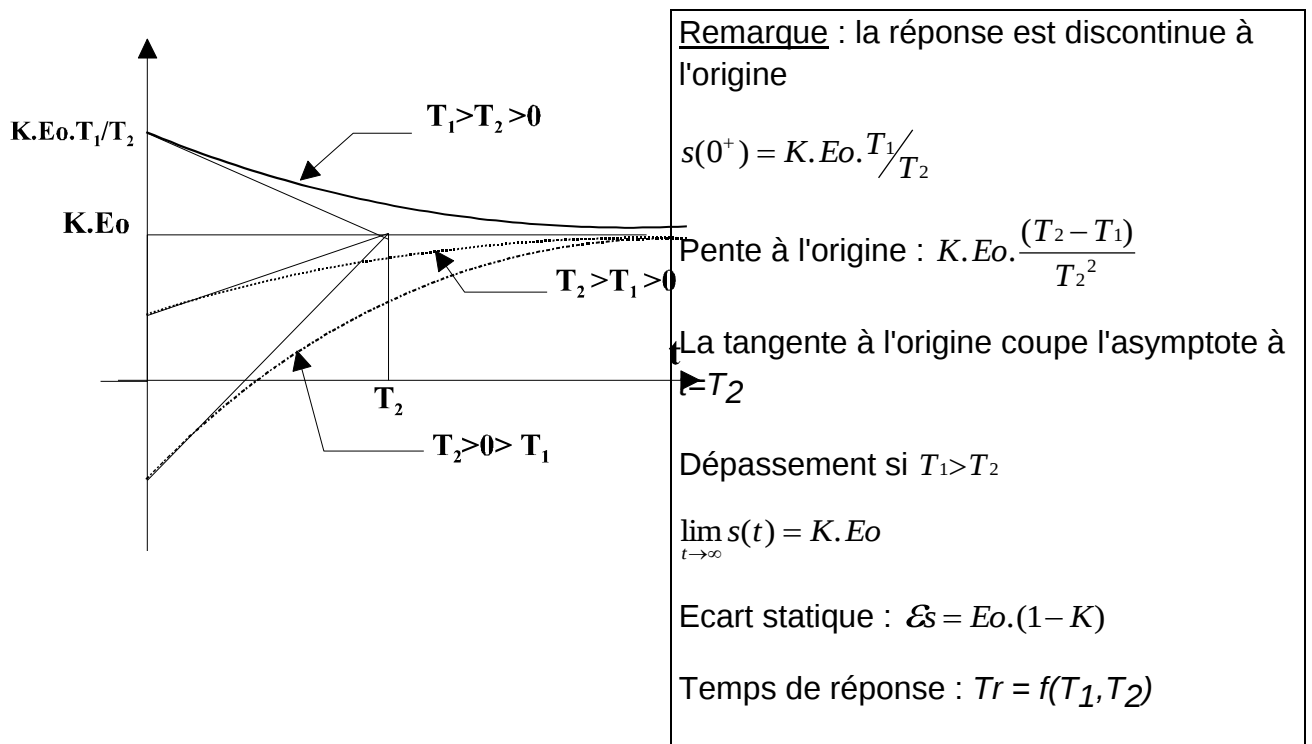
Pour une entrée échelon du type : $e(t) = E_o u(t)$, nous avons $E(p) = \frac{E_o}{p}$

$$\text{Soit } S(p) = \frac{K.(1+T_1p)}{1+T_2p} . E(p) = \frac{K.E_o.(1+T_1p)}{p.(1+T_2p)} = \frac{K.E_o}{p} + \frac{K.E_o.(T_1-T_2)}{T_2.(p+\frac{1}{T_2})}$$

Après transformation inverse de $S(p)$, on obtient finalement :

$$s(t) = K.E_o \left(1 + \frac{(T_1 - T_2)}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

La courbe ci-dessous donne l'allure de la courbe $s(t)$ en supposant $T_2 > 0$



IV-1-5- Réponse indicielle à un système du deuxième ordre.

