A : Analyse fréquentielle des systèmes linéaires.

Pourquoi faire une analyse fréquentielle ?

La réponse temporelle ne permet pas de prévoir :

- Le comportement du système
- La stabilité

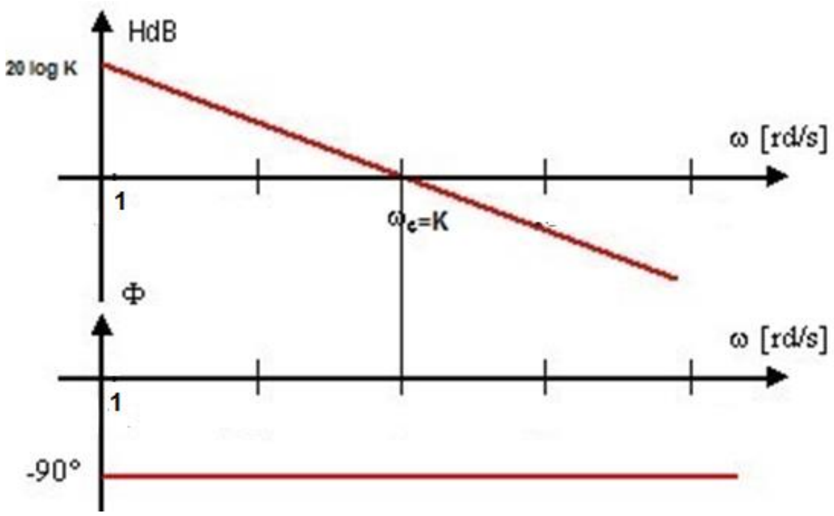
On ne fait que « constater » la réponse dans un cas particulier

REPONSES FREQUENTIELLES DES SYSTEMES COURANTS.

1 : Système intégrateur.

Soit un système physique du premier ordre ayant pour fonction de transfert : $H(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{K}{p}$, d'où pour $p=jw$ la fonction de transfert $H(jw)=\dfrac{K}{jw}=-\dfrac{Kj}{w}$ est un imaginaire pur.

Traçons le lieu de *H(jw)* pour les différentes représentations pour K>0.

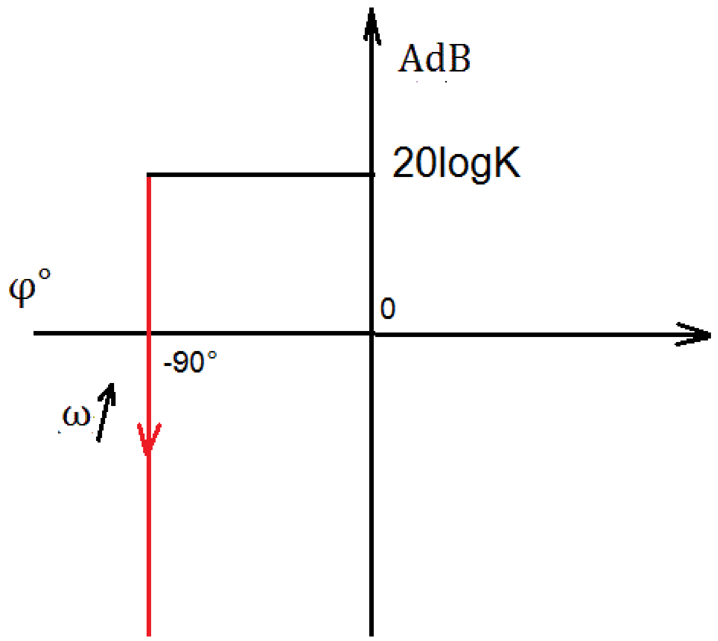


$$20.\log|H(jw)| = 20.\log\left|\frac{K}{w}\right| = 20.\log|K| - 20\log(w)$$

$$Arg\ \ H(jw)\ = -90° \quad \text{si}\ \ K > 0$$

Module : Nous obtenons l'équation d'une droite. La pente de cette droite est égale à -1 et correspond à une atténuation de 20dB par décade soit environ 6dB (20log2) par octave. Une décade est la distance qui sépare deux pulsations w_1 et w_2 telles que $w_2=10w_1$. Une octave est la distance qui sépare deux pulsations w_1 et w_2 telles que $w_2=2w_1$.

