

C : Correction des systèmes asservis.

1 : Problème.

Cahier des charges

Les exigences sont exprimées sous la forme d'un cahier des charges.

Éléments du cahier de charges

1. Stabilité

On analyse la stabilité par les critères de Routh et de Nyquist (partie réelle des pôles).

Marges de stabilité

Si marges de stabilité faibles $\Rightarrow$ système proche de l'instabilité en BF, réponse oscillatoire mal amortie, fort dépassement

2. Précision en régime permanent

Pour avoir une bonne précision, deux solutions :

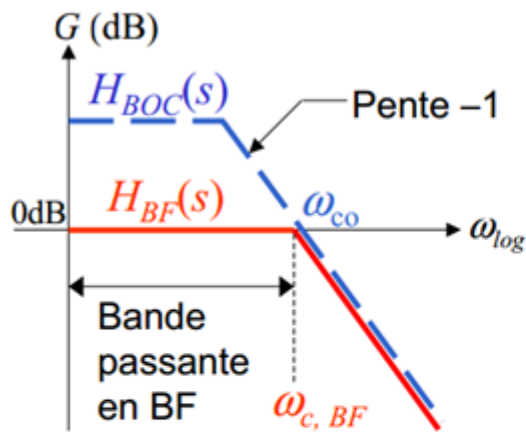
- augmenter le gain en basses fréquences du système non bouclé
- introduire des intégrateurs (si nécessaire)

3. Rapidité

Pour augmenter la rapidité du système en BF, il faut élargir sa bande passante en BF.

Augmenter la BP en BF $\Leftrightarrow$ augmenter la pulsation de coupure à 0dB ω_{co} de $H_{BOC}(s)$

Système du 1^{er} ordre en BF



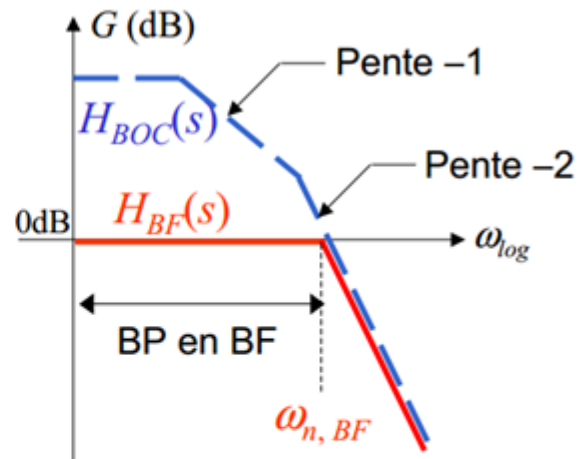
$$\omega_{c,BF} \approx \omega_{c0}$$

Relation temps de montée-BP

$$t_m f_{c,BF} \approx 0.35$$

$$f_{c,BF} = \frac{\omega_{c,BF}}{2\pi}, \quad \omega_{c,BF} = \frac{1}{T_{BF}}$$

Système du 2^e ordre en BF



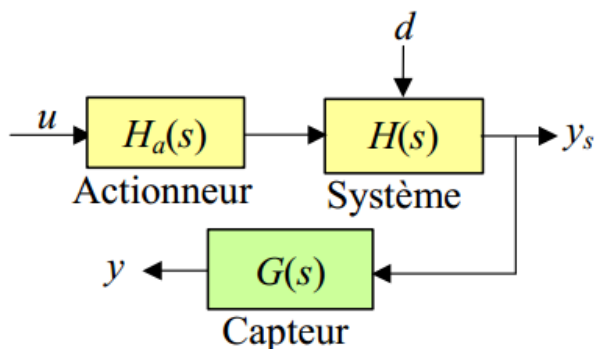
$$\omega_{n,BF} \approx \omega_{c0}$$

$$\text{Pour } 0.2 < \xi_{BF} < 0.8$$

$$\text{On a } 2 < \omega_{n,BF} t_m < 4$$

Simplifions le problème.

Caractéristiques du système piloté (entité non modifiable)



- système mal amorti
- système lent
- système peu précis
- système présentant une tendance à la dérive
- cas extrême : système instable

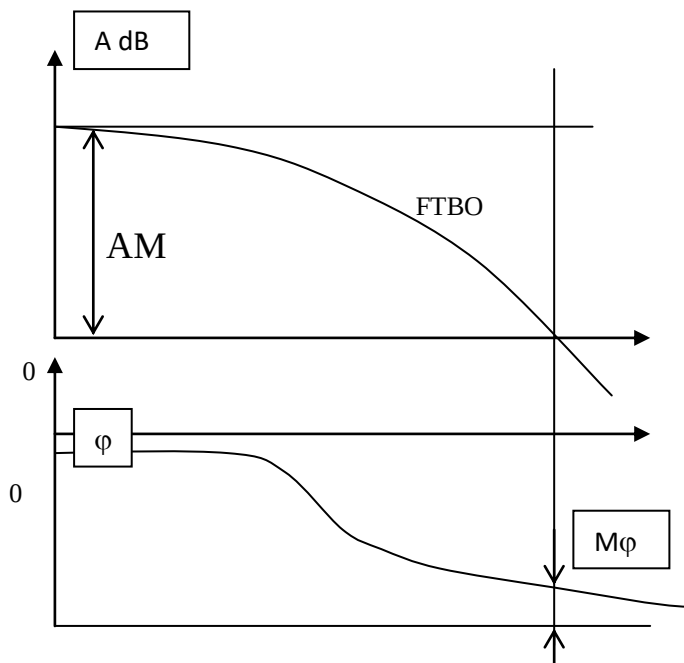
Dilemme stabilité – précision.

a- On a vu précédemment que pour satisfaire aux critères de stabilité et de précision on est amené à formuler des conditions sur la FTBO.

- précision : $\alpha \geq 1 \Rightarrow \varepsilon_s = 0$
 $\alpha \geq 2 \Rightarrow \varepsilon_d = 0$
- stabilité : $MG > 0$ et $M\varphi > 0$.

b- Approche simplifiée.

En simplifiant à l'extrême on peut caractériser, sur le diagramme de Bode de la FTBO la stabilité et la précision de la façon suivante :



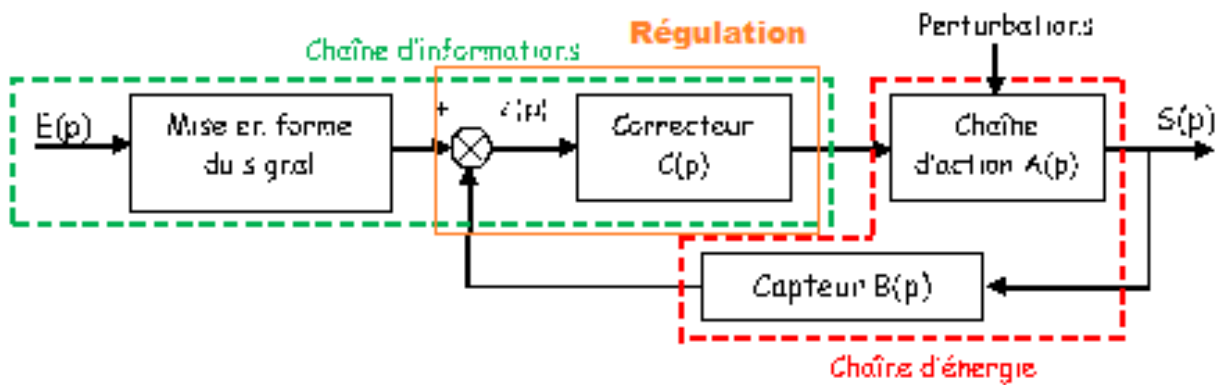
AM : caractérise la précision et la rapidité (fort module donc fort gain).

$M\phi$: ici caractérise la marge de stabilité.

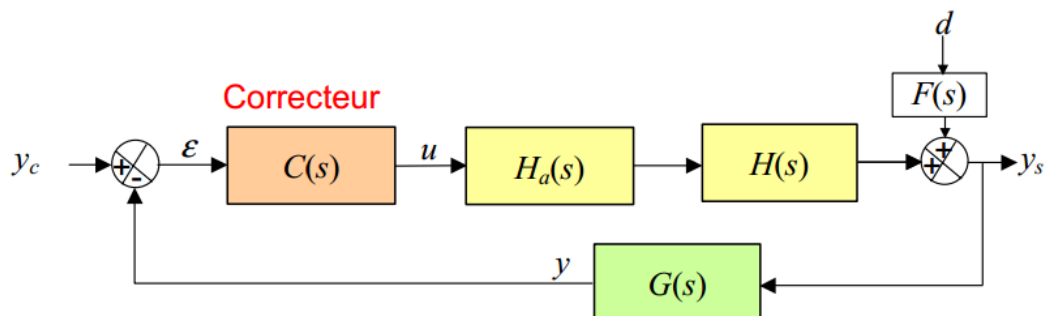
2 : Méthodes de correction

La partie amont du système s'appelle la régulation (encadrée en orange).

La mise en forme du signal s'appelle aussi « adaptateur ».

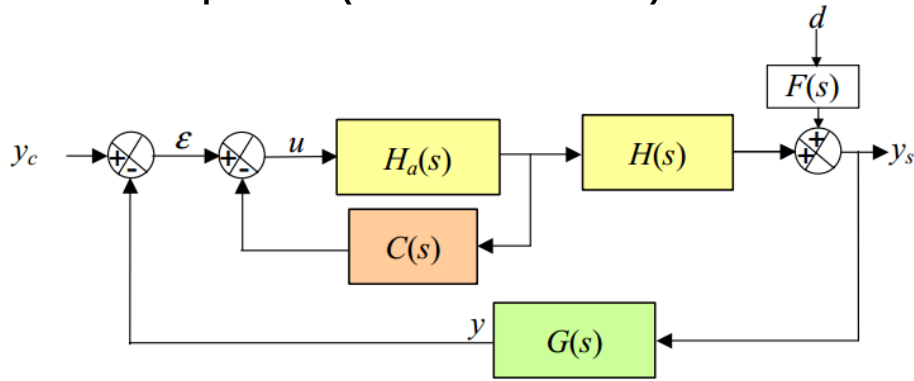


21 : Méthodes de correction 211 : Correction série

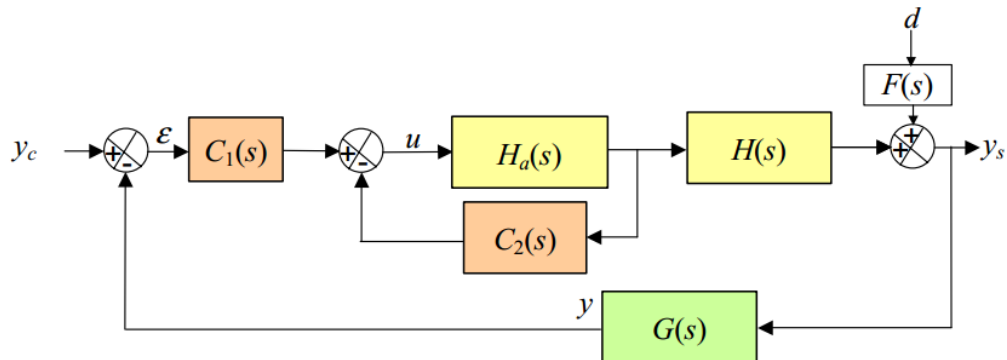


Rôle du correcteur : élaborer le signal de commande u approprié à partir du signal d'erreur ϵ

