

## B : Performances des systèmes asservis.

### Problématique moderne des systèmes automatiques

Un système peut évoluer et avoir diverses applications n'ayant pas du tout les mêmes exigences en fonctions des utilisateurs

#### Exemple :

Prenons le système Segway comme système d'origine et voyons ses applications récentes.



Ce système à la base prévu pour déplacer une personne en ville ou dans un espace clos, c'est vu adapté au handicapé, au transport urbain de deux personnes, à un engin tout terrain très performant à 4 roues et à une moto mono roue.

Ces systèmes possèdent le même « cœur » mais doivent être envisagé de façons différentes.

Nous allons devoir qualifier nos systèmes asservis aussi bien en régulation qu'en fonctionnement dynamiques, prévoir leurs performances et pourvoir adapter leurs réponse aux besoins de notre système.

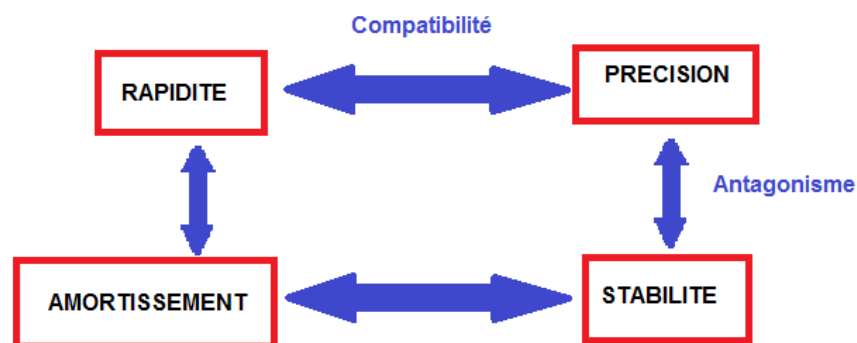
## 1 : Caractéristiques d'un système asservi.

Le comportement d'un système asservi peut être caractérisé par 3 caractéristiques

- **La rapidité** : caractérisée par  $T_5\%$ , c'est l'aptitude à atteindre en réponse continuement comprise entre deux valeurs définies par rapport à la consigne.
- **La précision** : caractérisée par les écarts statiques, c'est l'aptitude à atteindre en sortie une réponse attendue.
- **La stabilité** : c'est l'aptitude à avoir une sortie bornée lorsque l'entrée est bornée.

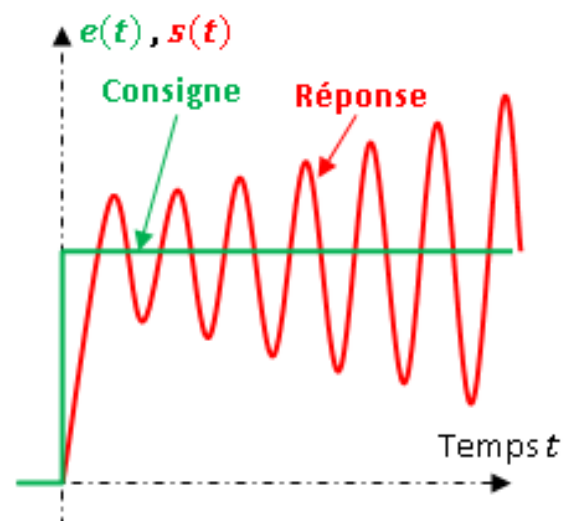
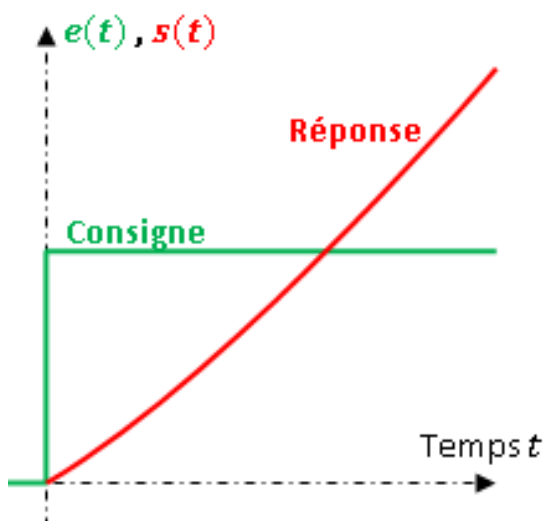
A ces trois caractéristiques nous allons en ajouter une autre : **l'amortissement** : c'est l'aptitude à atteindre le régime permanent sans oscillations excessives.

**Remarque** : on voit que la rapidité et l'amortissement caractérisent le comportement du système en régime transitoire alors que l'amortissement et la précision le régime permanent. Et on sait qu'il y a compatibilité et antagonisme entre elles.

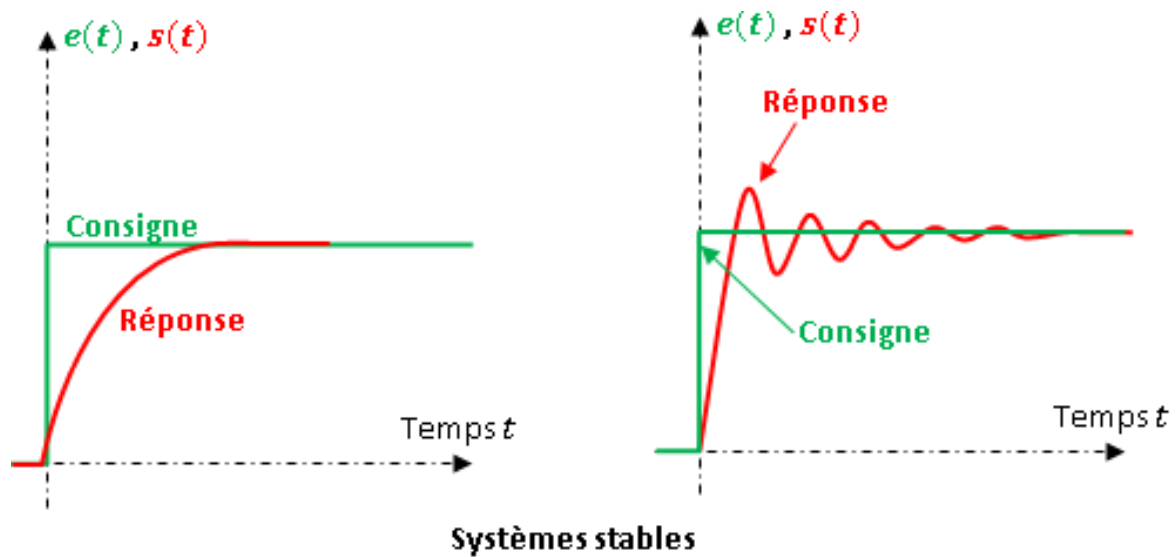


### Exemples de réponses

#### Stabilité

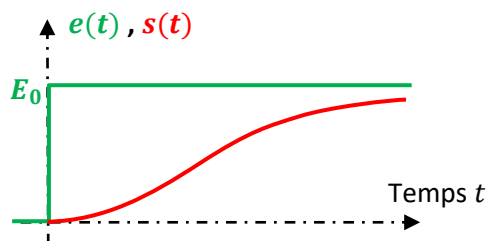


**Systèmes instables**



## Amortissement

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p><b>Réponse insuffisamment amortie</b></p> <p>Dépassement <math>D_1</math> trop important<br/>         Temps de réponse trop grand<br/>         Oscillations mécaniques dangereuses</p>                                                                                                                                                                                                                                                   |
|  | <p><b>Meilleur cas de figure : Réponse correctement amortie</b></p> <p>Dépassement <math>D_1</math> faible<br/>         Temps de réponse petit<br/>         Pas d'oscillations</p>                                                                                                                                                                                                                                                          |
|  | <p><b>Réponse correctement amortie :</b></p> <p>Dans le cas d'une machine outil à commande numérique, on ne tolère aucun dépassement pour l'outil. Il doit atteindre la valeur visée sans dépasser, ce qui serait dangereux lors de l'accostage d'une pièce par exemple.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Dépassement nul</li> <li>• Temps de réponse un peu plus long mais acceptable</li> <li>• Pas d'oscillations</li> </ul> |