Phase : La phase est égale à -90° si K>0, elle ne dépend pas de *w*.



Lieu de BLACK

2 : Système de premier ordre.

21 : Rappel

Soit un système physique du premier ordre ayant pour fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+Tp}$$

Avec T constante de temps et K gain statique.

22 : Etude fréquentielle.

Pour $p = jw$ la fonction de transfert $H(jw) = \dfrac{K}{1+Tjw} = \dfrac{K}{1+w^2T^2} - j.\dfrac{KwT}{1+w^2T^2}$

$$AdB(w) = 20\log\left|\frac{K}{1+jwT}\right| = 20\log K - 20\log|1+jwT| = 20\log K - 20\log\sqrt{1+T^2w^2}$$

$$\boxed{AdB(w) = 20\log\left(\frac{K}{\sqrt{1+T^2w^2}}\right)}$$

$$\varphi(w) = Arg[H(jw)] = Arg\left[\frac{K}{1+jTw}\right] = Arg\left[\frac{K(1-jTw)}{1+T^2w^2}\right] = Arg(1-jTw) = Arctg(-Tw)$$

$$\boxed{\varphi(w) = -Arctg(Tw)}$$

23 : Diagramme de Bode.

<u>Module</u> : $AdB(w) = 20\log\left(\frac{K}{\sqrt{1+T^2w^2}}\right)$

Lorsque w tend vers 0 alors $w^2T^2 << 1 \quad \Rightarrow \quad AdB(w) = 20\log K = cte$

Il s'agit de l'équation d'une droite asymptotique horizontale.

Lorsque w tend vers +∞ alors $\omega^2T^2 >> 1 \Rightarrow AdB(\omega) = 20\log\left(\frac{K}{T\omega}\right) = 20\log\frac{K}{T} - 20\log\omega$

Il s'agit de l'équation d'une droite asymptotique de pente -1 soit -20dB par décade.

L'intersection de ces deux droites asymptotiques s'effectue en un point de fréquence *wo* tel que :

$$20\log K = 20\log K - 20\log T - 20\log wo \quad \Rightarrow \quad \log wo = -\log T \quad \Rightarrow \quad \boxed{wo = \frac{1}{T}}$$

La pulsation wc ou *wo* est appelée **<u>pulsation de cassure.</u>**

$$\text{pour } w = wo, AdB(wo) = 20\log\left(\frac{K}{\sqrt{2}}\right) = 20\log K - 10\log 2 = 20\log K - 3dB$$

La courbe réelle est située 3dB sous la droite asymptotique en ce point de cassure.

$$\text{pour } w = 2wo, AdB(2wo) = 20\log\left(\frac{K}{\sqrt{5}}\right) = 20\log K - 20\log 2 + 20\log\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 20\log K - 20\log 2 - 1dB$$

La courbe réelle est située 1dB sous la droite asymptotique en ce point.

$$\text{pour } w = \frac{wo}{2}, AdB\left(\frac{wo}{2}\right) = 20\log\left(\frac{2K}{\sqrt{5}}\right) = 20\log K + 20\log\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 20\log K - 1dB$$

La courbe réelle est située 1dB sous la droite asymptotique en ce point.

La courbe coupe l'axe des pulsations pour w=K/T.

<u>Phase</u> : $\varphi(w) = -Arctg(Tw)$

Lorsque w tend vers 0 $\varphi(0) = -Arctg(0) = 0°$

Lorsque w tend vers +∞ $\varphi(+\infty) = -Arctg(\infty) = -90°$

Pour $w = wo$, $\varphi(wo) = -Arctg(1) = -45°$

Pour $w = 2wo$, $\varphi(2wo) = -Arctg(2) = -63,43°$

Pour $w = \frac{wo}{2}, \varphi\left(wo/2\right) = -Arctg(1/2) = -26,56°$

Remarques.