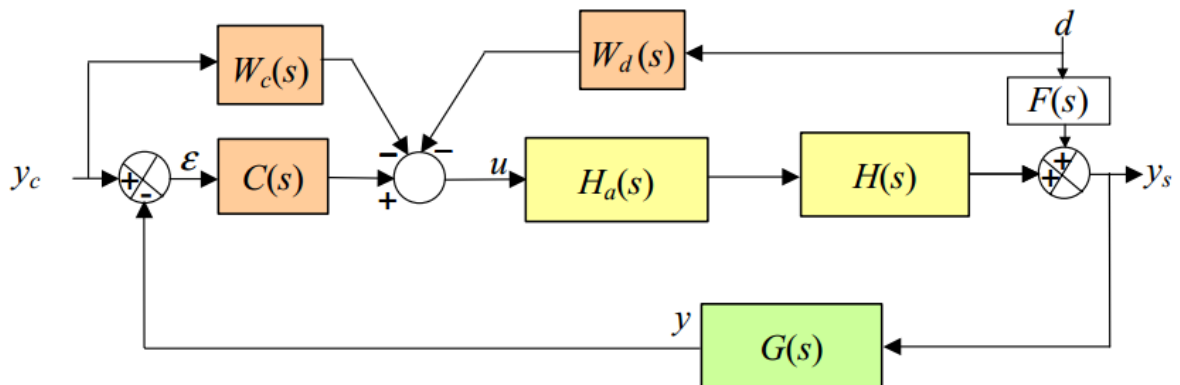
212 : Correction parallèle (ou en boucle retour)



213 : Correction série-parallèle (mixte)



214 : Correction par anticipation



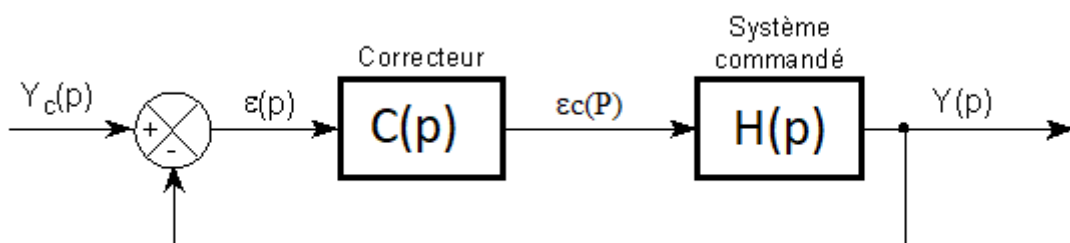
Remarques

La correction série est la plus couramment utilisée

Pour la correction série, le schéma d'asservissement est transformé en un asservissement à retour unitaire

22 : Les différents correcteurs.

Schéma simplifié

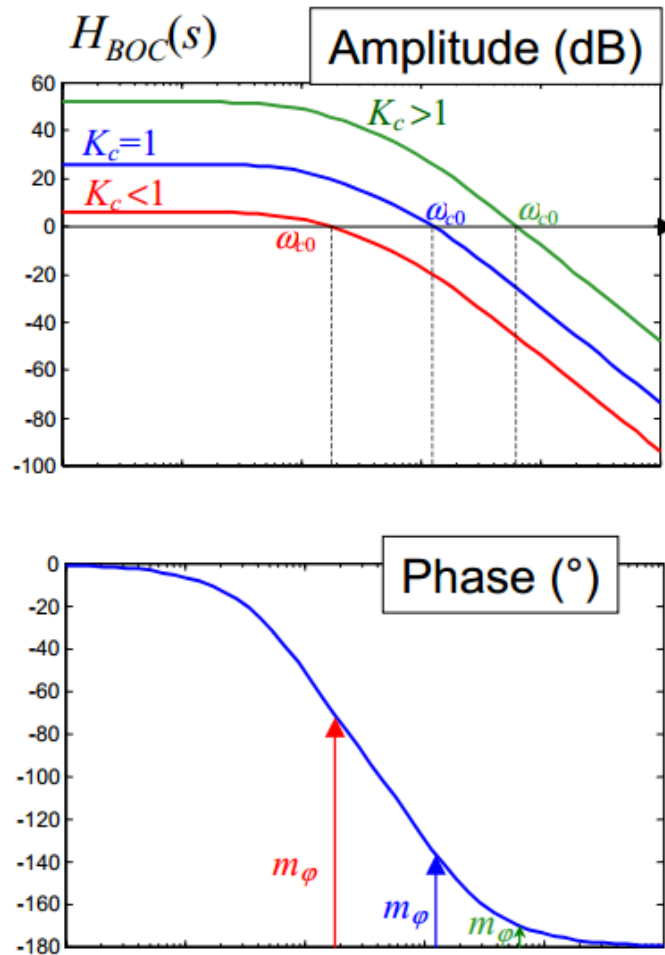


$Y_c(p)$ est la consigne
 $Y(p)$ est la sortie
 $\varepsilon(p)$ est l'écart
 $\varepsilon_c(p)$ est l'écart corrigé.

221 : Commande proportionnelle P.

$C(p) = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon} = K = K_c = K_p$ est appelé gain du correcteur.

Allure des diagrammes de Bode.



Effets du correcteur

Si $K_c > 1$

- Translation du diagramme de gain de Bode vers le haut
- Augmentation de $\omega_{c0} \Rightarrow$ augmentation de la rapidité
- Diminution de la marge de phase (dégradation de la stabilité en BF)

Si $K_c < 1$

- Translation du diagramme de gain de Bode vers le bas
- Diminution de $\omega_{c0} \Rightarrow$ diminution de la rapidité
- Augmentation de la marge de phase (amélioration stabilité)

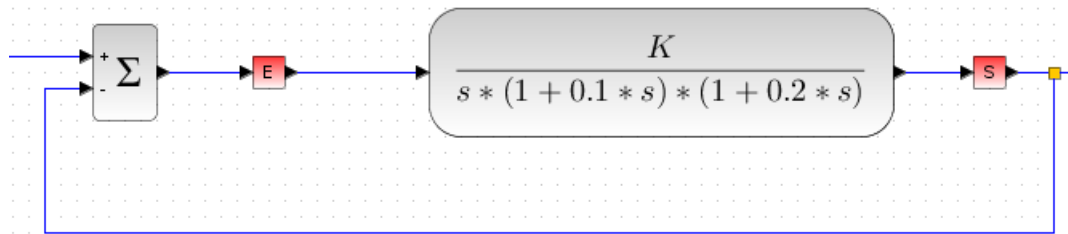
Méthode de réglage : on règle ce correcteur en translatant la courbe des gains de manière à répondre au cahier des charges en termes de marges

La mesure de la translation nécessaire donne $T_{dB} = 20 \cdot \lg(K_p)$ $K_p = 10^{\frac{T_{dB}}{20}}$

Exemple :

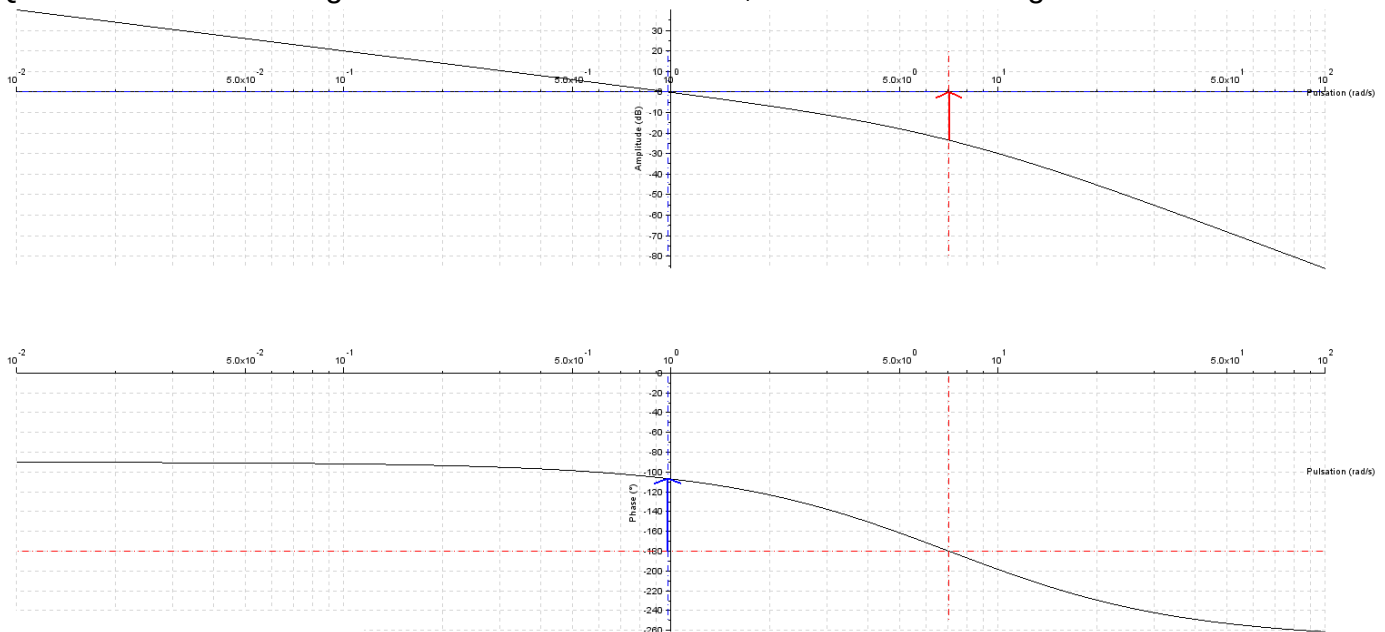
$$\text{Soit : } FTBO(p) = K \times \frac{1}{p \times (1 + 0.1 \times p) \times (1 + 0.2 \times p)}$$

Le schéma bloc correspondant est :



Le cahier des charges impose une marge de gain de 12dB et une marge de phase de 45°

Question 1 : tracer le digramme de Bode de la FTBO, déterminer les marges



Pour un gain K de 1 : les marges sont : MG = 23.52 dB et $M\varphi = 73.36^\circ$

On remarque que les marges sont trop grandes donc on choisira un gain $K > 1$ afin d'obtenir les réglages du CDCF.

Question 2 : déterminer K afin d'obtenir la marge de phase souhaitée

Résolution graphique : la pulsation de coupure (à 0dB) est $\omega = 1$ rd/s. Soit ω_{45} la valeur de la pulsation pour laquelle la marge de phase est de 45°.