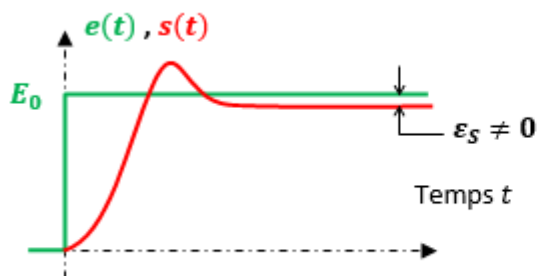


### Réponse trop amortie

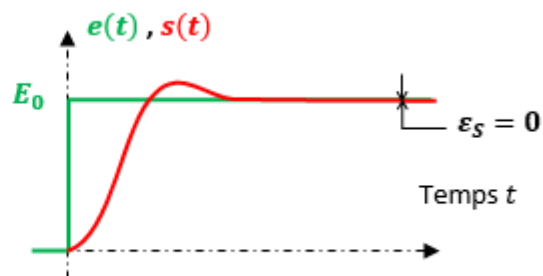
- Dépassement nul
- Temps de réponse élevé : système lent
- Rendement faible
- Pas d'oscillations

## Précision

### Ecart statique

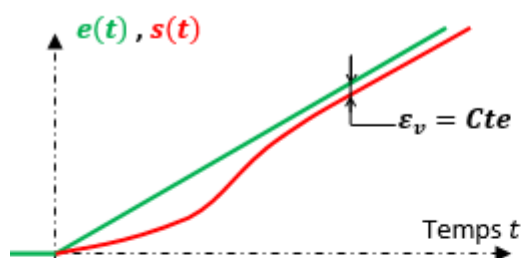


Système à erreur statique

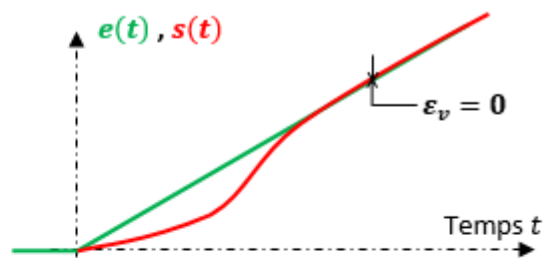


Système à erreur statique nulle

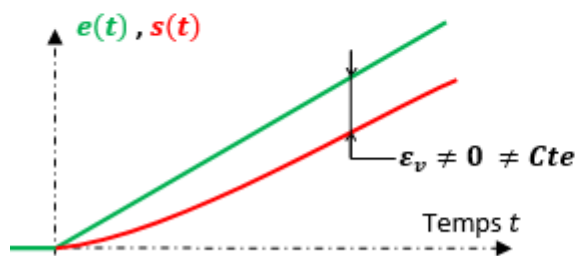
### Ecart ou erreur de trainage



Système à écart dynamique constant



Système à écart dynamique nul



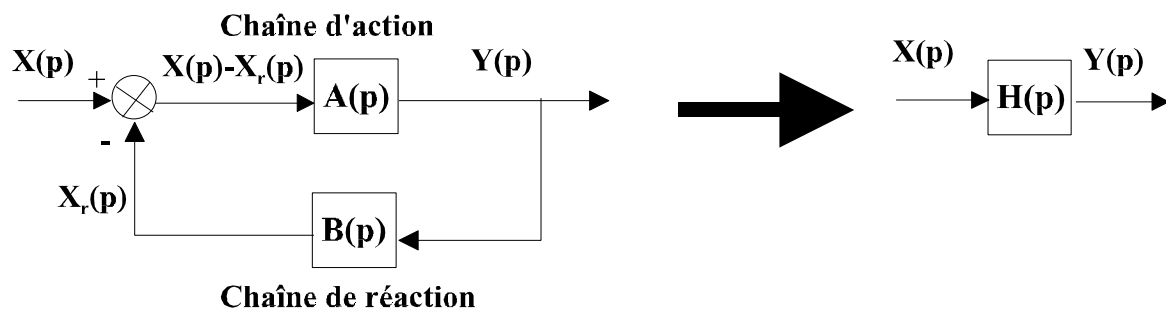
Système à écart dynamique infini

## 2 : Système bouclé.

### 21 : Système asservi et fonction de transfert.

#### 211 : Structure générale.

Un système asservi est constitué d'une chaîne d'action et d'une chaîne de réaction. A chacun des deux blocs qui composent le système asservi, nous associons une fonction de transfert. Nous notons  $A(p)$  la fonction de transfert de la chaîne d'action et  $B(p)$  celle de la chaîne de réaction.



$$Y(p) = A(p) \cdot [X(p) - X_r(p)]$$

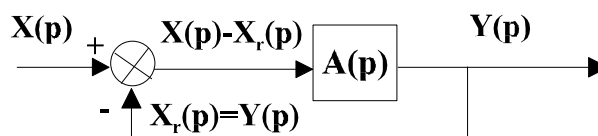
$$X_r(p) = B(p) \cdot Y(p)$$

$$Y(p) \cdot [1 + A(p) \cdot B(p)] = A(p) \cdot X(p)$$

D'où 
$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p) \cdot B(p)} = FTBF(p)$$

La fonction de transfert  $H(p)$  est la fonction de transfert totale du système, elle est aussi appelée **Fonction de Transfert de la Boucle Fermée** notée (FTBF).

#### 212 : Cas particulier du retour unitaire.

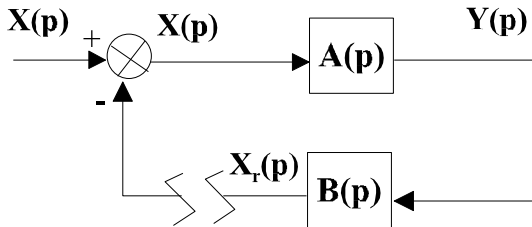


Un cas particulier important est celui où le retour est unitaire, c'est à dire  $B(p)=1$ .

Dans ce cas, la FTBF se simplifie pour donner :

$$FTBF(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)} = H(p)$$

### 213 : Fonction de transfert en boucle ouverte.



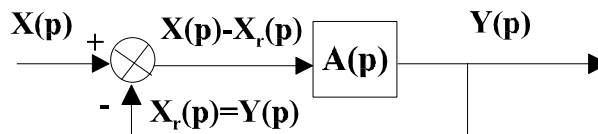
Lorsque l'on transforme le système en rompant la chaîne de réaction, le système est dit **en boucle ouverte**. La fonction de transfert en boucle ouverte est notée **FTBO** et vaut alors :

$$FTBO(p) = \frac{X_r(p)}{X(p)} = A(p) \cdot B(p)$$

Nous verrons par la suite l'intérêt d'utiliser la fonction de transfert en boucle ouverte pour analyser un système en boucle fermée. En effet, le comportement d'un système en boucle fermée se déduit de son comportement en Boucle ouverte.