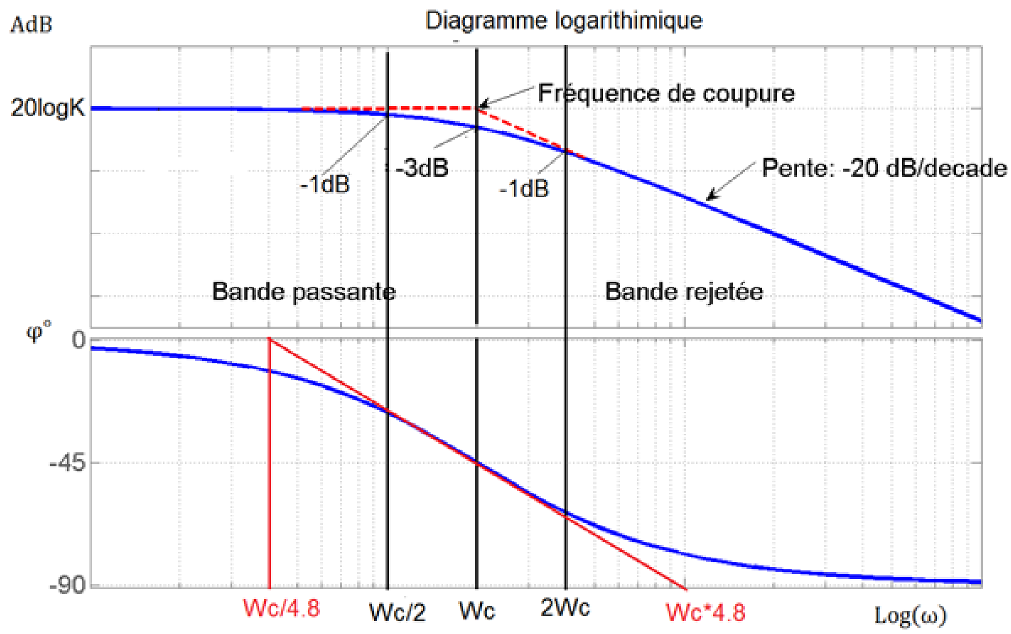
Le diagramme asymptotique a la forme d'une marche d'escalier avec un saut de déphasage à la pulsation de cassure.

Le tracé de la phase est symétrique par rapport au point d'abscisse *wo* et d'ordonnée -45°.

La tangente au point de symétrie coupe l'asymptote 0° à $\frac{wo}{4,8}$ et par symétrie l'asymptote -90° à 4,8*wo.*

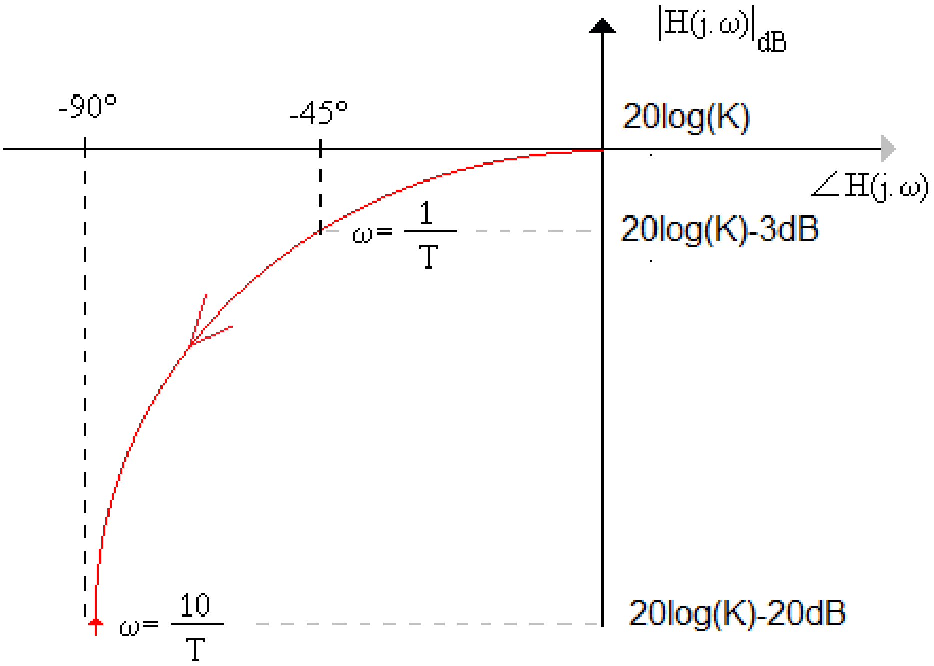
Par ailleurs, la courbe de phase peut être globalement approchée par une droite de pente -45° par décade dans sa zone centrale

.