Graphiquement, il suffit de rechercher le point d'intersection de la courbe de phase et de la droite $\varphi = -135^\circ$ et de remonter sur le diagramme des gains.

$\omega_{45} \approx 2.8 \text{ rad/s}$ (Sur la courbe), pour cette valeur le gain vaut environ $G_{45} = -9 \text{ dB}$ il faudra donc remonter la courbe des gains de 9 dB afin d'avoir la pulsation de coupure au bon endroit soit :

$$20 \log(K) = 9 \text{ d'où } K = 10^{\frac{9}{20}} = 2.81$$

Question 3 : idem pour la marge de gain.

On souhaite une MG = 12dB. On recherche ω_{12} , la pulsation pour laquelle la courbe de phase coupe la droite des -180° et on regarde sur la courbe la valeur du gain G .

On retombe bien sûr sur la marge de Gain initiale pour $\omega_{12} = 5 \text{ rad/s}$ et donc $G_{dB} = -23.52 \text{ dB}$. Il suffit de déplacer la courbe de gain pour que la valeur de G soit égale à -12 dB

Donc $G + 20 \log K = -12$ donc $-23.52 + 20 \log K = -12$ et donc $K = 10^{\frac{11.52}{20}} = 3.76$

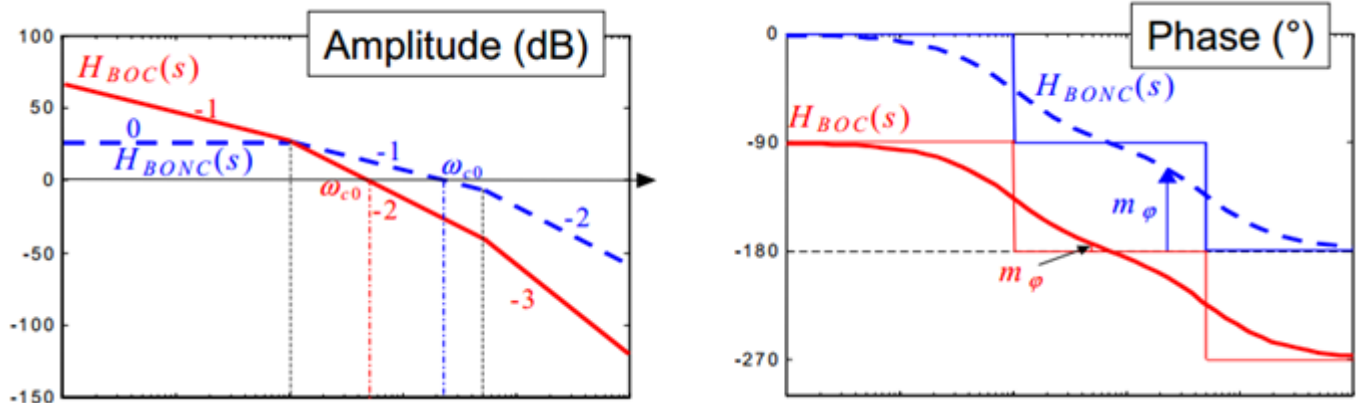
Question 4 : conclusion sur le réglage de K

On doit donc choisir $2.81 < K < 3.76$

222 : Commande à action intégrale I.

$$C(s) = \left(\frac{1}{T_i s} \right)$$

Sur un système du second ordre stable



Augmentation des pentes de +20dB/décade

Translation du diagramme de phase de 90° vers le bas

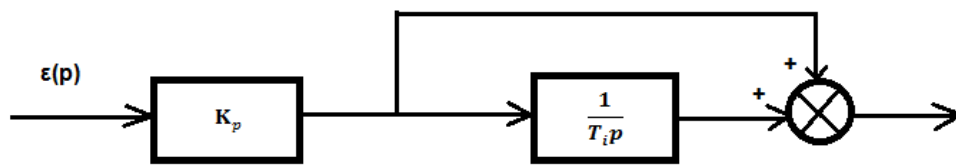
Effets :

- annulation de l'erreur statique, diminution de l'erreur de vitesse (si le système non corrigé est de classe 0)
- rejet des perturbations constantes
- Diminution de la pulsation de coupure à 0dB ω_{co}
- diminution de la rapidité du système en BF

Le correcteur I n'améliore que la précision ; les autres performances sont dégradées

223 : Commande à action proportionnelle intégrale PI.

Ce correcteur est constitué de deux éléments montés comme ceci.



$$C(s) = K_p \left(\frac{1}{T_i s} + 1 \right) = \frac{K_p}{T_i} \frac{1}{s} (1 + T_i s)$$

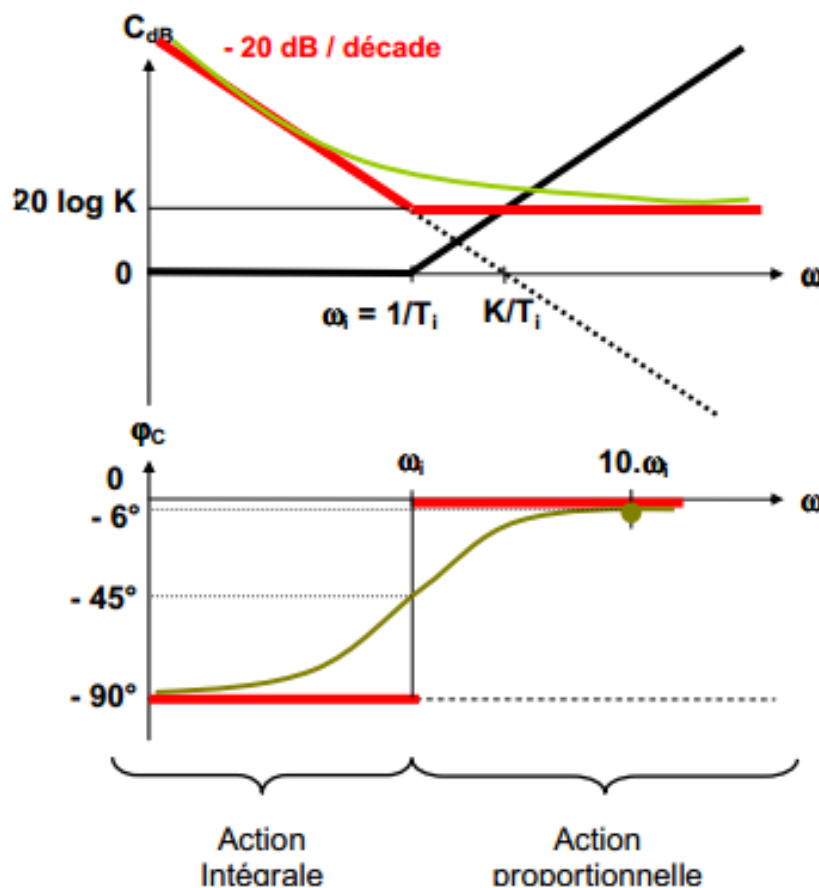
Avec K_p gain réglable et T_i temps d'intégration réglable également.

Plus T_i est grande, plus l'action intégrale est faible

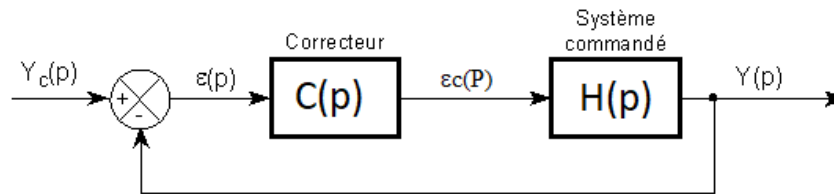
Remarque : on écrit souvent la fonction de transfert sous la deuxième forme.

- Le premier terme correspond au gain global du correcteur.
- Le deuxième terme est une intégration afin d'augmenter la classe du système (précision et compensation des perturbations).
- Le troisième terme on le verra est là pour corriger le risque d'instabilité.

Diagramme de Bode d'un correcteur PI



Considérons le système décrit précédemment pour le correcteur proportionnel et ajoutons un correcteur de type PI :



Donnons la FTBO du système sous la forme suivante $FTBO(p) = H(p) = \frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$
 l'intégrateur est absent dans B(p) le système ne permet pas la compensation de la perturbation.