### 214 : Effets du bouclage sur un système.

Considérons un système bouclé à retour unitaire afin de simplifier l'étude.



Prenons  $A(p)$  fonction du premier ordre

$$A(p) = \frac{K}{1+Tp}, \text{ après le bouclage on obtient : } \frac{Y(p)}{X(p)} = H(p) = \frac{K'}{1+T'p}$$

$$\text{Avec : } K' = \frac{K}{1+K} \text{ et } T' = \frac{T}{1+K} \text{ Donc } K' < K \text{ et } T' < T.$$

$$\text{Que devient l'écart : } \varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p(X(p) - Y(p))$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} pX(p) \left[ \frac{1 - K' + T'p}{1 + T'p} \right]$$

$$\text{Si } x(t) = u(t) \text{ échelon unitaire alors : } \varepsilon_s = \frac{1}{1+K} \neq 0$$

Nous pourrions faire de même avec une fonction du second ordre.

### Conclusion :

- Le bouclage ne modifie pas l'ordre de la fonction.
- Le bouclage diminue le gain.
- Le bouclage augmente la rapidité ( $T' < T$ ).
- Le bouclage ne change pas la précision il faudra pour cela augmenter le gain de la FTBO.

### 3 : Précision des systèmes asservis.

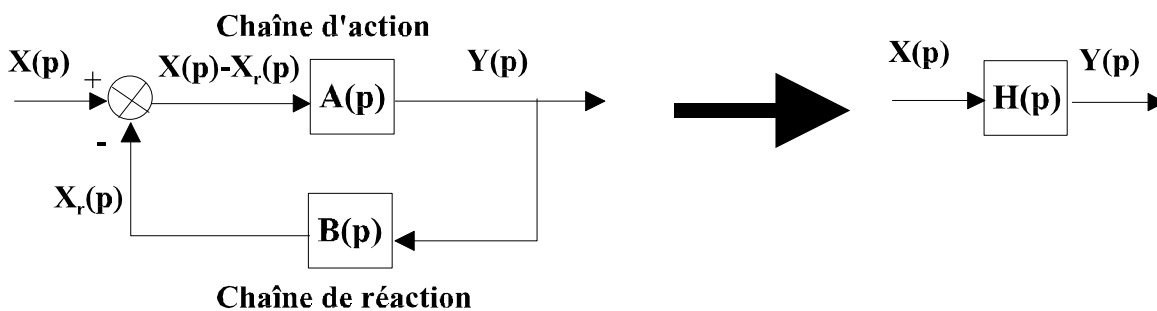
#### 31 : problème :

Afin d'étudier la précision du système, nous définissons comme erreur  $e(t)$  à un instant donné l'écart entre  $x(t)$  et  $x_r(t)$ . Le comportement idéal correspond à une erreur  $e(t)$  nulle à chaque instant. En réalité, cette erreur est non nulle pour deux raisons.

La première est que l'entrée  $x(t)$  varie en fonction du temps. Minimiser l'erreur  $e(t)$  lorsque l'entrée du système varie, c'est résoudre un problème de poursuite.

La deuxième raison qui entraîne une erreur non nulle provient des perturbations qui se superposent au signal utile du système. Minimiser l'erreur malgré l'existence de perturbations, c'est résoudre un problème de régulation.

**Solution le bouclage :** reprenons le cas précédent.



#### 32 : Erreur ou écart en régime permanent.

##### 321 : Rappel

$$e(t) = x(t) - x_r(t)$$

$$\varepsilon(p) = X(p) - X_r(p)$$

$$\varepsilon(p) = X(p) - A(p) \cdot B(p) \cdot \varepsilon(p)$$

D'où

$$\varepsilon(p) = \frac{X(p)}{1 + A(p) \cdot B(p)}$$

##### 322 : Erreur en régime permanent

Nous nous intéressons ici à l'erreur en régime permanent, c'est à dire l'erreur  $e(t)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.

Si nous utilisons le théorème de la valeur finale, on peut écrire :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \cdot X(p)}{1 + A(p) \cdot B(p)}$$

L'erreur en régime permanent ne dépend donc que de l'entrée  $X(p)$  et de la FTBO( $p$ ).

Ecrivons la FTBO( $p$ ) sous la forme suivante :  $FTBO(p) = A(p) \cdot B(p) = \frac{C}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + b_1 p + \dots}{1 + a_1 p + \dots}$

$\alpha$  Désigne la **classe** et **C** désigne le **gain du système en FTBO**.

$$\lim_{p \rightarrow 0} FTBO(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{C}{p^\alpha}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \cdot X(p)}{1 + \frac{C}{p^\alpha}}$$

Pour que l'erreur soit faible, il faut que les constantes C et  $\alpha$  soient grandes.

### 323 : Erreur indicielle ou écart statique ou erreur en position.

Elle est notée  $\varepsilon_s$  et correspond à une entrée sous la forme d'un échelon unitaire  $x(t) = 1 \cdot u(t)$

$$\text{D'où } X(p) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \cdot X(p)}{1 + \frac{C}{p^\alpha}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{C}{p^\alpha}}$$

$$\text{Si } \alpha = 0 \text{ alors } \varepsilon_s = \frac{1}{1 + C}$$

Si  $\alpha \geq 1$  (au moins un intégrateur dans la FTBO) alors  $\varepsilon_s = 0$

### 324 : Erreur de traînage.

Elle est notée  $\varepsilon_t$  et correspond à une entrée sous la forme d'une rampe de pente unitaire  $x(t) = t \cdot u(t)$

$$\text{D'où } X(p) = \frac{1}{p^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \cdot X(p)}{1 + \frac{C}{p^\alpha}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{C}{p^\alpha}}$$

Si  $\alpha = 0$  alors  $\varepsilon_t = +\infty$

$$\text{Si } \alpha = 1 \text{ alors } \varepsilon_t = \frac{1}{C}$$

Si  $\alpha \geq 2$  (au moins deux intégrateurs dans la FTBO) alors  $\varepsilon_t = 0$

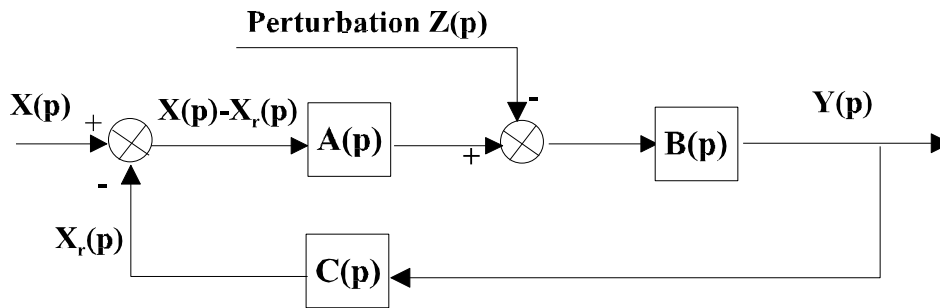
### 325 : Conclusion.

| $x(t)$                | type d'erreur                      | $\alpha = 0$                      | $\alpha = 1$                  | $\alpha = 2$        |
|-----------------------|------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|---------------------|
| $x(t) = 1 \cdot u(t)$ | $\varepsilon_s$<br>erreur statique | $\varepsilon_s = \frac{1}{1 + C}$ | $\varepsilon_s = 0$           | $\varepsilon_s = 0$ |
| $x(t) = t \cdot u(t)$ | $\varepsilon_t$<br>erreur trainage | $\varepsilon_t = +\infty$         | $\varepsilon_t = \frac{1}{C}$ | $\varepsilon_t = 0$ |

**Pour diminuer l'erreur en régime permanent, il faut augmenter la classe  $\alpha$  (nombre d'intégrations) de la FTBO et augmenter le gain C de la FTBO.**

Nous verrons que ces conditions s'opposent à la condition de stabilité du système. Nous en concluons que les conditions de stabilité et de précision sont contradictoires.