24 : Diagramme de Black.

En utilisant les résultats du tracé de Bode on obtient.



3 : Système du second ordre.

31 : Rappel.

Soit un système physique du second ordre ayant pour fonction de transfert :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{\frac{p^2}{wo^2}+\frac{2\xi}{wo}p+1}$$

Avec ω_0 pulsation propre du système non amorti, ξ (ou z) coefficient ou facteur d'amortissement et K gain statique.

32 : Etude fréquentielle.

$$H(jw)=\frac{K}{\frac{-w^2}{wo^2}+\frac{2\xi jw}{wo}+1}=\frac{K}{\left(1-\frac{w^2}{wo^2}\right)+j\frac{2\xi w}{wo}}=\frac{K}{\left(1-u^2\right)+j2\xi u}\text{avec}\ \boxed{u=\frac{w}{wo}=\textbf{pulsation réduite}}$$

$$\text{AdB}(w)=20\log\left|\frac{K}{\left(1-u^2\right)+j2\xi u}\right|=20\log K-20\log\left|\left(1-u^2\right)+j2\xi u\right|=20\log K-20\log\sqrt{\left(1-u^2\right)^2+\left(2\xi u\right)^2}$$

$$\boxed{\text{AdB}(w)=20\log\left(\frac{K}{\sqrt{\left(1-u^2\right)^2+\left(2\xi u\right)^2}}\right)}$$

$$\varphi(w)=\text{Arg}[H(jw)]=\text{Arg}\left[\frac{K}{\left(1-u^2\right)+j2\xi u}\right]=-\text{Arg}\left[\left(1-u^2\right)+j2\xi u\right]=\boxed{-\text{Arctg}\left(\frac{2\xi u}{1-u^2}\right)}$$

33 : Diagramme de Bode.

Etude pour ξ<1.

Module

$$AdB(w) = 20\log\left(\frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2+(2\xi u)^2}}\right) \quad \textbf{\textit{Avec}}\ u = \frac{w}{wo}$$

Lorsque w tend vers 0, u tend vers 0 alors $AdB(w) = 20\log(K)$

Il s'agit de l'équation d'une droite asymptotique horizontale.

Lorsque w tend vers +∞ alors u tend vers +∞ et $\sqrt{(1-u^2)^2+(2\xi u)^2} \to u^2$

$$\Rightarrow \quad AdB(w) = 20\log\left(\frac{K}{u^2}\right) = 20\log(K) - 40\log(u)$$

Il s'agit de l'équation d'une droite asymptotique de pente -2 soit -40dB par décade.

L'intersection de ces deux droites asymptotiques s'effectue en un point de fréquence *w* tel que :

$$20\log K = 20\log K - 40\log u \quad \Rightarrow \quad u = 1 \quad \Rightarrow \quad w = wo$$

$$pour\ w = wo\ ,\ u = 1 \ \Rightarrow\ AdB(wo) = 20\log\left(\frac{K}{2\xi}\right)$$

Lorsque $\boxed{\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}}$, la courbe *AdB(w)* présente un maximum pour une pulsation ***wr*** appelée pulsation de résonnance : $\boxed{wr = wo\sqrt{1-2\xi^2}}$

On remarque que plus le coefficient d'amortissement ξ est réduit, plus l'amplitude de la résonnance est élevée.

$$pour\ w = wr\ telle\ que\ wr = wo\sqrt{1-2\xi^2},\ \ u = \sqrt{1-2\xi^2} \quad \Rightarrow \quad AdB(wr) = 20\log\left(\frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

$$AdB(wr) = 20\log\left(\frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}\right) = 20\log(k.Q)$$

Phase :