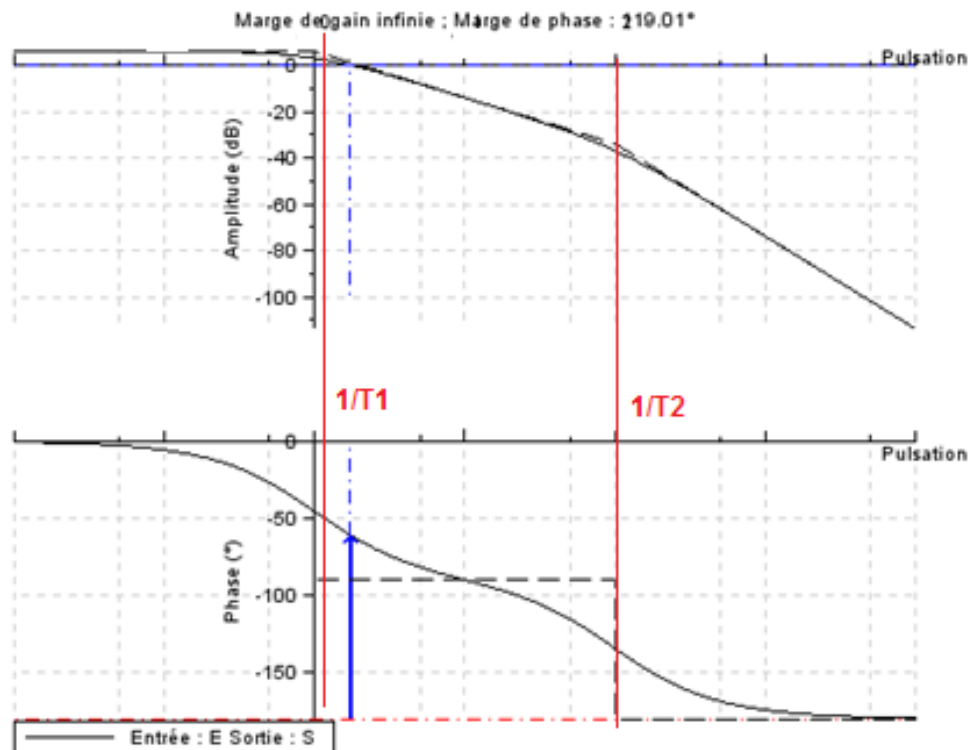
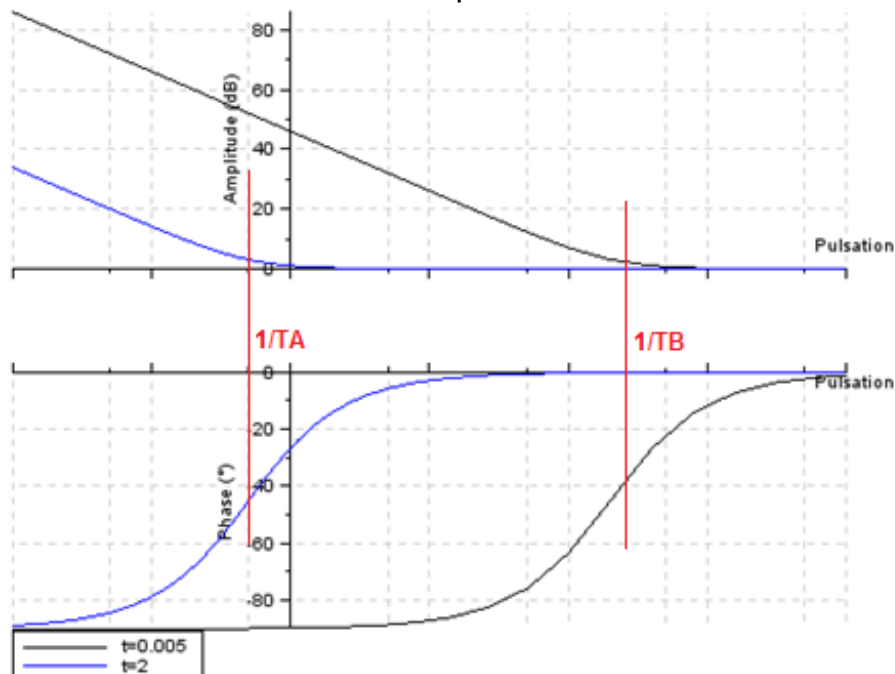
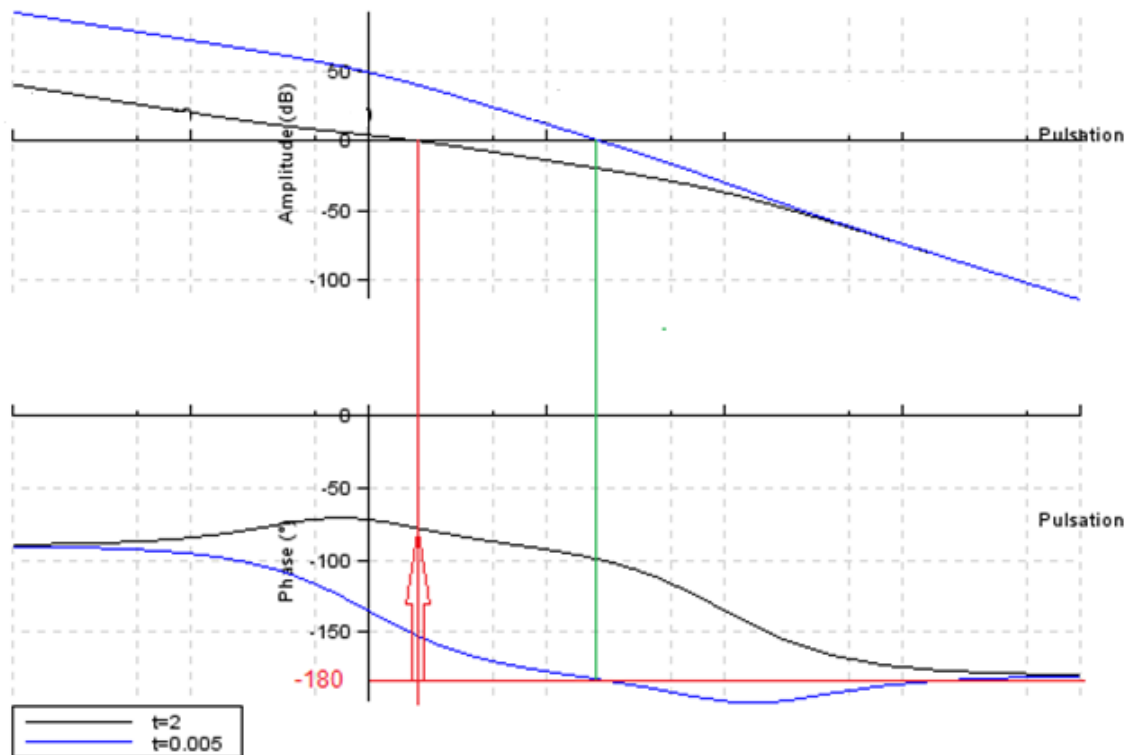


Diagramme de bode pour T1=1 et T2=0.01

Le réglage de ce correcteur consiste en un choix pertinent de T_i :





Kc=1

Conclusion : si T_i est trop petit par rapport aux constantes T_1 et T_2 alors l'effet est mauvais car le correcteur ne peut récupérer la chute de phase et diminue encore la marge de phase, il intervient trop tard.

Si T_i est plus grand que les constantes T_1 et T_2 alors l'effet est bon puisqu'il redresse la phase aux basses pulsations et limite la chute de la marge de phase.

Réglage sur le pôle dominant :

Le principe de cette méthode est d'éliminer de la FTBO le pôle dominant, c'est à dire le pôle avec la plus grande constante de temps.

Exemple :

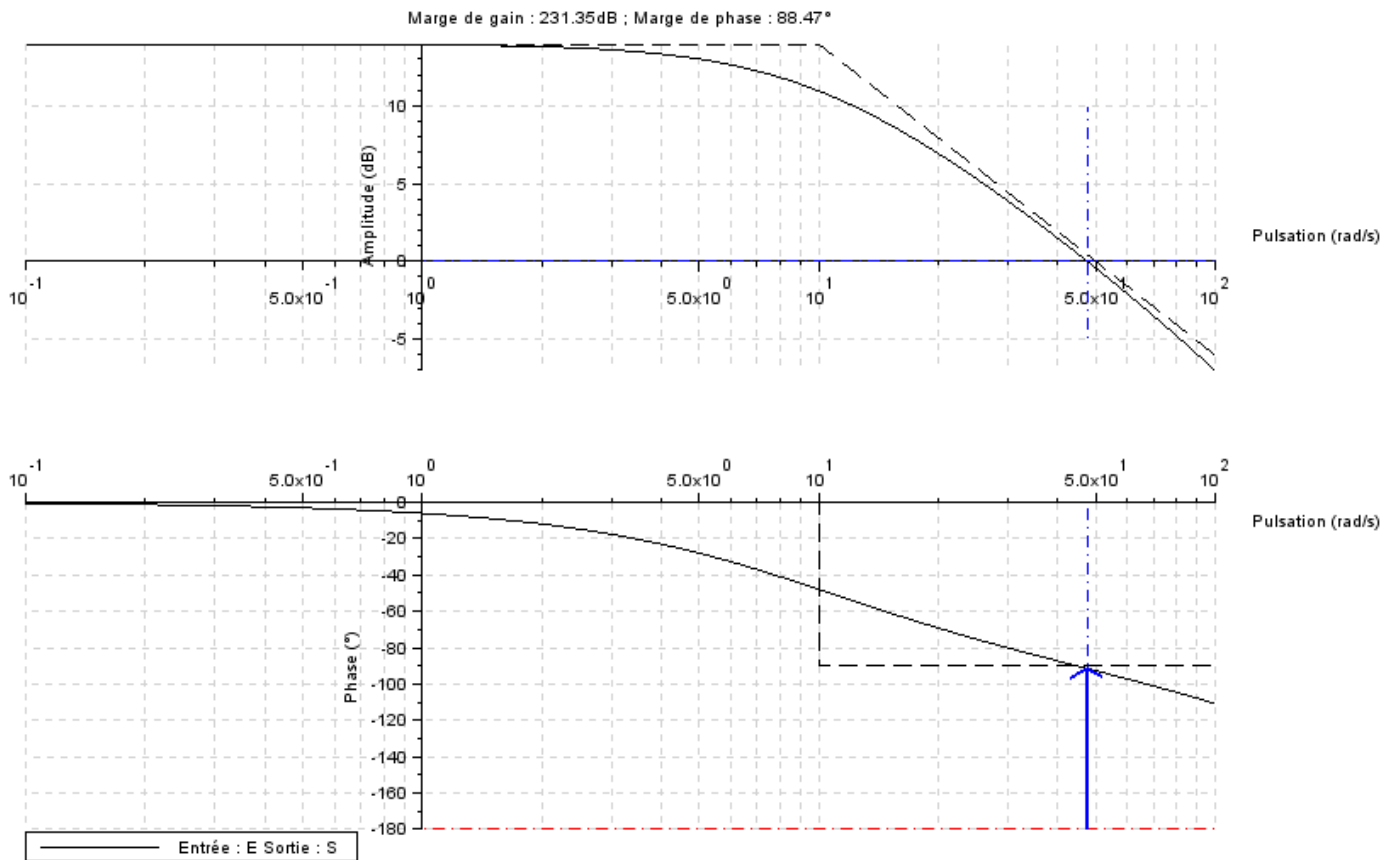
Soit la fonction de transfert suivante :
$$\frac{5}{(1+0.1.s) \cdot (1+0.005.s)}$$

On se propose d'améliorer le comportement temporel en rendant ce système précis pour une entrée de type échelon en insérant un correcteur de type PI.