### 326 : Influence des perturbations.



Considérons un système soumis à des perturbations dont la transformée de Laplace est  $Z(p)$ .

L'erreur  $e(t) = x(t) - x_r(t)$  a pour transformée de Laplace  $E(p)$  ayant pour expression :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + A(p) \cdot B(p) \cdot C(p)} \cdot X(p) + \frac{B(p) \cdot C(p)}{1 + A(p) \cdot B(p) \cdot C(p)} \cdot Z(p)$$

L'erreur est composée de deux termes :

1. une erreur due aux variations de l'entrée (erreur de poursuite)
2. une erreur due à la perturbation (erreur de régulation).

Afin de ne prendre en compte que les effets de la perturbation, nous considérons que  $X(p)$  est nulle.

Etudions l'erreur due à une perturbation en échelon unitaire tel que  $Z(p) = \frac{1}{p}$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{B(p) \cdot C(p)}{1 + A(p) \cdot B(p) \cdot C(p)}$$

Au voisinage de  $p = 0$ , nous avons  $A(p) \approx \frac{A}{p^\alpha}$  et  $B(p) \cdot C(p) \approx \frac{BC}{p^\beta}$

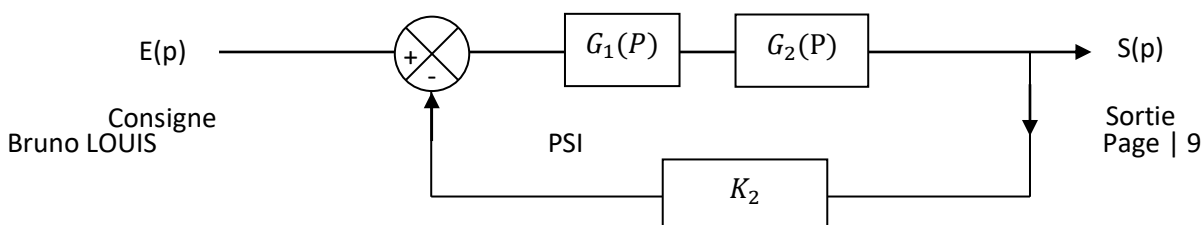
$$\text{D'où } \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{BC}{p^\beta + A \cdot BC \cdot p^{-\alpha}}$$

**Si  $\alpha < 1$  (pas d'intégrateur en amont de la perturbation) alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) \neq 0$**

**Si  $\alpha \geq 1$  (au moins un intégrateur en amont de la perturbation) alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$**

### 33 : Exemple.

Soit le système modélisé par le schéma Bloc suivant :



La constante  $K_2$  vaut 1.

$$G_2(p) = \frac{1,2}{1 + 30 \cdot 10^{-3} \cdot p}$$

### Question 1.

$G_1(p)$  est une constante de valeur 1.

Calculer la valeur finale du système pour un échelon unité. Que vaut l'erreur statique et de trainage ?

### R1

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G_1(p) \cdot G_2(p)}{1 + K \cdot G_1(p) \cdot G_2(p)}$$

AN :

$$\frac{\frac{1,2}{1 + 30 \cdot 10^{-3} \cdot p}}{1 + \frac{1,2}{1 + 30 \cdot 10^{-3} \cdot p}} = \frac{1,2}{2,2 + 30 \cdot 10^{-3} \cdot p}$$

Finalement sous la forma canonique on a :

$$FTBF(p) = \frac{0,545}{1 + 0,013 \cdot p}$$

Calcul de la valeur finale de la sortie :  $s_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$  pour un échelon unité  $E(p) = \frac{1}{p}$  :

$$S(p) = E(p) \cdot FTBF(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{0,545}{1 + 0,013 \cdot p}$$

Donc on obtient grâce au théorème de la valeur finale :

$$s_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{0,545}{1 + 0,013 \cdot p}$$

Finalement la valeur finale de la sortie est :

$$s_\infty = 0,545$$

Calcul de l'écart statique

$$\varepsilon_s = E_0 - s_\infty = 1 - 0,545 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_s = 0,455}$$

Vérifions avec les résultats précédents (classe du système)

Classe de la FTBO(p)=0

Donc :  $\varepsilon_s = \frac{E_0}{1+C}$  C étant le gain de la FTBO(p)

$$\text{D'où : } \varepsilon_s = \frac{1}{1+1,2} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_s = 0,455}$$

Ecart de trainage :

$$E(p) = \frac{1}{p^2} \quad \text{et } FTBO(p) \text{ de classe } 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon_t = +\infty}$$

**Question 2 :**  $G_1(p) = \frac{2}{p}$  même question que précédemment.

$$\mathbf{R2 : } FTBO(p) = \frac{2}{p} \cdot \frac{1,2}{1+30 \cdot 10^{-3} \cdot p} = \frac{2,4}{p \cdot (1+30 \cdot 10^{-3} \cdot p)}$$

Fonction de classe  $\alpha = 1$

- Erreur statique (c'est à dire pour  $E(p) = \frac{1}{p}$ ):  $\boxed{\varepsilon_s = 0}$
- Erreur de trainage (c'est à dire pour  $E(p) = \frac{1}{p^2}$ ):  $\boxed{\varepsilon_v = \frac{E_0}{K}}$  AN :  $\varepsilon_v = \frac{1}{2,4} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_v = 0,42}$

Remarque : le fait d'avoir un intégrateur dans la boucle a augmenté la précision du système

Allure de la réponse indicielle et coefficients caractéristiques de la fonction :

$$\boxed{FTBF(p) = \frac{G_1(p) \cdot G_2(p)}{1 + G_1(p) \cdot G_2(p)}}$$

$$\text{AN : } FTBF(p) = \frac{\frac{2}{p} \cdot \frac{1,2}{1+30 \cdot 10^{-3} \cdot p}}{1 + \frac{2}{p} \cdot \frac{1,2}{1+30 \cdot 10^{-3} \cdot p}} = \frac{2,4}{2,4+p \cdot (1+30 \cdot 10^{-3} \cdot p)} = \frac{2,4}{2,4+p+30 \cdot 10^{-3} \cdot p^2}$$

Sous la forme canonique on a :

$$FTBF(p) = \frac{1}{1 + 0,41.p + 0,0125.p^2}$$

Le calcul de la limite montre que l'écart statique est nul (ce qui est normal avec un gain de 1)  
L'écart de trainage vaut 0.41 par le calcul de la limite.