Soit un système du deuxième ordre ayant pour fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_o^2} + \frac{2\xi}{\omega_o} p + 1}$$

Pour une entrée échelon du type : $e(t) = E_o u(t)$, nous avons $E(p) = \frac{E_o}{p}$

$$\text{Soit } S(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_o^2} + \frac{2\xi}{\omega_o} p + 1} E(p) = \frac{K \cdot E_o}{p \left(\frac{p^2}{\omega_o^2} + \frac{2\xi}{\omega_o} p + 1 \right)} = \frac{K \omega_o^2 \cdot E_o}{p(p^2 + 2\xi \omega_o p + \omega_o^2)}$$

Recherche des racines du dénominateur :

$$p = 0$$

$$p^2 + 2\xi \omega_o p + \omega_o^2 = 0 \quad \text{Calcul du discriminant } \Delta = 4\omega_o^2(\xi^2 - 1)$$

$$\text{Si } \xi > 1 \text{ alors } \Delta > 0 \text{ 2 racines réelles : } p_i = \omega_o \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

$$\text{Si } \xi = 1 \text{ alors } \Delta = 0 \text{ 1 racine double : } p = -\omega_o$$

$$\text{Si } \xi < 1 \text{ alors } \Delta < 0 \text{ 2 racines complexes conjugués : } p_i = \omega_o \left(-\xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2} \right)$$

1^{er} Cas : Réponse indicielle en régime apériodique $\xi > 1$

$$S(p) = \frac{K \cdot E_o \cdot \omega_o^2}{p(p - p_1)(p - p_2)} \quad \text{avec} \quad p_1 = \omega_o \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \quad \text{et} \\ p_2 = \omega_o \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

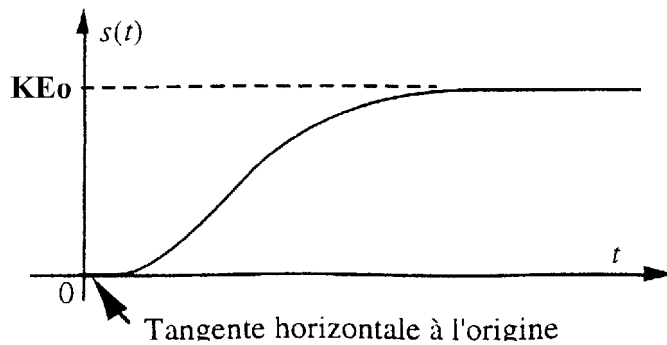
$$S(p) = \frac{K \cdot E_o \cdot \omega_o^2}{p(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{K \cdot E_o}{p} + \frac{K \cdot E_o \cdot \omega_o^2}{p_1(p_1 - p_2)(p - p_1)} - \frac{K \cdot E_o \cdot \omega_o^2}{p_2(p_1 - p_2)(p - p_2)}$$

$$S(p) = K \cdot E_o \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{\omega_o^2}{(p_1 - p_2)} \cdot \left(\frac{1}{p_1(p - p_1)} - \frac{1}{p_2(p - p_2)} \right) \right)$$

Après transformation inverse de $S(p)$, on obtient finalement :

$$s(t) = K \cdot E_o - \frac{K \cdot E_o \cdot \omega_o^2}{p_2 - p_1} \left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2} \right)$$

La courbe ci-dessous donne l'allure de la courbe $s(t)$



Remarque : Elle ressemble à celle d'un premier ordre.

$$s(0) = 0$$

Tangente à l'origine : horizontale

Pas de dépassement

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K.Eo$$

$$\text{Ecart statique : } \mathcal{E}_s = Eo.(1 - K)$$

Temps de réponse : Cf ultérieurement

2ème Cas : Réponse indicielle en régime apériodique critique $\xi = 1$

Une racine double : $p = -wo$ d'où

$$S(p) = \frac{K.Eo.wo^2}{p(p+wo)^2} = \frac{K.Eo}{p} - \frac{K.Eo}{p+wo} - \frac{K.Eo.wo}{(p+wo)^2}$$

Après transformation inverse de $S(p)$, on obtient finalement :

$$s(t) = K.Eo(1 - e^{-wo.t} - wo.t.e^{-wo.t})$$

C'est un cas particulier du régime apériodique avec une racine double.