Identifier la constante de temps la plus grande - ici $T_{max} = 0,1s$,

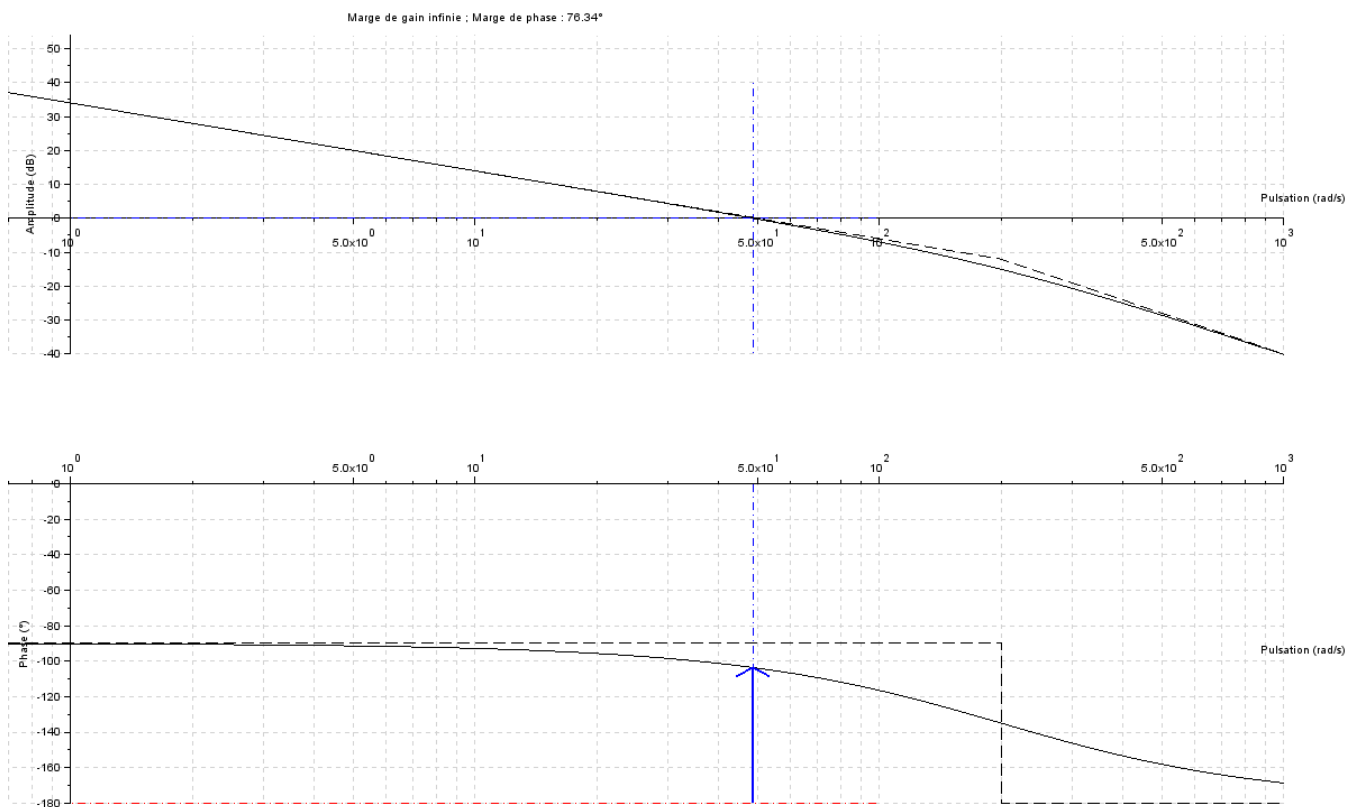
1. Tracer les diagrammes de Bode pour $K_c=1$, donner les marges

Diagramme de Bode :



MG = 231.3 dB (très difficile à tracer car très grande)
 $M\phi = 88.47^\circ$ à 47.6 rd/s

2. Placer un correcteur PI en prenant $T_i = 0.1s$ et $K_C = 1$ et donner les marges



MG infinie et $M\phi = 76.34^\circ$ (très peu changées) le système est maintenant de classe 1

3. Déterminer K_c afin d'obtenir une marge de phase de 45° (CDCF).

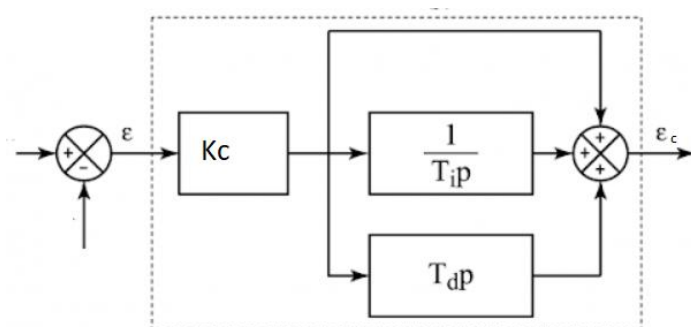
La pulsation à -135° vaut 143rd/s à cette pulsation le gain vaut -11 dB il faut donc remonter la courbe des gains de 11 dB pour cela on calcul K_c comme dans l'exemple précédent :

$$K_c = 10^{\frac{11}{20}} = 3.54$$

Ce correcteur nous permet d'augmenter aussi le gain et donc la rapidité tout en compensant l'écart statique et la perturbation.

224 : Correcteur proportionnel intégral dérivateur PID.

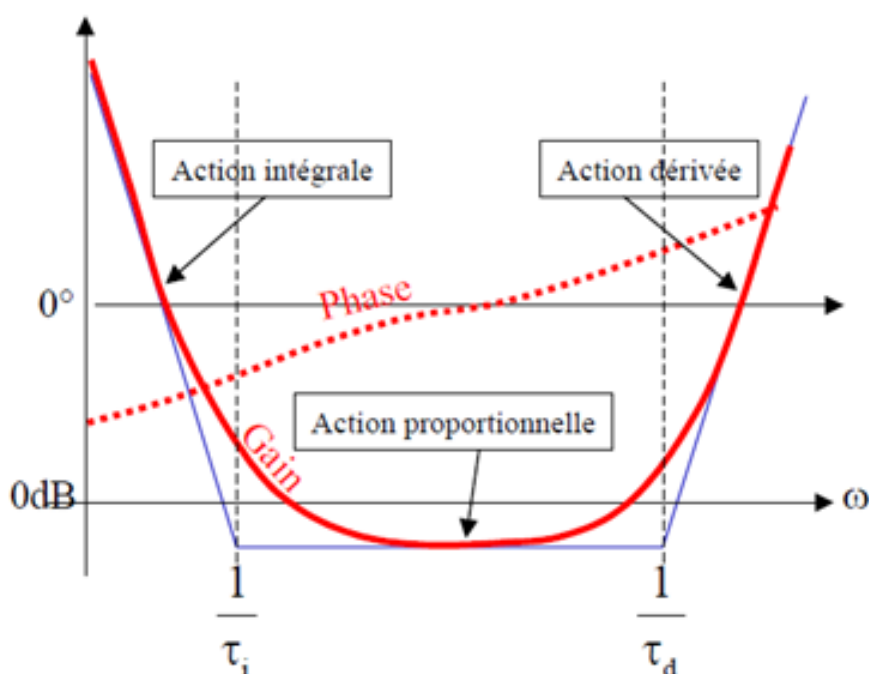
Ce type de correcteur a été longtemps le plus employé dans l'industrie, car l'effet dérivateur est censé stabiliser le système ; il peut être trouvé sous plusieurs formes mais la plus fréquente est la suivante :



$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = k + \frac{1}{\frac{T_i}{k} s} + k T_d s :$$

Ici le gain influence l'action intégrale et dérivée.

Diagramme de Bode du correcteur



Effets de ce correcteur

- Effet dérivateur en hautes fréquences : donc avance de phase en hautes fréquences et amplification en hautes fréquences

Effet intégrateur en basses fréquences : Retard de phase en basses fréquences.

- Fréquences moyennes : peu d'influence du correcteur seul le gain est visible

Donc :

On voit sur les diagrammes de Bode que le correcteur P.I.D se comporte pour les basses fréquences comme un intégrateur donc le système sera précis d'un point de vue statique, aux hautes fréquences l'avance de phase est de $+90^\circ$ donc une amélioration de la stabilité.

Le PID théorique est très difficile à régler les trois paramètres influencent le correcteur complet de plus il a l'inconvénient de créer une amplification en hautes fréquences $\Rightarrow$ sensibilité aux bruits.

Pour éviter cela, on devra introduire un filtre passe-bas en hautes fréquences

Solution industrielle :

La méthode algébrique du pôle dominant reste très employée (comme pour le correcteur PI). Un correcteur PID comportant deux constantes de temps (T_i et T_d) permet d'annuler algébriquement deux constantes de temps du système à corriger (T_i compensant la plus grande et T_d la suivante).

225 : Correcteur à avance de phase, ou à action dérivée.

a- Principe.

Le correcteur à avance de phase est une forme approchée du correcteur PD qui est physiquement irréalisable.

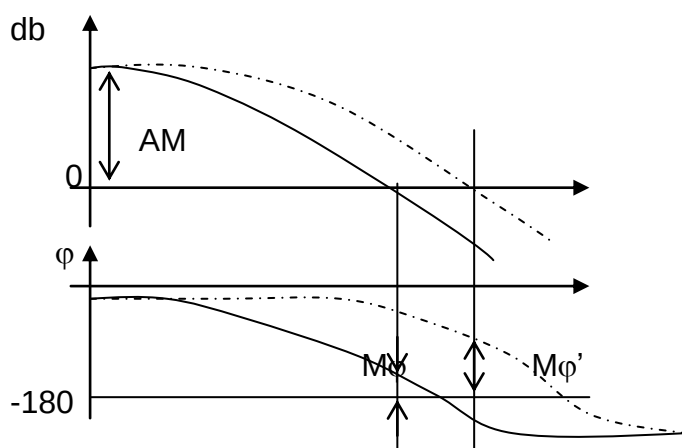
On souhaite améliorer la stabilité d'un système sans pour autant changer sa précision.

Contraintes pouvant être satisfaites

Augmentation de la marge de phase (comme l'indique le nom du correcteur)

Augmentation de la bande passante (augmentation de la rapidité c'est à dire diminution de t_r)

b- Ce que l'on souhaite.



c- Etude du correcteur.

$$C(s) = K_c \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \quad \text{avec : } T > 0 \text{ qui est la constante de temps du correcteur}$$

Et : $a > 1$ appelé facteur d'avance du correcteur.

Kc gain du correcteur sera pris égal à 1 pour l'instant

Etude du module

$$C(j\omega) = \frac{1 + aTj\omega}{1 + Tj\omega} \quad \text{d'où :}$$

$$\begin{aligned} \|C(j\omega)\|_{dB} &= 20 \text{Log} \sqrt{\frac{1 + (aT\omega)^2}{1 + (T\omega)^2}} \\ &= 20 \text{Log} \sqrt{1 + (a\omega T)^2} - 20 \text{Log} \sqrt{1 + (T\omega)^2} \end{aligned}$$

Etude du premier terme : $\omega_c = \frac{1}{aT}$: pente de +20 dB/décade.

Etude du deuxième terme : $\omega'_c = \frac{1}{T}$: pente de -20dB/décade.