**Avec les résultats du cours :**

FTBO (p) de classe 1 donc :

- Ecart statique nul
- Ecart de trainage

$$\varepsilon_v = \frac{1}{2,4} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_v = 0,41}$$

#### 4 : Rapidité des systèmes asservis

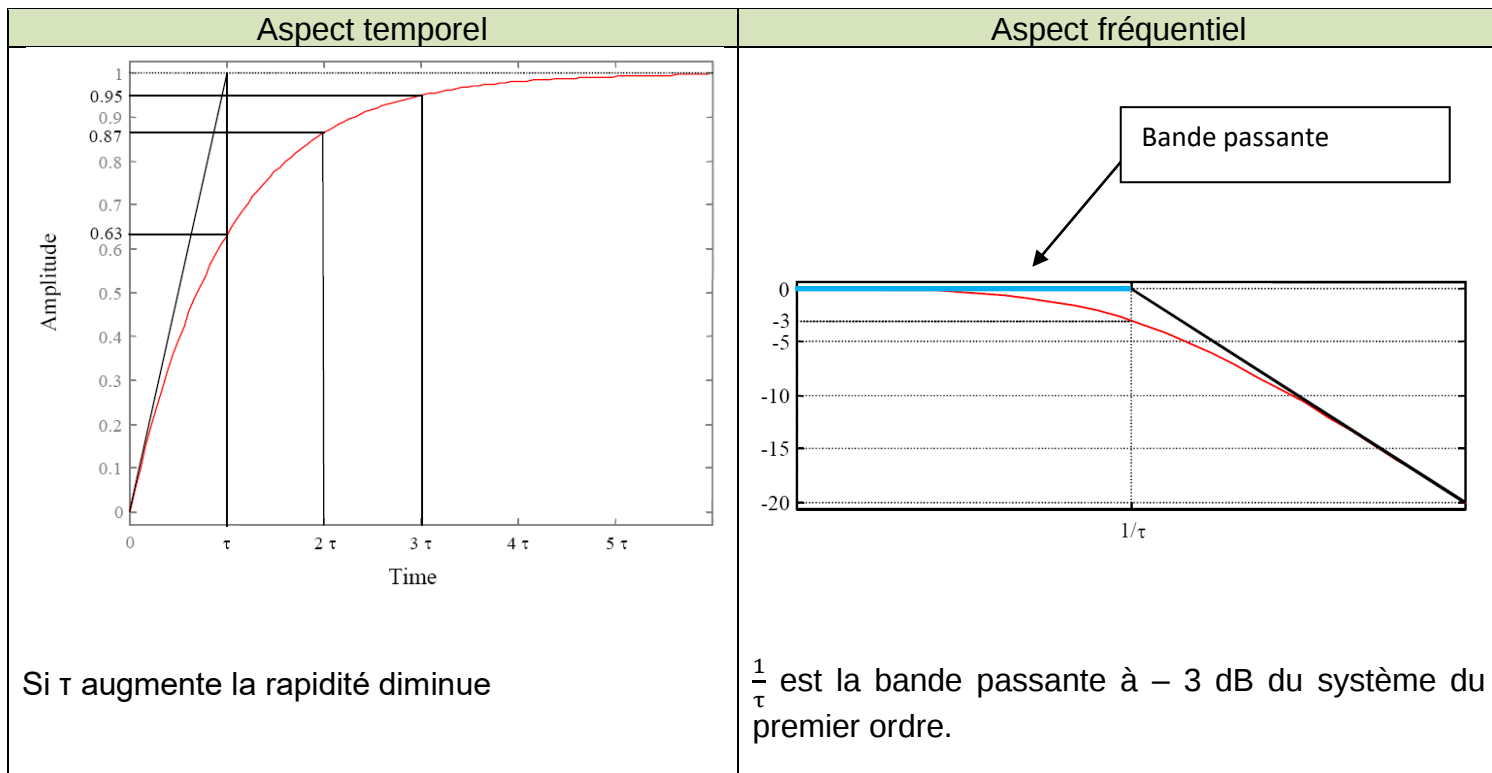
On définit la rapidité d'un système à l'aide du temps de réponse  $t_{R\ 5\%}$  à 5%. Ce temps est le temps mis à la sortie pour atteindre  $\pm 5\%$  de sa valeur finale.

##### 41 : Temps de réponse à 5% d'un système du premier ordre

$$FTBF(p) = \frac{K}{1+\tau.p}$$

Dans ce cas,

$$\boxed{t_{R\ 5\%} = 3\tau}$$

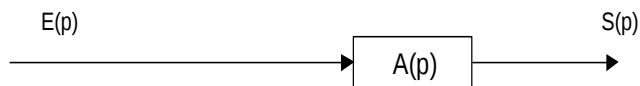


**Conclusion :**

$\tau$  augmente  $\rightarrow$  bande passante diminue  $\rightarrow$  rapidité diminue et inversement

##### 42 : Temps de réponse à 5% d'un système du second ordre à racine complexe

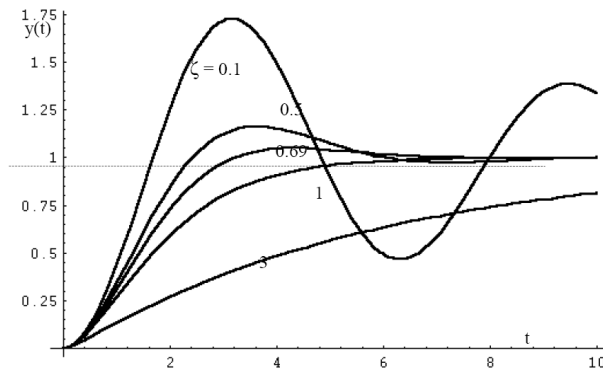
Soit un système du deuxième ordre :



$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

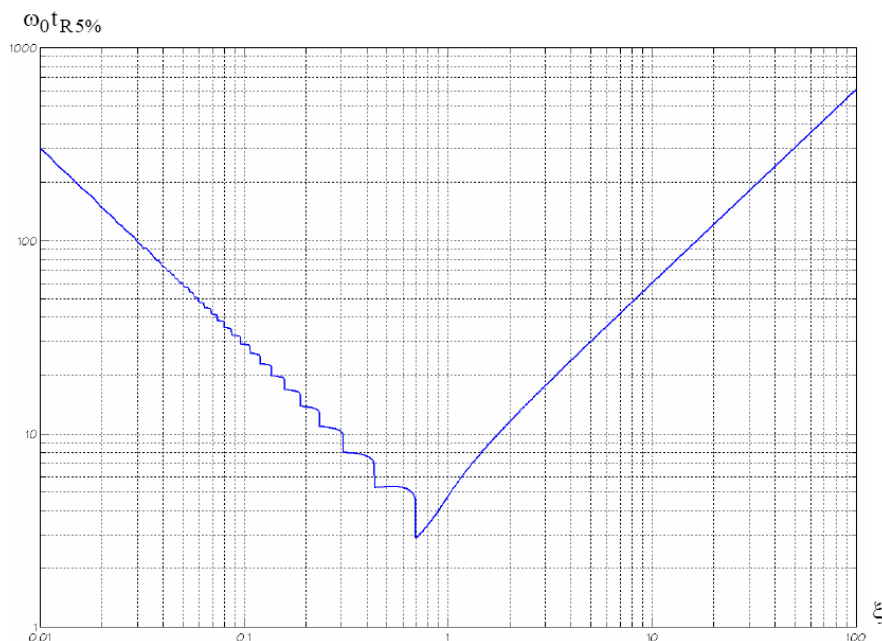
Avec  $\begin{cases} \omega_0 = \text{pulsation propre} \\ \xi = \text{Coefficient d'amortissement} \\ \Theta_r = \omega_0 \cdot T_{r5\%} = \text{temps de réponse réduit} (T_{r5\%} = \text{temps de réponse}) \end{cases}$

On constate que le temps de réponse varie en fonction de la valeur de  $\xi$  :



Remarque : Le meilleur temps de réponse est obtenu pour  $\xi = 0,69$ .