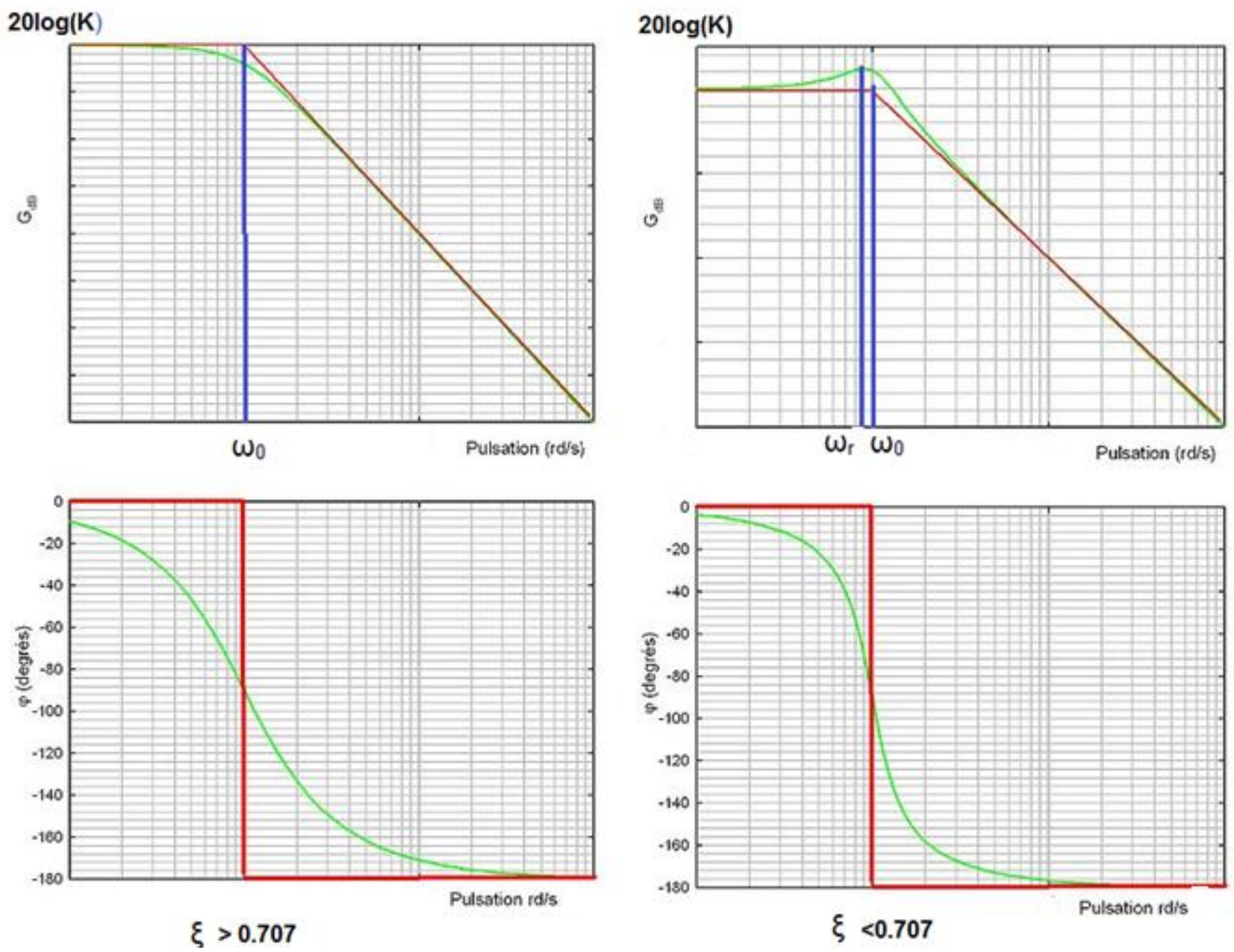
$$\varphi(w) = -Arctg\left(\frac{2\xi u}{1-u^2}\right)$$

Lorsque w tend vers 0 $\quad \varphi(0) = -Arctg\,(0) = 0°$

Lorsque w tend vers +∞ , u tend vers +∞ alors $\varphi(+\infty) = -Arctg(0-) = -180°$ (le cos est <0)

Pour $w = wo,\ \ u = 1\ alors\ \varphi(wo-) = -Arctg(+\infty) = -90° \ \ et\ \ \varphi(wo+) = -Arctg(-\infty) = -90°$

Le diagramme asymptotique a la forme d'une marche d'escalier avec un saut de déphasage à la pulsation propre non amortie.