L'allure de la courbe de réponse temporelle est donc identique à celle obtenu pour $\xi \geq 1$.

Les Remarques précédentes restent donc les mêmes

3ème Cas : Réponse indicielle en régime oscillatoire $\xi < 1$

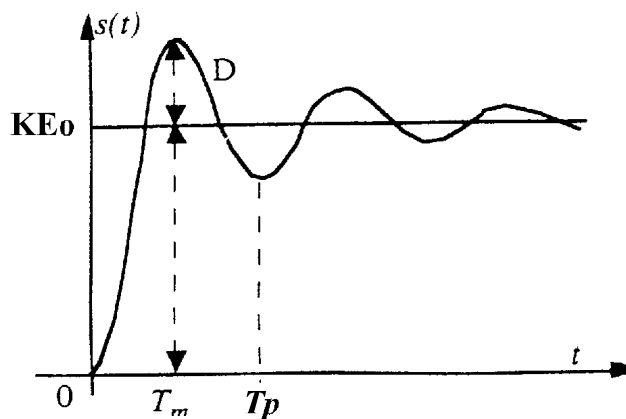
$$S(p) = \frac{K wo^2 . Eo}{p(p^2 + 2\xi wo p + wo^2)}$$

Après transformation inverse de $S(p)$, on obtient finalement :

$$s(t) = K.Eo \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi wo t} \sin(wo \sqrt{1-\xi^2} . t + \varnothing) \right]$$

Avec $\varphi = -\arctg\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$

La courbe ci-dessous donne l'allure de la courbe $s(t)$



Remarque : $s(0) = 0$

Tangente à l'origine : horizontale

Dépassement : $D_k = e^{-\frac{\pi\xi k}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

Temps du 1^{er} maximum :

$$T_m = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

Période de la sinusoïde :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

Pulsation propre : $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K.Eo$$

Ecart statique : $\mathcal{E}_s = Eo.(1-K)$

Temps d'établissement : Cf ultérieurement

Remarques sur les temps de réponse, temps du premier maximum et dépassement.

Un trace de courbes nous donnerait la valeur des premiers dépassements, le temps d'établissement à 5%, et le temps du premier maximum en régime indicel pour un système du second ordre en fonction de l'amortissement.

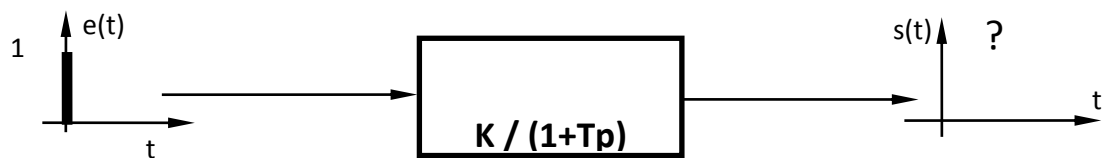
Quelques remarques s'imposent :

1. Plus le coefficient d'amortissement ξ est faible, plus le dépassement est grand.
2. Plus le coefficient d'amortissement ξ est faible, plus le temps du premier maximum est faible, donc plus le nombre d'oscillation est grand. Pour $\xi > 0,7$ on peut montrer qu'il n'y a qu'un dépassement et qu'il est faible. En pratique, on

considérera qu'un système d'amortissement supérieur à 0,7 est non oscillant car les oscillations ne sont pas visibles.

3. Le temps d'établissement présente un minimum pour une valeur de $\xi \approx 0,75$. Pour une valeur de ξ faible, le temps de réponse sera important.
4. L'amortissement dit "optimal" assure un bon compromis entre le dépassement et le temps d'établissement. Il est obtenu pour $\xi = 0,7 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Pour cet amortissement optimal le produit $\omega_0.T_e$ est voisin de 3. Cette relation $\omega_0.T_e \approx 3$ est importante puisqu'elle fournit une relation entre la pulsation propre et le temps d'établissement.

IV-2- Réponse impulsionnelle (à un Dirac) d'un système du premier ordre.