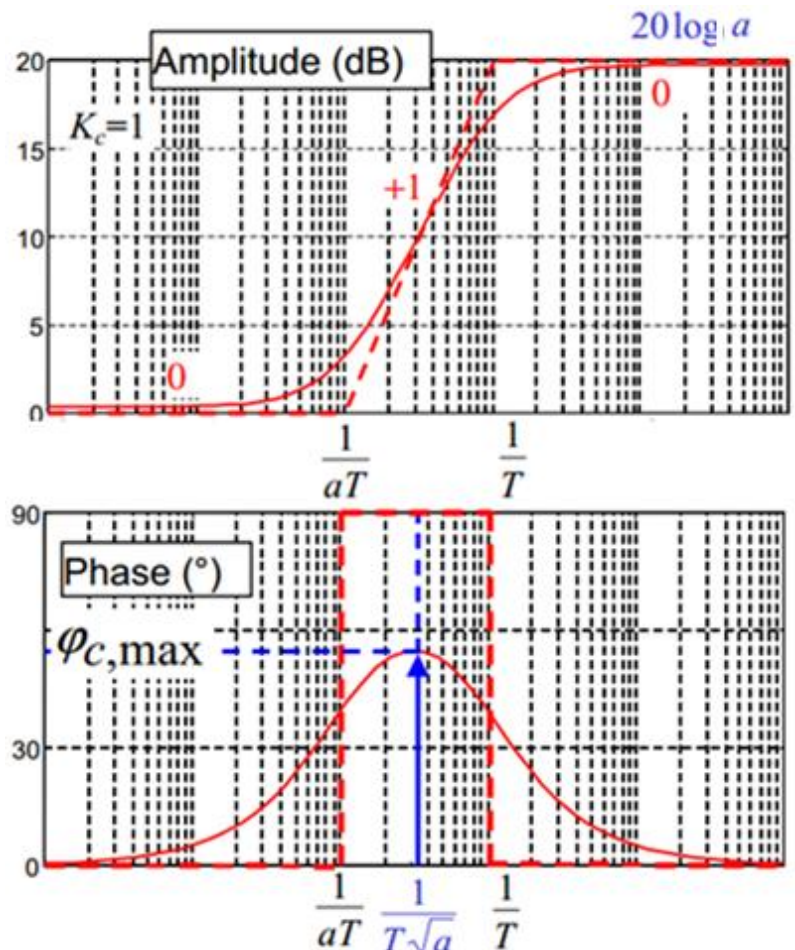
Etude de la phase

$$\varphi = \text{Arc tan}(aT\omega) - \text{Arc tan}(T\omega)$$

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{aT}{1 + (aT\omega)^2} - \frac{T}{1 + (T\omega)^2} = \frac{T(a-1)[1 - a(T\omega)^2]}{[1 + (aT\omega)^2][1 + (T\omega)^2]}$$

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_M = \frac{1}{T\sqrt{a}} \quad \text{d'où :}$$

$$\varphi_M = \varphi(\omega_M) = \text{Arc sin}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$$



Remarques :

Introduction d'un déphasage positif d'où le nom de correcteur à avance de phase.

Avance de phase maximale $\varphi_{cM} = \varphi(\omega_M) = \text{Arc sin}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$ avec $\varphi_{cM} > 0$

Pulsation correspondante $\omega_M = \frac{1}{T\sqrt{a}}$

d-Utilisation.

Pour augmenter la marge de phase, il suffit de placer la zone ω_m du correcteur proche de la pulsation de coupure du processus à corriger.

REMARQUE : si $\omega_m \ll \omega_{oc}$, l'effet nuisible est plus important que l'effet bénéfique.

$\omega_m \gg \omega_{oc}$ Le correcteur n'a pas d'effet.

Donc on obtient les paramètres a et T par tâtonnements.

e-Réglage du correcteur.

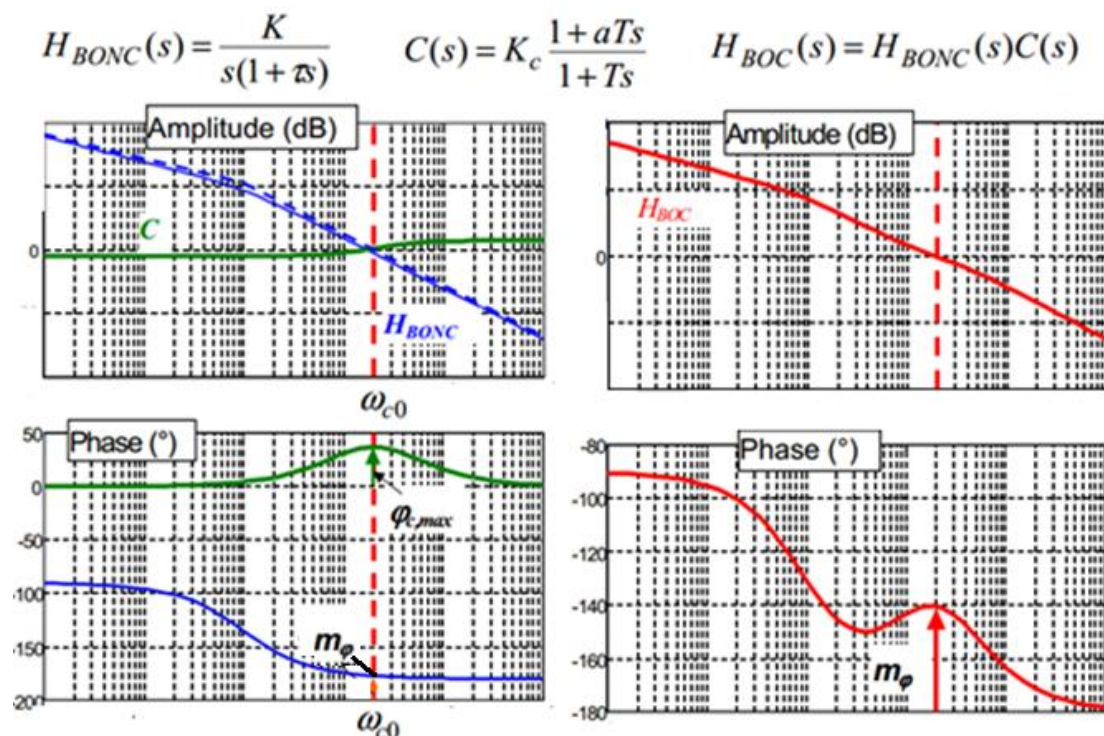
Calculer le coefficient d'avance a pour avoir l'avance de phase $\varphi_{cM} = \varphi(\omega_M) = \text{Arc sin}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$ désirée.

Calculer T de façon à placer la « cloche » à la pulsation ω_{co} désirée $\omega_M = \frac{1}{T\sqrt{a}}$

Le gain fréquentiel est augmenté de $20\log a$ (pour $K_c = 1$) à partir de $\omega = 10/T$.
Ceci décale la pulsation ω_{co} du système corrigé en BO

Calculer K_c pour ramener ω_{co} à la bonne valeur

f- Courbes



g- Exemple :

Soit un système de type double intégrateur de fonction de transfert

$$H(s) = \frac{K}{s^2} \quad \text{Avec } K=10$$

Q1 : Donnez votre avis sur ce système

Système de classe deux de type oscillateur harmonique donc $\varepsilon=0$ donc évidemment très instable.

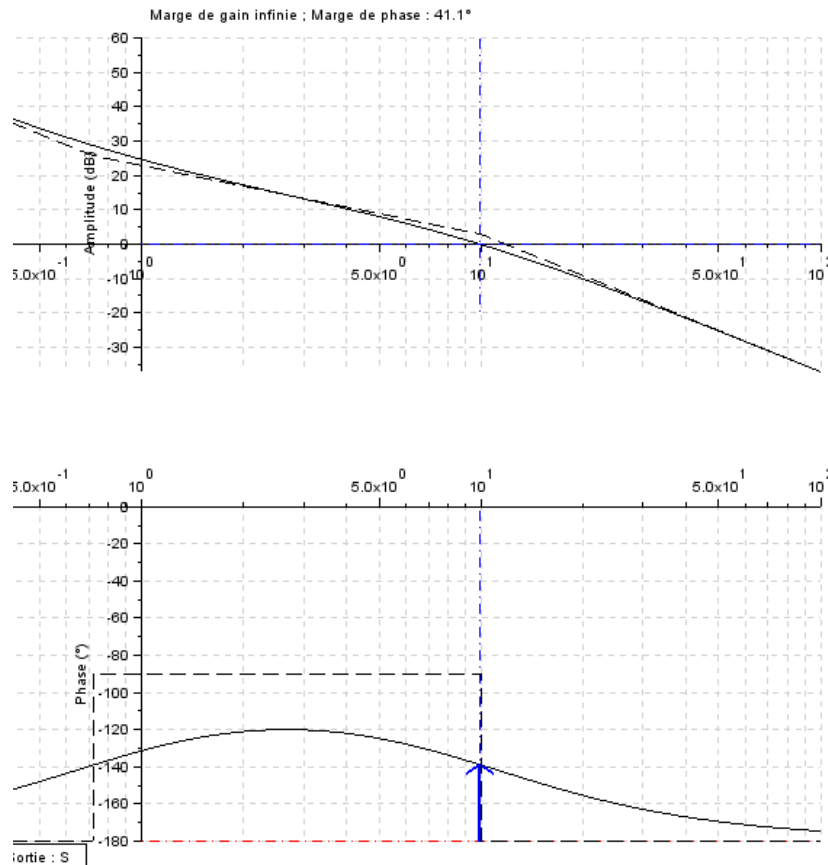
On envisage de l'asservir avec l'ajout d'un correcteur à avance de phase de type :

$$C(s) = K_c \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \quad \text{Avec } a \text{ coefficient d'avance } > 1 \text{ et } T \text{ constante de temps.}$$

Q2 : déterminer a de manière à avoir un maximum de la phase égal à 60°

$$\varphi_{cM} = \varphi(\omega_M) = \text{Arcsin}\left(\frac{a-1}{a+1}\right) = 60^\circ \quad \text{on obtient } a=13.92$$

Q3 : On choisit $T=0.1s$, calculer les marges du système ainsi asservi en conservant $K=1$



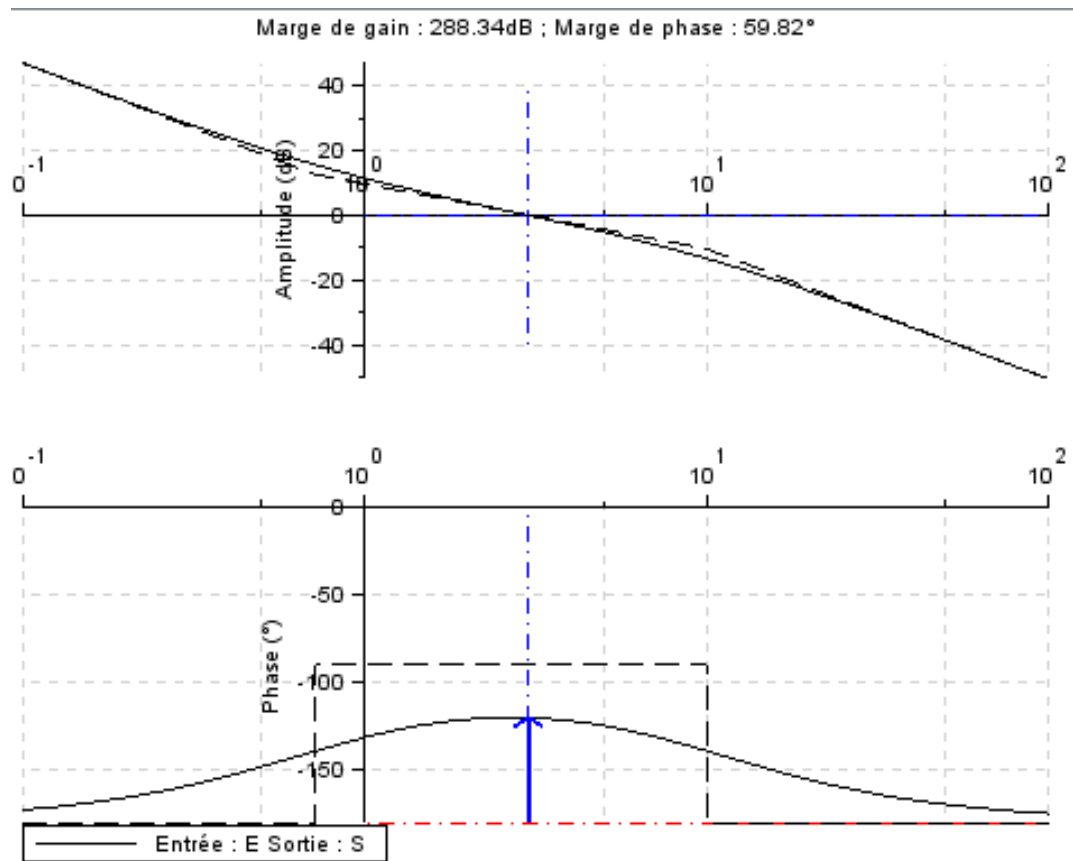
MG= infinie et $M_\varphi=41.1^\circ$

Q4 : Calculer la pulsation ω_M lieu du maximum de ca correcteur

$$\omega_M = \frac{1}{T\sqrt{a}} = 2.68 \text{ rad/s}$$

Q5 : donner $\text{AdB}(\omega_M)$ puis calculer K permettant d'obtenir une marge de phase de 60°
 $\text{AdB}(\omega_M)=13\text{dB}$

