D : Linéarisation autour d'un point de fonctionnement.

1- Méthode classique.

Un procédé non linéaire pourra être considéré comme linéaire (ramené à un système type (1)) autour d'un point de fonctionnement (uo,yo) si U(t) et Y(t) restent petites.

En effet, on linéarise les termes non linéaires dans le modèle du procédé par un développement en série de Taylor et on s'arrête à l'ordre 1. Pour ce faire, nous linéarisations les équations différentielles non linéaires de type :

$$\frac{dy(t)}{dt} = g\big(u(t), y(t)\big) \quad \textbf{(4)}$$

En régime stationnaire (4) devient :

$$g\big(u(t), y(t)\big) = g(u_0, y_0) \ \textbf{(5)}$$

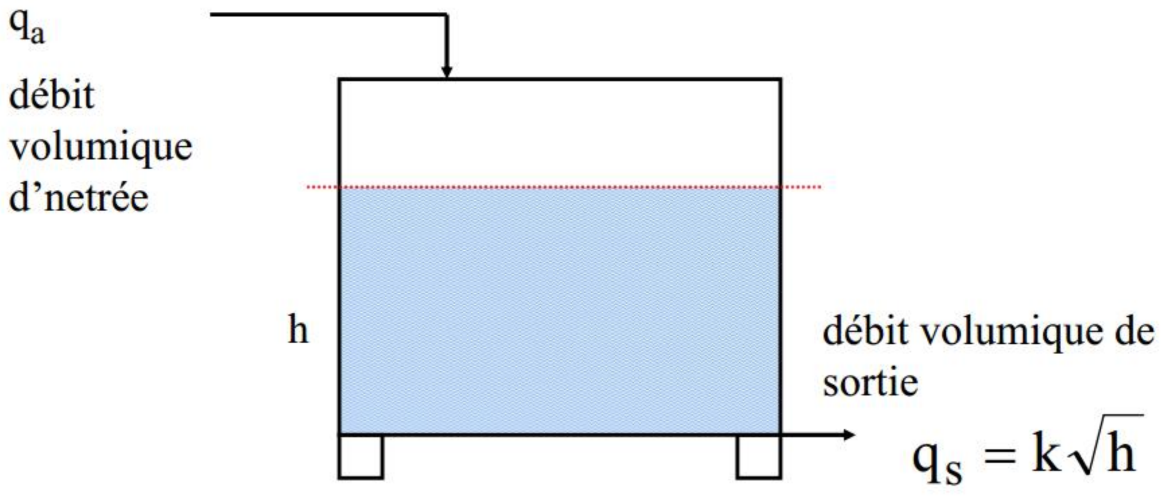
En linéarisant l'équation (4) tout en tenant compte de (5), on obtient :

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\partial g(u = u_0, y = y_0)}{\partial u}(u - u_0) + \frac{\partial g(u = u_0, y = y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

Ce qui peut s'écrire encore :

$$\frac{dY(t)}{dt} = b_0 U(t) + a_0 Y(t)$$

2- Exemple d'un bac de stockage à extraction libre (procédé naturellement stable).



Bilan de matière :

$\rho.q_a - \rho.q_s = \frac{d(S.h.\rho)}{dt}$ (S surface plane du réservoir) Ou $q_a - q_s = \frac{d(S.h.)}{dt}$ (car ρ est constante)

Or $q_s = k\sqrt{h}$ (terme non linéaire en h)

Donc : $\frac{q_a}{S} - \frac{k\sqrt{h}}{S} = \frac{dh}{dt} = g(q_a, h)$

D'où en linéarisant :

$$g(q_a, h) = \frac{\partial g}{\partial q_a}(q = q_{a0}, h = h_{e0})(q_a - q_{a0}) + \frac{\partial g}{\partial h}(q = q_{a0}, h = h_{e0})(h - h_0)$$

$$\frac{(q_a - q_{a0})}{S} - \frac{k}{2S\sqrt{h_0}}(h - h_0) = \frac{Q_a}{S} - \frac{k}{2S\sqrt{h_0}}H = \frac{dH}{dt}$$

Avec : $(q_a - q_{a0}) = Q_a \; et \; (h - h_0) = H$

Ou encore :

$H + a_1\frac{dH}{dt} = b_0 Q_a \; ou \; Y + a_1\frac{dY}{dt} = b_0 U$ (système du premier ordre)

Avec : $Y = H$; $Q_a = U$; $a_1 = \frac{2S\sqrt{h_e}}{k} = T$ (constante de temps) $b_0 = \frac{2\sqrt{h_e}}{k}$

Et la fonction de transfert correspondante sera : $\frac{H(p)}{Q_a(p)} = \frac{Y(p)}{Y(p)} = \frac{b_0}{1+a_1 p}$

Compétences et objectifs

MODELISER	Linéariser le modèle autour d'un point de fonctionnement