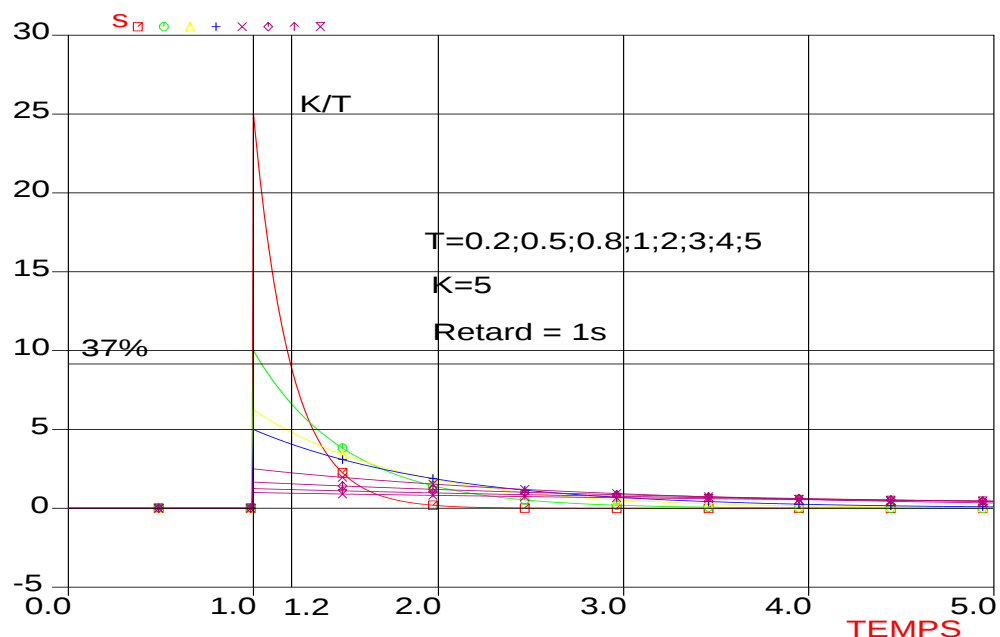


$$E(p) = 1$$

$$S(p) = K/(1+Tp)$$

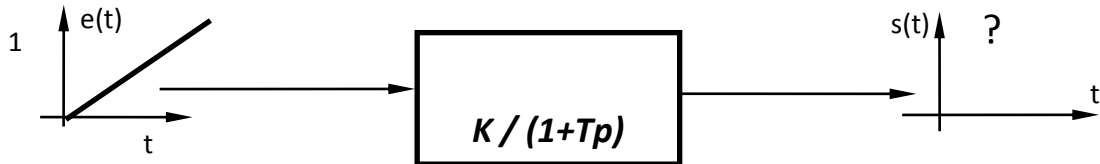
Par le même raisonnement que l'étude précédente, on obtient : $s(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$

d'où la réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre :



Remarque : pour $t = T$ on obtient 37% de l'amplitude de départ.
La valeur résiduelle à partir de $3T$ est de 5%.

IV-3- Réponse à une rampe d'un système du premier ordre.



$$e(t) = at \quad E(p) = a./ p^2$$

$$\text{d'où } S(p) = \frac{Ka}{(1+Tp)P^2}$$

En appliquant le théorème des valeurs initiales et finales on trouve :