Le tracé de la phase est symétrique par rapport au point d'abscisse *wo* et d'ordonnée -90°.

<u>Résonnance et facteur de surtension.</u>

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2+(2\xi u)^2}} .$$

Cette fonction présente un maximum si $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour une pulsation appelée pulsation de résonnance$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$.

On définit le coefficient ou facteur de surtension :

$$\boxed{Q = \frac{A(\omega_r)}{A(0)} = \frac{1}{2\xi\sqrt{(1-\xi^2)}}}$$

Remarque : le facteur de surtension sera en général défini en dB Q_{dB}=20logQ

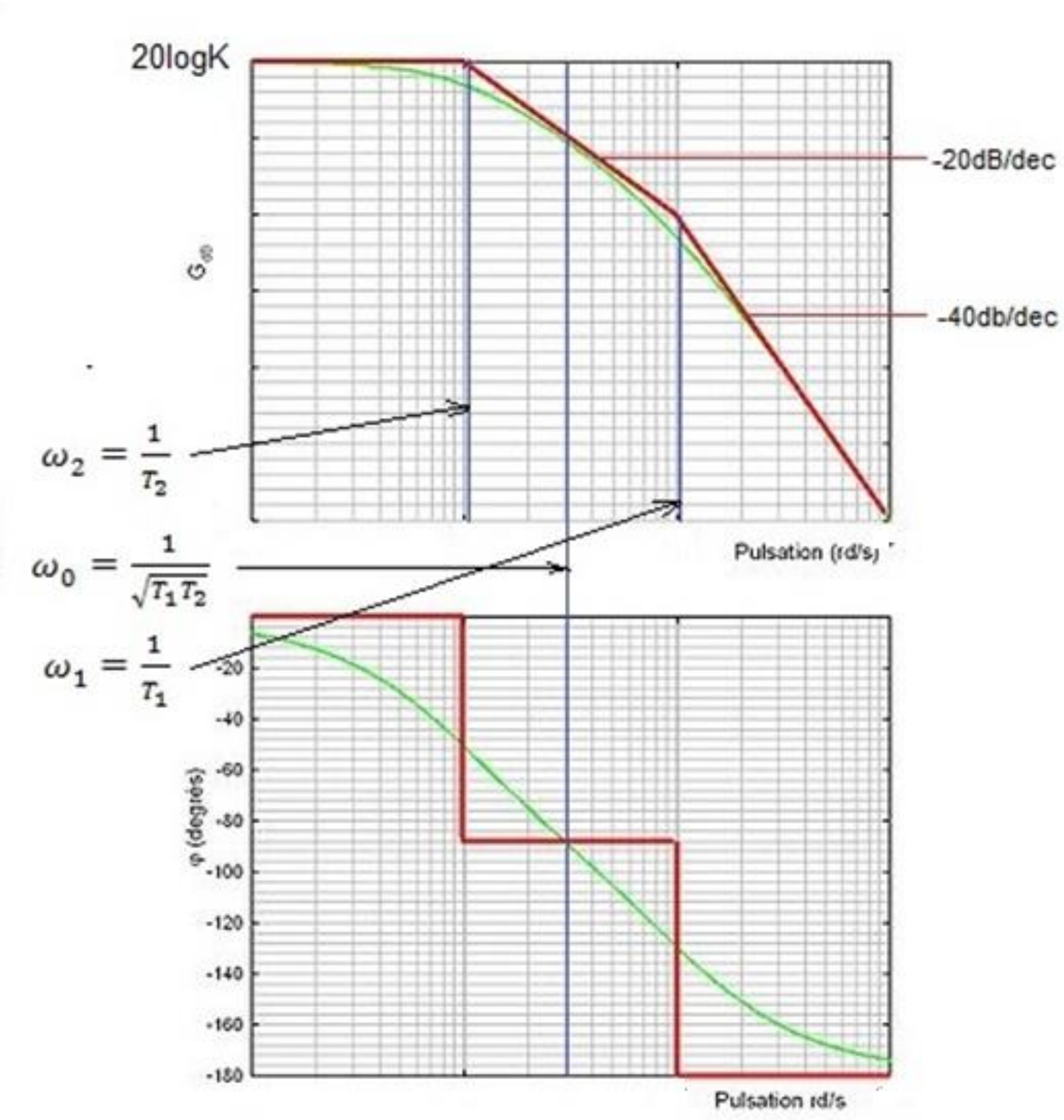
Etude pour ξ>1.