Après avoir mis la fonction transfert sous sa forme canonique et identifié  $\xi$  et  $\omega_0$ , on peut en utilisant l'abaque ci-dessous déterminer le temps de réponse d'un système du second ordre :

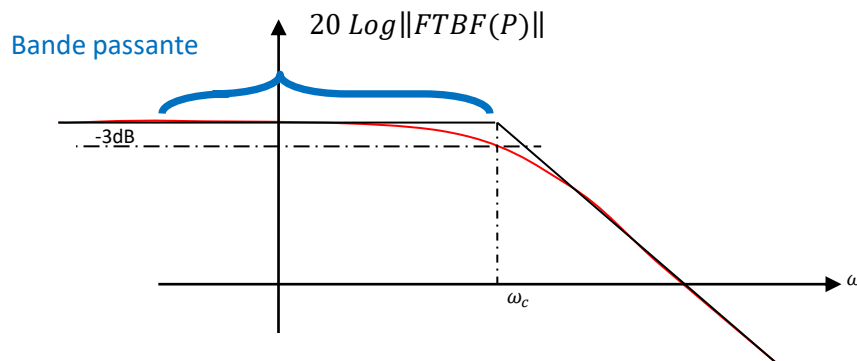


- Placer  $\xi$  en abscisse et lire le temps réduit en ordonnée :  $\Theta_r = \omega_0 \cdot t_{R5\%}$
- Connaissant  $\omega_0$  déduire  $t_{R5\%}$ .

### 43 : Relation entre rapidité et bande passante cas général

Dans le cas général, les systèmes ne sont pas toujours du premier ou deuxième ordre.

Cependant la majorité des systèmes se comporte comme des filtres passe-bas : le module de la fonction de transfert tend vers 0 pour les hautes fréquences :



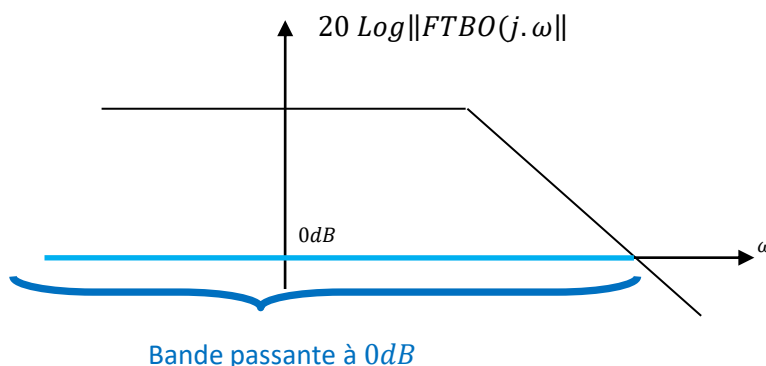
On définit la bande passante à -3 dB. Elle s'étend, pour les systèmes habituellement traités en automatique, entre 0 et la pulsation de coupure  $\omega_c$ .

**Bande passante diminuée  $\rightarrow$  rapidité diminuée**

**Remarque très importante :**

Nous verrons que de nombreuses propriétés d'un système en terme de stabilité et de précision peuvent se déduire de la *FTBO*. On a pour la rapidité une propriété :

**La bande passante à -3 dB de la *FTBF* d'un système peut être approximée à la bande passante à 0 dB de la *FTBO*.**



**5 : Stabilité des systèmes asservis.**

**51 : Définitions.**

**Définition 1** : Un système est stable si, pour toute entrée bornée, la sortie est bornée.

**Définition 2** : Un système est stable si la réponse libre du système pour  $t$  tendant vers l'infini tend vers 0.

On peut montrer que ces définitions sont équivalentes à la définition suivante :

**Définition 3** : Un système asservi est stable si et seulement si sa fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) ne possède que des pôles (racines du dénominateur) à parties réelles strictement négatives.

## 52 : Différentes méthodes utilisées.

Il existe deux moyens classiques pour montrer qu'un système est stable à partir de la définition 3 :

- Le **calcul des pôles** de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) puis l'analyse de leurs parties réelles.
- Le **critère graphique** permettant de prouver la stabilité (critère du **revers**)

**Remarque** : pour un système d'ordre élevé le calcul des pôles est très difficile, mais on peut énoncer la condition suivante : **Un système linéaire est stable si et seulement si tous ses pôles sont à partie réelle strictement négative.**

### 521 : Critère analytique.

Soit  $D(p)$  le dénominateur ou **équation caractéristique** de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF).

$$D(p) = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_{n-2} \cdot p^{n-2} + \dots + a_1 \cdot p^1 + a_0$$

- Tous les coefficients  $a_i$  sont positifs (cette condition est généralement vérifiée pour les systèmes physiques) ou tous négatifs s'il y a un inverseur (ce qui revient au même).
- Toutes les racines doivent avoir une partie réelle strictement négative.

**Remarque** : les racines de l'équation caractéristique sont les pôles de la FTBF(p).

Il faudra positionner les pôles (si on les connaît) dans le plan complexe et vérifier si la condition est validée.

## Exemples : vérifier la stabilité des systèmes à l'aide du critère analytique

**Exemple 1** : 
$$H_1(p) = \frac{2}{p^4 + 3p^3 - 3p^2 + 6p + 1}$$

$P_1 = -4, P_2 = -0.15, P_3 = 0.6 - 1.1i, P_4 = 0.6 + 1.1i$

Il a un  $a_i < 0$  donc instable calcul inutile

**Exemple 2 :**  $H_2(p) = \frac{7}{p^4 + 3p^3 + 3p^2 + 6p + 1}$

$\rightarrow D_2(p) = p^4 + 3p^3 + 3p^2 + 6p + 1$

$P1 = -2.6, P2 = -0.18, P3 = -0.07 - 1.4i, P4 = -0.07 + 1.4i$

Premier examen ok

Les parties réelles des pôles sont toutes négatives donc ok

**Exemple 3 :**

$$F(p) = \frac{2.K_i}{T_i.p.(1+2p+20p^2) + 2.K_i}$$

Question : Vérifier la stabilité du système par application du critère de Routh

Correction :

$$F(p) = \frac{2.K_i}{T_i.p.(1+2p+20p^2) + 2.K_i} = \frac{2.K_i}{2.K_i + T_i.p + 2.T_i.p^2 + 20.T_i.p^3}$$

Il est inutile de la mettre sous forme canonique pour ce travail.

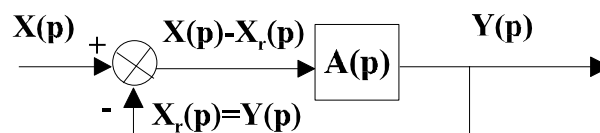
$$D(p) = 2.K_i + T_i.p + 2.T_i.p^2 + 20.T_i.p^3$$

$K_i$  et  $T_i > 0$  bien sur..

Pour le reste il faudrait pouvoir calculer les pôles en fonction de  $K_i$  et  $T_i$  et donc limiter leurs valeurs.

## 522 : Critère graphique du revers.

On considère un système modélisé par le schéma bloc suivant :



Un cas particulier important est celui où le retour est unitaire, c'est à dire  $B(p)=1$ .

Dans ce cas la FTBO =  $A(p)$

Et la FTBF se simplifie pour donner :  $FTBF(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)} = H(p)$

L'équation caractéristique est donc :  $D(p) = 1 + A(p) = 0$ .