$$s(0)=0, s'(0) = 0$$

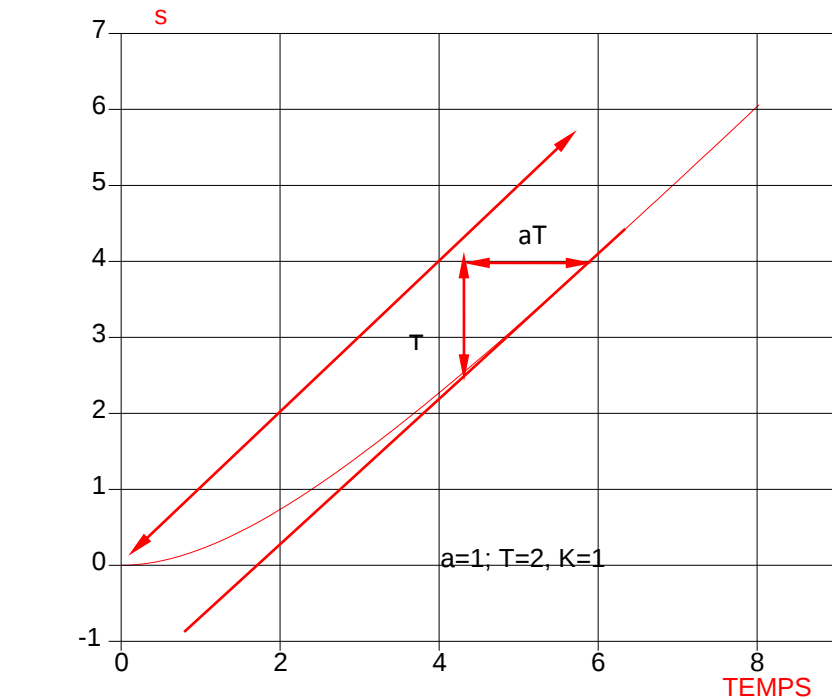
$$s(\text{infini}) \text{ infini}, s'(\text{infini}) = Ka$$

$$s(\text{infini}) - e(\text{infini}) = \text{erreur}(\text{infini}) = KaT : \text{écart de trainage.}$$

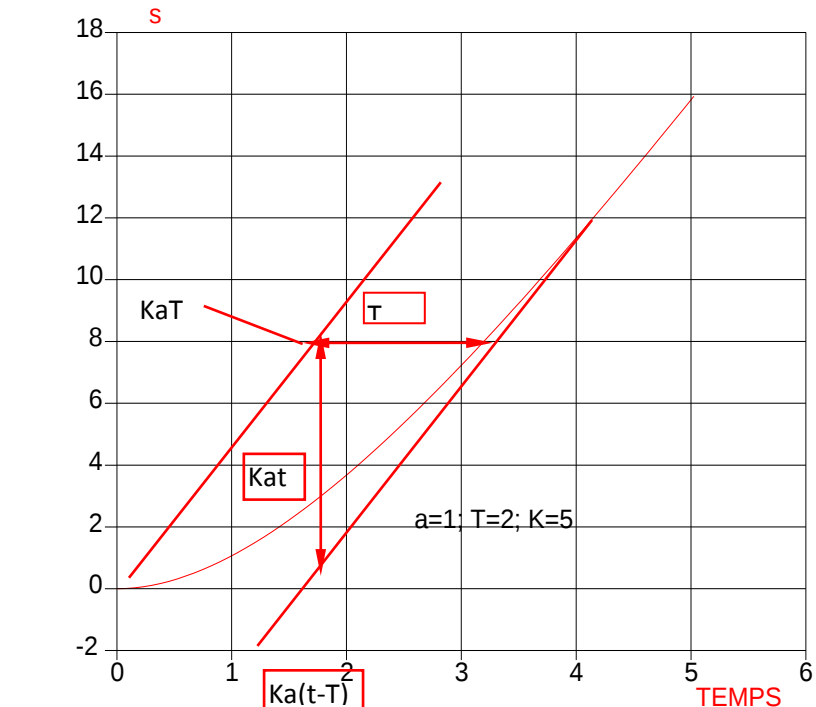
La transformée de Laplace inverse donne :

$$s(t) = Ka(t - T) + Ka e^{-\frac{t}{T}}$$

Représentation de la réponse à une rampe unitaire d'un système du premier ordre



En régime permanent, la sortie suit l'entrée avec un retard de T.



Remarque :

Au bout de $3T$, le terme $Te^{-t/T}$ est pratiquement éteint. La réponse $s(t)$ s'écrit alors $Ka(t-T)$ qui est également la rampe mais retardée de T par rapport à celle que donnerait un système sans inertie ($T=0$).

On explique cela par le fait que le système à inertie a du mal à suivre son entrée lorsque celle-ci varie.

L'écart de traînage, $eT=KaT$, pour un système donné, est d'autant plus grand que la pente a , de l'entrée, est grande.