H(p) la fonction de transfert d'un système du second ordre avec ξ>1 sera mise sous la forme suivante.

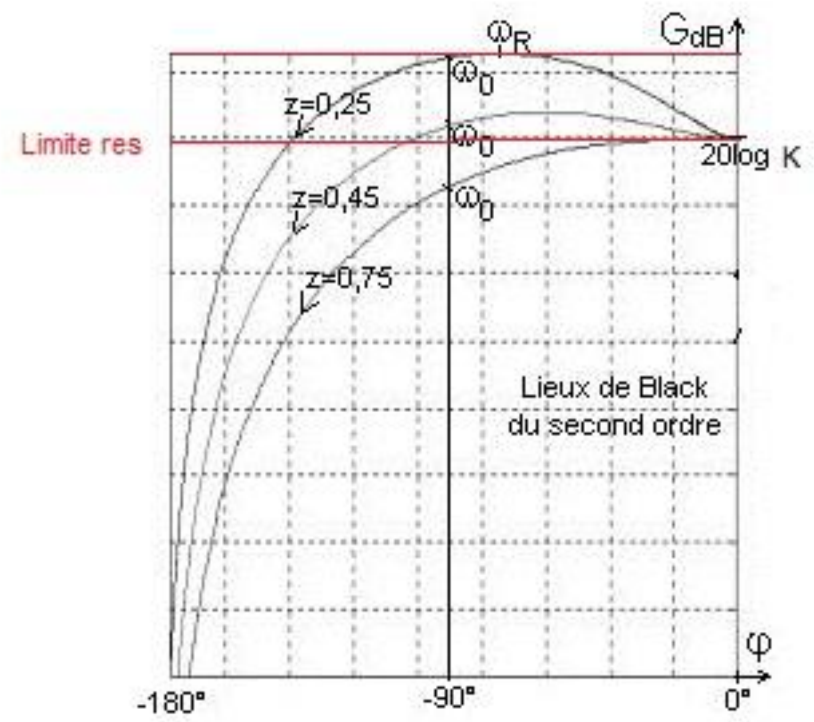
$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{{\omega_0}^2}} = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$$

Dans ce cas il est préférable d'étudier le système comme le produit de deux systèmes du premier ordre (T_1<T_2 dans notre cas).Suivant les valeurs des deux pôles on estimera le système.

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{(1 + jT_1\omega)(1 + jT_2\omega)}}$$



34 : Représentation de Black.



4 : Retard pur.

41 : Rappel.

Soit un système tel que la sortie soit en retard sur l'entrée d'un temps T

$$\boxed{S(t) = e(t-T_r)}$$

En passant dans le domaine de Laplace on peut écrire :

$$\boxed{S(p) = e^{-T_r P}.E(p)}$$

On en déduit la fonction de transfert d'un retard pur :

$$\boxed{R(p) = e^{-T_r P}}$$

On passe en complexe et on obtient :

$R(j\omega) = e^{-Tj\omega} = \cos(T_r\omega) - j.\sin(T_r\omega)$

Et donc :

- Module en dB : $|R(j\omega)| = 1$
- Argument : $\arg(R(j\omega)) = -T_r\omega$

Remarque : l'argument d'un retard pur est constamment décroissant.