C'est-à-dire :  $FTBO = A(p) = -1$

Lorsque l'on passe dans le domaine complexe alors on écrit :

FTBO ( $j\omega$ ) = -1 donc :  $A(\omega) = \|FTBO(j\omega)\| = 1$  et  $\varphi(\omega) = -180^\circ$

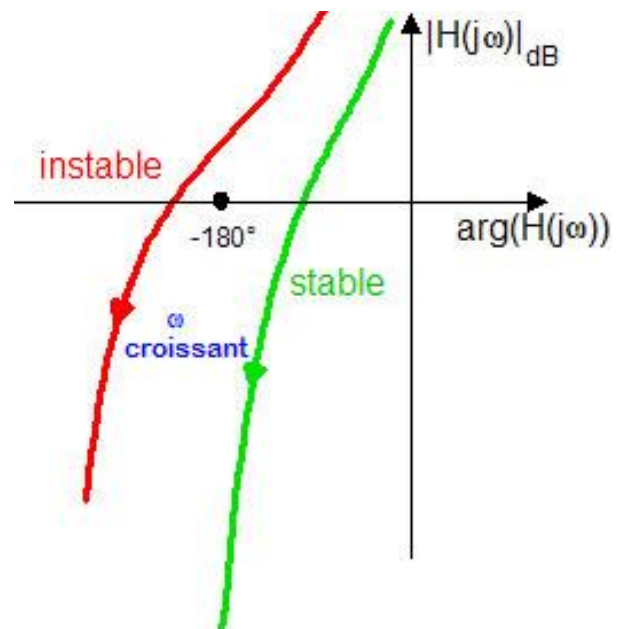
On démontre que la stabilité en **boucle fermée** d'un système dépend de la façon dont se comporte la **FTBO** dans ses représentations en lieux de transfert vis-à-vis du point critique ( $A(\omega) = 1$  et  $\varphi(\omega) = -180^\circ$ ).

La condition de stabilité ou d'instabilité déduite de l'utilisation du critère du revers est vraie tant en temporel qu'en fréquentiel.

Le critère graphique sera donc établi sur la représentation de la **FTBO** du système dans les lieux de transfert.

### Enoncé du critère dans le plan de BLACK.

Un système est stable en **boucle fermée** si le lieu de BLACK de la fonction de transfert en **boucle ouverte** (FTBO) parcouru dans le sens des  $\omega$  croissants laisse le point critique A (0, -180°) sur la droite.



### Application du critère dans les diagrammes de BODE.

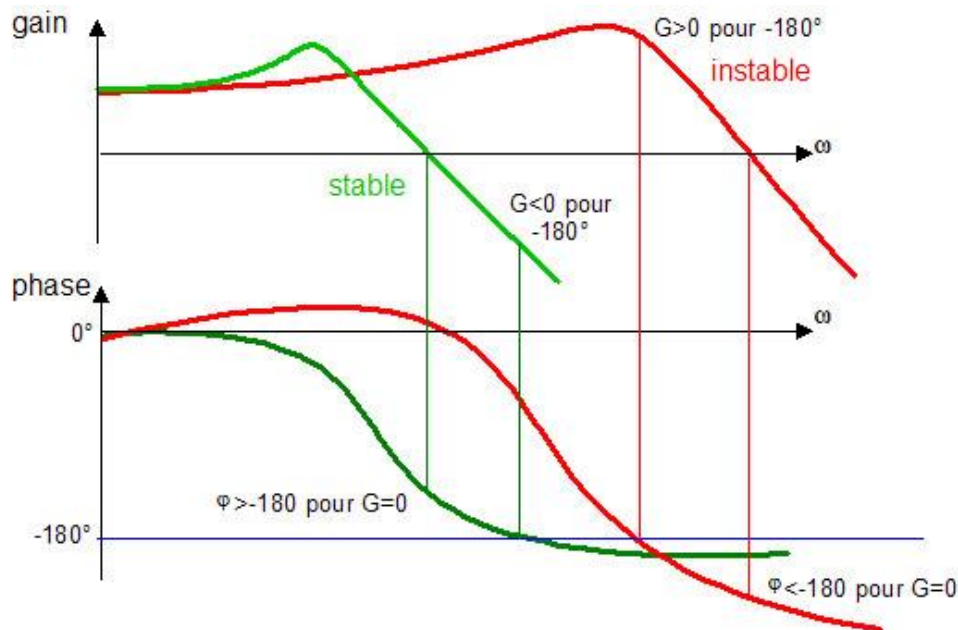
Si pour les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte, les tracés sont tels que :

- pour la pulsation pour laquelle  $AdB(\omega) = 0dB$ ,  $\varphi(\omega) > -180^\circ$ .  
**Et**

- pour la pulsation pour laquelle  $\varphi(\omega) = -180^\circ$ ,  $AdB(\omega) < 0dB$ .

**Alors le système est stable en boucle fermée.**

Cela se traduit sur les diagrammes par :



### Conclusion :

L'étude de la stabilité en boucle fermée nécessite la détermination d'un modèle mathématique de la fonction de transfert en boucle ouverte. Ce modèle est, soit un modèle de connaissance (connaissance des fonctions des différents composants de la chaîne), soit un modèle de comportement (obtenu par identification du comportement global à la suite d'essais).

Dans les deux cas, le modèle peut être éloigné de la réalité.

Afin d'assurer une stabilité en boucle fermée, on cherchera à conserver à la fonction de transfert en boucle ouverte, une distance minimale par rapport au point critique. On utilise alors des **marges**.

### **53 : Marges de stabilité : marge de phase et marge de gain.**

#### Définition.

- **Marge de gain (MG) :** on la définit comme étant la différence entre la valeur du gain pour la pulsation critique telle que  $\varphi(\omega) = -180^\circ$  et 0dB (souvent on la souhaite  $> 6\text{dB}$ ).

$$M_{\text{gain}} = -20 \log |FTBO(j.\omega_{-180^\circ})|$$

- **Marge de phase (Mφ) :** on la définit comme étant la différence entre  $\varphi(\omega)$  et  $-180$ ,  $\omega$  étant telle que  $\text{AdB}(\omega) = 0$  (souvent on la souhaite aux alentours de  $60^\circ$ ).

$$M_{\text{phase}} = 180 + \text{Arg}(FTBO(j.\omega_{0\text{dB}}))$$

## Lecture des marges dans les lieux de transfert.

Plan de BLACK.