On doit donc redescendre la courbe des gains de 13 dB donc : $K = 20 \log\left(\frac{-13}{20}\right) = 0.22$



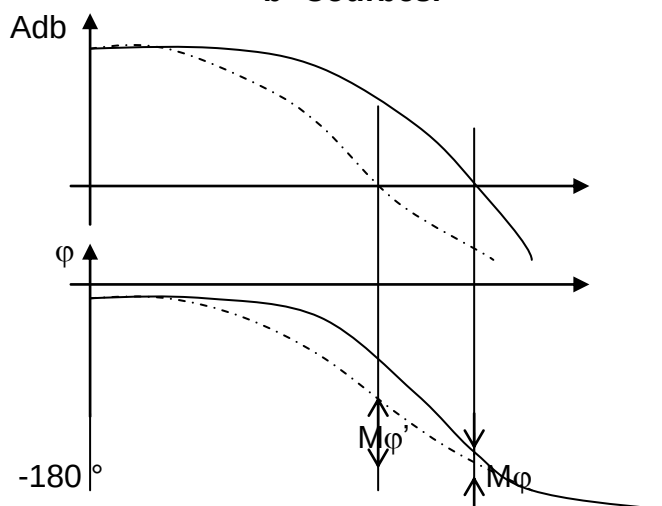
226 : Correcteur à retard de phase, ou à action intégrale.

Le correcteur à retard de phase est une forme approchée du correcteur PI.

a- Principe.

On souhaite améliorer la stabilité sans changer la précision du processus, on va donc tenter d'augmenter la marge de phase en déplaçant la pulsation de coupure.

b- Courbes.



c-Etude du correcteur.

$$C(s) = K_c \frac{1 + Ts}{1 + bTs} \quad \text{avec : } T > 0 \text{ qui est la constante de temps du correcteur}$$

Et : $b > 1$ appelé facteur de retard du correcteur.

Kc gain du correcteur sera pris égal à 1 pour l'instant

Etude du module

$$C(j\omega) = \frac{1 + Tj\omega}{1 + bTj\omega} \quad \text{d'où :}$$

$$\begin{aligned} \|C(j\omega)\|_{dB} &= 20 \log \sqrt{\frac{1 + (T\omega)^2}{1 + (bT\omega)^2}} \\ &= 20 \log \sqrt{1 + (\omega T)^2} - 20 \log \sqrt{1 + (bT\omega)^2} \end{aligned}$$

Etude du premier terme : $\omega_c = \frac{1}{T}$: pente de +20 dB/décade.

Etude du deuxième terme : $\omega'_c = \frac{1}{bT}$: pente de -20dB/décade.

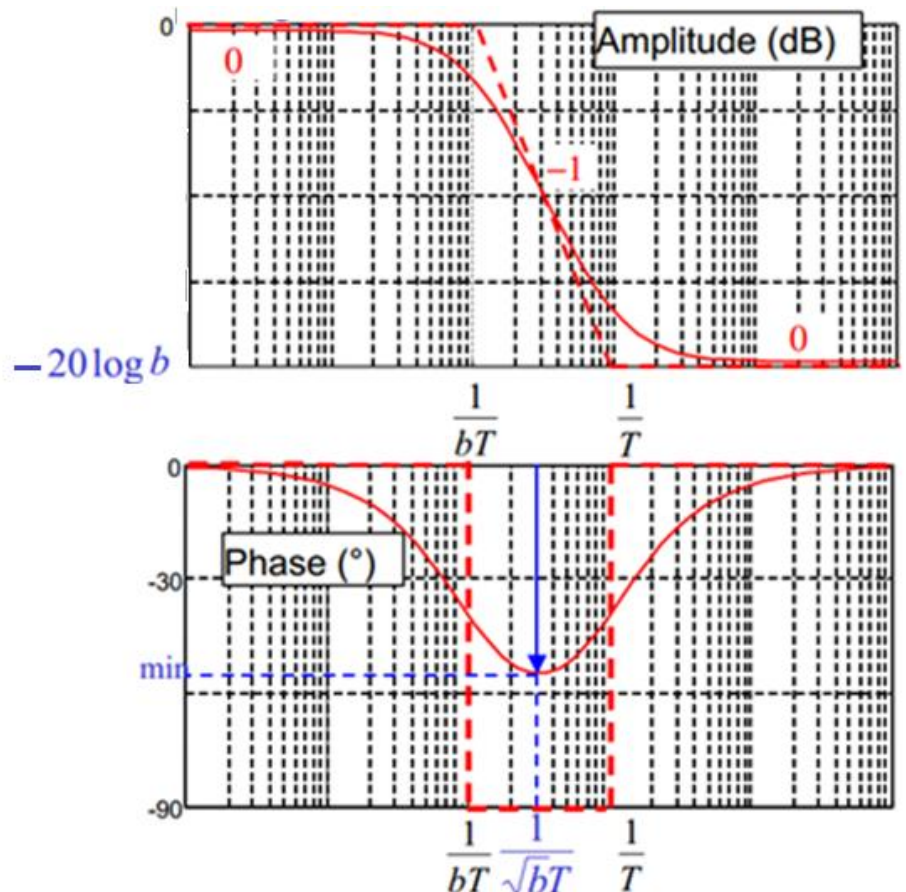
Etude de la phase

$$\varphi = \text{Arc tan}(T\omega) - \text{Arc tan}(bT\omega)$$

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{T}{1 + (T\omega)^2} - \frac{bT}{1 + (bT\omega)^2} = \frac{T(1-b)[1 - b(T\omega)^2]}{[1 + (T\omega)^2][1 + (bT\omega)^2]}$$

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{b}} \quad \text{d'où :}$$

$$\varphi_m = \varphi(\omega_m) = \text{Arc sin}\left(\frac{1-b}{1+b}\right)$$



Remarque :

Introduction d'un déphasage négatif d'où le nom de correcteur à retard de phase

- Déphasage minimum $\varphi_m = \varphi(\omega_m) = \text{Arcsin}\left(\frac{1-b}{1+b}\right)$ rad avec $\varphi_m < 0$
- Pulsation correspondante $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{b}}$

d-Utilisation.

Ce système ne doit pas déstabiliser le processus, il faut donc que $\omega_0 > \frac{1}{T}$, pour placer la zone de phases très négatives dans les basses pulsations.

Il doit être manipulé avec précaution, car il peut rendre le système instable.

Il est souvent associé à un correcteur à avance de phase

e- Réglage

Introduire dans le correcteur un gain K_c qu'on calcule pour avoir la marge de phase désirée.

Choisir la constante de temps T telle que ($1/T \ll \omega_0$ on prend environ $0.1 \omega_0$) pour ne pas modifier la marge de phase et les performances dynamiques.

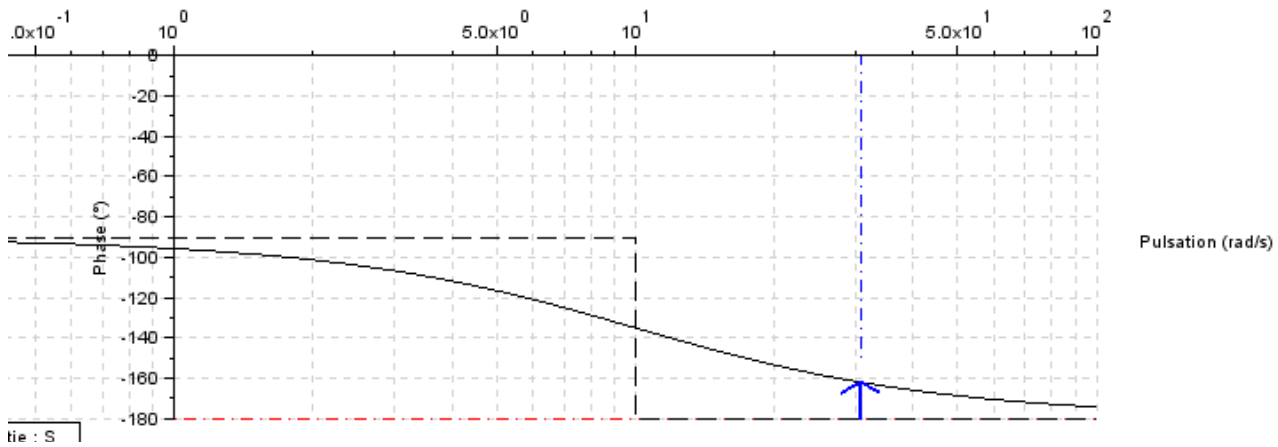
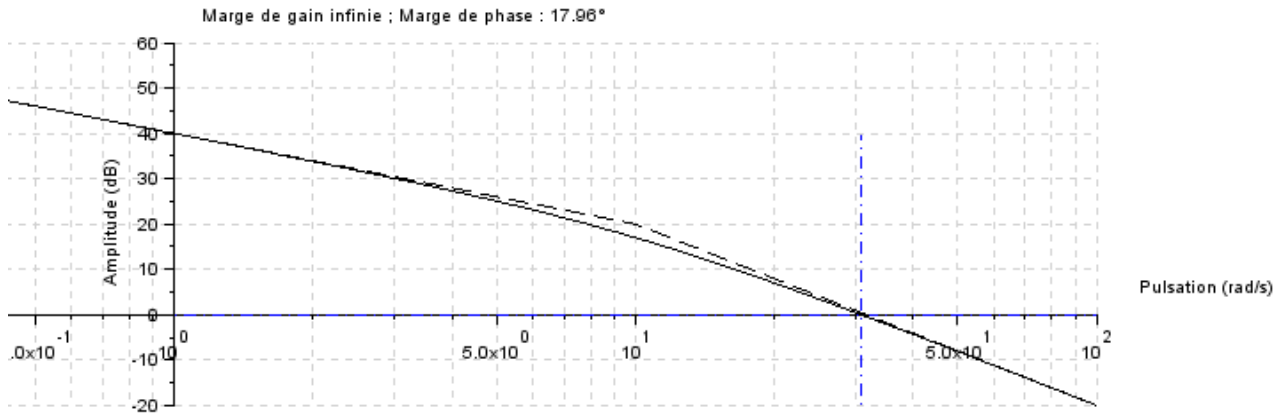
f- Exemple

Le système admet comme FTBO(p) la fonction suivante :

$$\text{FTBO}(p) = \frac{100}{p(1 + 0.1p)}$$

Q1 : Décrire cette fonction et donner son diagramme de Bode ainsi que ses marges

Fonction de classe 1



MG = infinie et $M\phi=18^\circ$ pour $\omega_{0dB}=31\text{rd/s}$

Le CDCF impose une marge de phase de 45 pour cela on se propose de tester un correcteur à retard de phase de fonction :

$$C(p) = K_c \frac{1 + T_p}{1 + bT_p}$$

Pour l'instant prenons $K_c=1$, de plus on sait que le décalage des gains vaut $20\log b$ et que le creux de phase du à la correction seule doit être le plus faible possible généralement on le prend $<6^\circ$

Q2 : Proposer un réglage de ce correcteur.