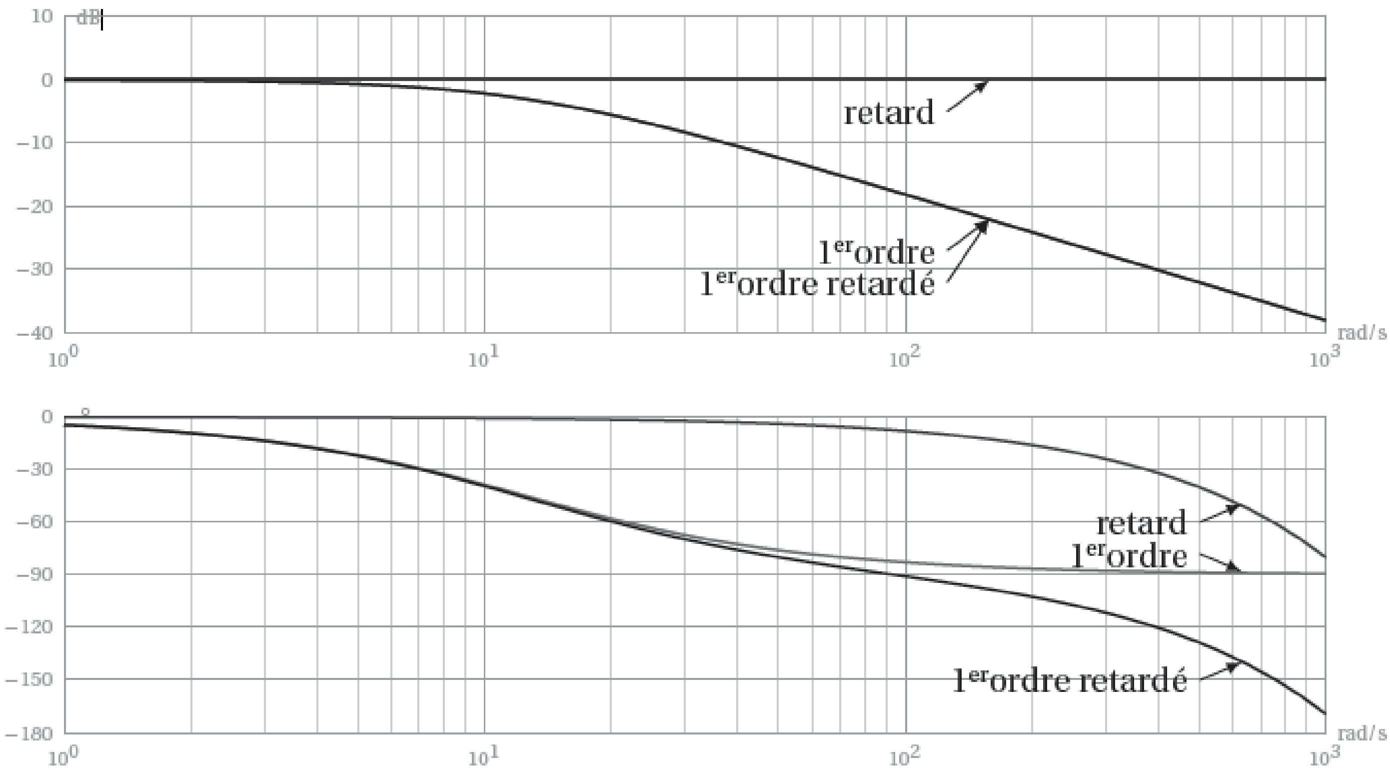
42 : Influence d'un retard sur le tracé d'un lieu de Bode.

Pour évaluer l'effet d'un retard sur le lieu de Bode, nous allons étudier la fonction de transfert d'un retard pur associé à un premier ordre.

Fonction de transfert complexe : $H(j\omega) = e^{-Trj\omega}.\frac{K}{1+Tj\omega}$

- Module : $|H(j\omega)|dB = 20log.\left|\frac{K}{1+Tj\omega}\right|$
- Argument : $Arg(H(j\omega)) = -Arctg(T.\omega) - T_r\omega$

On remarque sur la figure ci-dessous que le module n'est pas influencé par le retard (les deux tracés sont superposés), par contre l'argument est diminué de $T_r\omega$.
Un retard augmente le déphasage entre l'entrée et la sortie du système. Nous verrons plus loin, lors de l'étude de la stabilité des systèmes asservis, que cet effet est fortement préjudiciable à la stabilité des systèmes.



Compétences et objectifs

RESOUDRE	Déterminer la réponse fréquentielle
RESOUDRE	Tracer le diagramme asymptotique de BODE