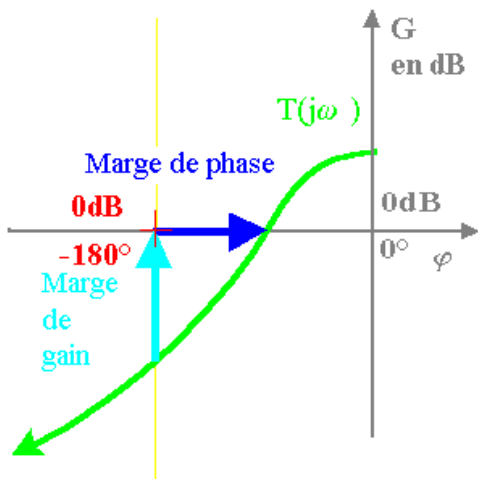
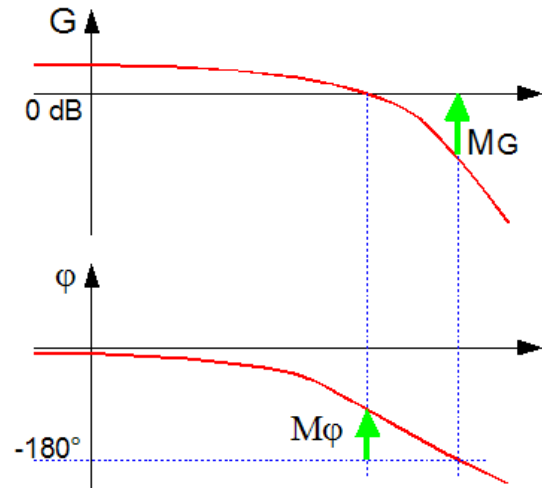
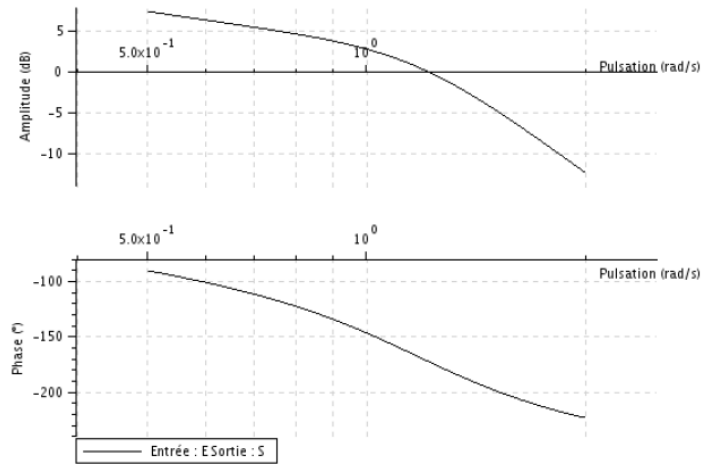
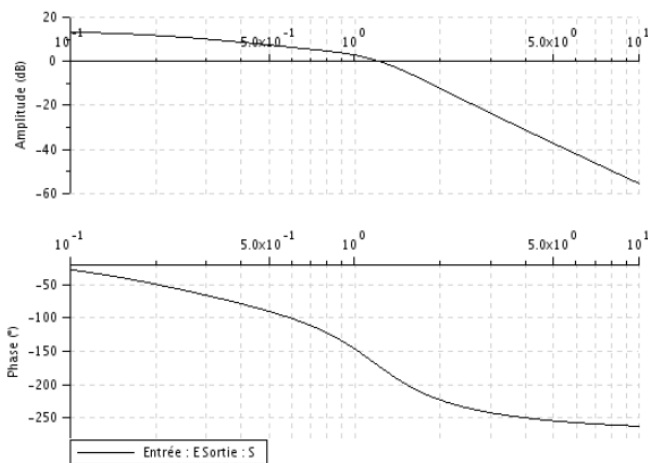


Diagramme de BODE.



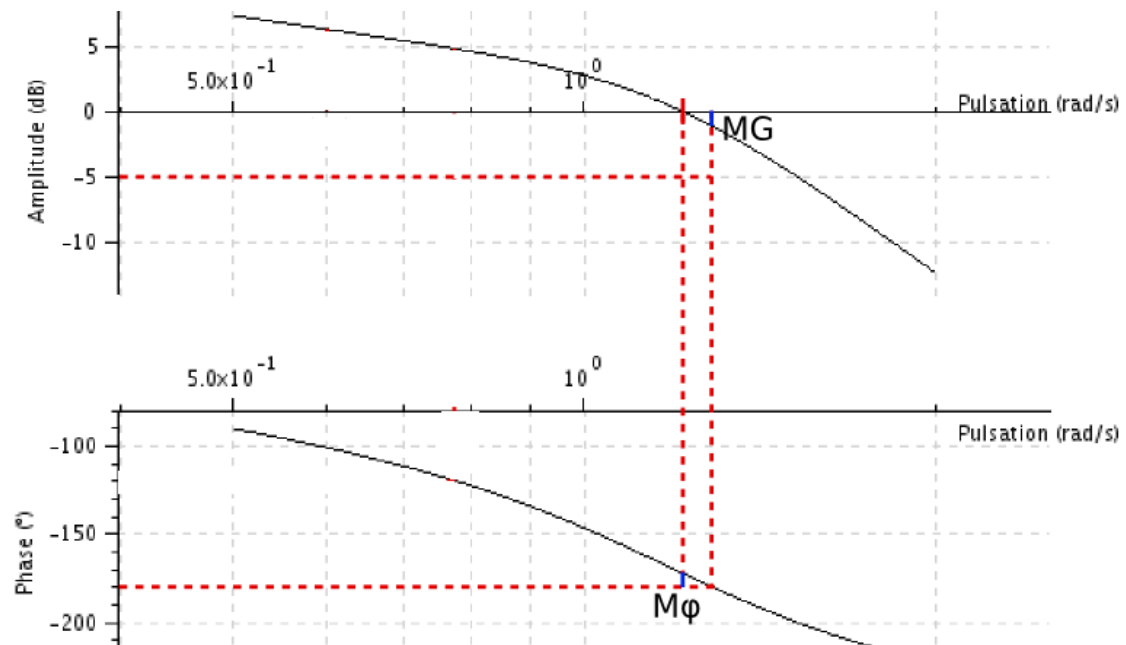
### Exemple :



1. Quelles sont les valeurs des marges de gain et de phase ?
2. Quelle correction proportionnelle  $K_{p2}$  faut-il choisir pour assurer une marge de gain de 6 dB ?
3. Quelle correction proportionnelle  $K_{p3}$  faut-il choisir pour assurer une marge de phase de  $60^\circ$  ?

Correction :

1.



Les marges de gain et de phase sont très faibles, environ  $10^\circ$  de marge de phase et environ 1 dB de marge de gain. Elles se mesurent à des pulsations très proches.

2. La courbe de phase n'étant pas modifiée, la marge de gain est toujours mesurée pour la même pulsation, là où la phase vaut  $-180^\circ$ . Avant correction le gain à cette pulsation vaut environ -1 dB. Pour assurer une marge de gain de 5 dB, il faut baisser la courbe de 4 dB, soit :

$$K_p = 10^{\frac{-4}{20}} = 0.63$$

3. Pour assurer une marge de phase de  $60^\circ$ , celle-ci doit se mesurer à la pulsation où la phase vaut  $-180 + 60 = -120^\circ$ , c'est à dire entre 0.7 et 0.8 rad/s, 0.78 rad/s environ par lecture graphique. À cette pulsation, le gain vaut avant correction 5 dB. Il faut donc descendre la courbe de 5dB, soit

$$K_p = 10^{\frac{-5}{20}} = 0.56$$

#### 54 : conclusion.

Un système asservi possède des caractéristiques qui vont conditionner sa rapidité sa précision et sa stabilité, lorsque ces caractéristiques sont incompatibles avec le cahier des charges alors il faudra ajouter un composant permettant de changer ses performances : cela se nomme un **correcteur**.

## Compétences et objectifs

|                 |                                                                                                                  |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>RESOUDRE</b> | Prévoir les performances en termes de rapidité                                                                   |
| <b>RESOUDRE</b> | Relier la rapidité aux caractéristiques fréquentielles                                                           |
| <b>RESOUDRE</b> | Analyser la stabilité d'un système à partir de l'équation caractéristique                                        |
| <b>RESOUDRE</b> | Déterminer les paramètres permettant d'assurer la stabilité du système                                           |
| <b>RESOUDRE</b> | Relier la stabilité aux caractéristiques fréquentielles                                                          |
| <b>RESOUDRE</b> | Déterminer l'erreur en régime permanent vis-à-vis d'une entrée en échelon ou en rampe (consigne ou perturbation) |
| <b>RESOUDRE</b> | Relier la précision aux caractéristiques fréquentielles                                                          |