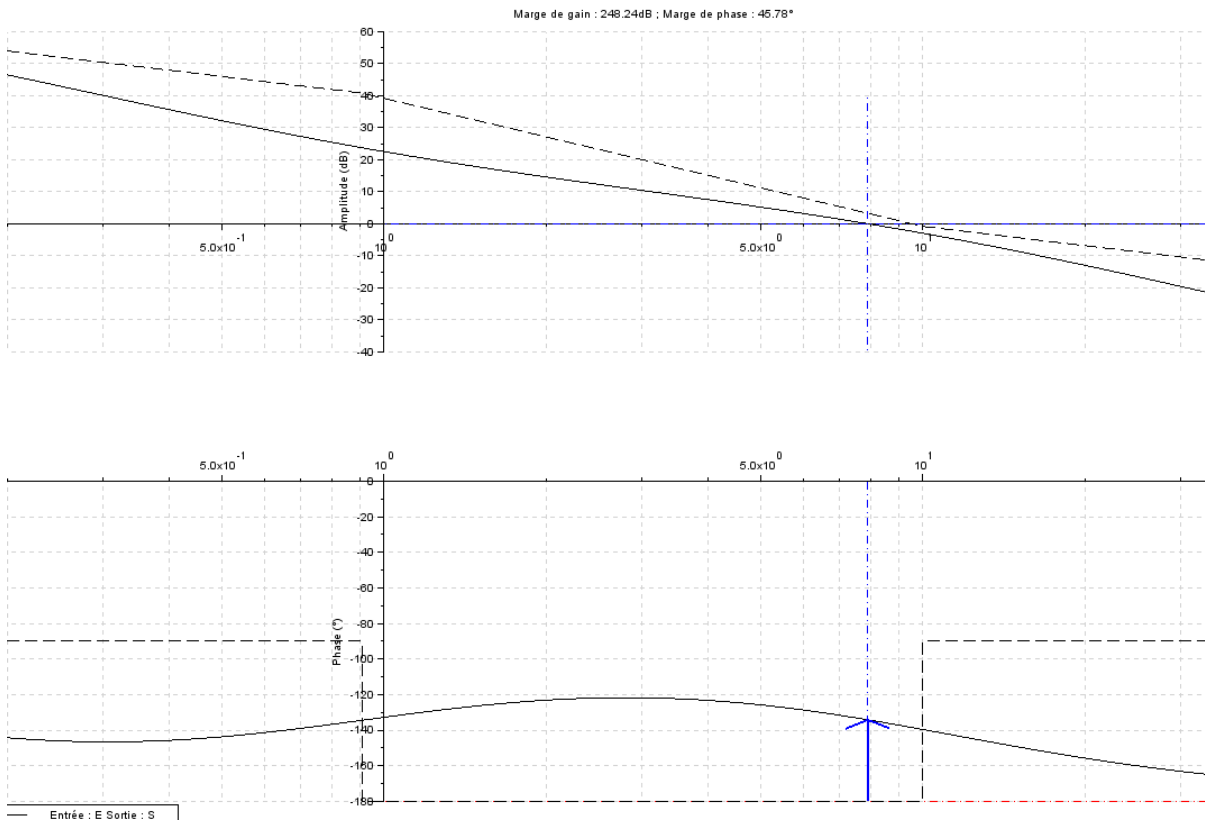
Calcul de $\omega_{0dB\text{corrigée}}$

On va utiliser une méthode différente pour de correcteur en nous plaçant dans le cas le pire (la coupure est placée au niveau de la bosse :

$$\varphi(\omega_{0dB\text{corrigée}}) = -180^\circ + 45^\circ + 6^\circ = 129^\circ$$

Si l'on regarde sur le diagramme de Bode on obtient $\omega_{0dB\text{corrigée}}=8.2\text{ rd/s}$ pour cette valeur le gain vaut $A_{dB}=18\text{dB}$ donc il faut baisser la courbe de 18dB soit $20\log b=-18$ d'où en première approximation $b=8$

On en déduit T car $\text{Arg}\left(\frac{1+Tj\omega}{1+bTj\omega}\right) = -6$ donc $T=1.1\text{s}$



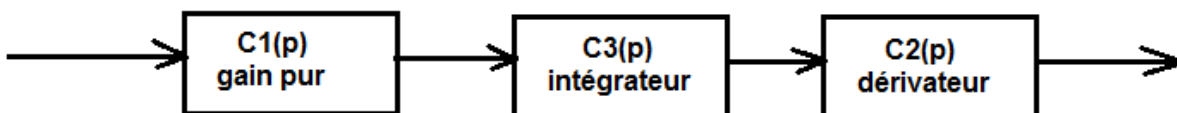
Bilan : $MG=248\text{dB}$ et $M\phi=45.78^\circ$ ce qui répond au cahier des charge fixé pour $M\phi$

On pourrait améliorer en réglant K_c de façon à avoir le centre de la bosse avant la coupure mais ce serait assez compliqué donc on va laisser $K_c=1$

23 : Correcteur PID composite moderne.

Nos études précédentes, nous amènent à proposer une structure somme toute très simple plus réaliste d'un correcteur PID, qui prendrait en compte les retards des composants et nous permettrait d'utiliser l'intérêt de ces formes de fonction sur lesquelles nous pourrions très simplement gérer les retards (inerties volontaires).

Basons nous sur une structure de base en série, qui est intéressante car le gain de correction a une influence plus grande.

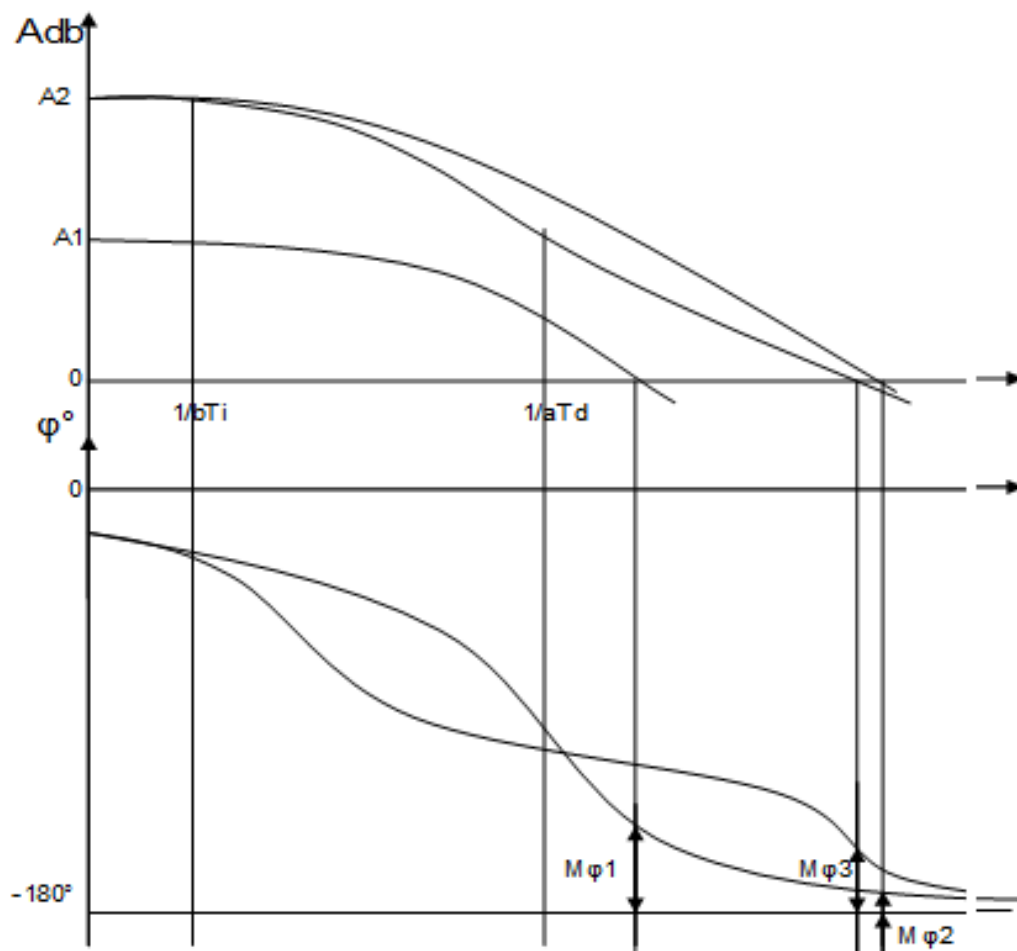


$$\text{Avec : } C1(p) = K, \quad C2(p) = \frac{1 + aT_d p}{1 + T_d p}, \quad C3(p) = \frac{1 + T_i p}{1 + bT_i p}$$

$$\text{La fonction de transfert est de façon évidente : } C(p) = K \cdot \left(\frac{1 + T_i p}{1 + bT_i p} \right) \cdot \left(\frac{1 + aT_d p}{1 + T_d p} \right).$$

243 : Courbes.

Les courbes donnent simplement un aperçu du potentiel d'un tel correcteur, sur lequel évidemment le réglage des valeurs de K , T_i , T_d , a et b sont prépondérants.



Les trois courbes représentent : la réponse d'origine, celle avec le proportionnel uniquement, puis la finale avec PID.

Conclusion : si l'on choisit des réglages adaptés, l'effet de ce correcteur sera le plus réduit possible sur la réponse, et la stabilité pourra être restaurée de façon efficace. Ce type de correcteur est très employé de nos jours

Compétences et objectifs

RESOUDRE CONCEVOIR	Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase
	Choisir un type de correcteur adapté