Synthèse de dynamique.

Référentiel

Programme - Compétences		
C12	RESOUDRE	Choix des isolements Choix des méthodes de résolution Actions mécaniques dans les liaisons Equations différentielles du mouvement
B212	MODELISER	Caractéristiques d'inertie d'un solide indéformable (masse, opérateur d'inertie) Lien entre forme de la matrice d'inertie et géométrie du solide associé Signification des termes de la matrice d'inertie
B223	MODELISER	Modélisation dynamique des solides Torseur cinétique et dynamique et énergie cinétique d'un solide ou système de solides Puissances des actions intérieures et extérieures par rapport à un référentiel galiléen
B224	MODELISER	Principe fondamental de la dynamique et théorème de l'énergie cinétique pour la détermination d'actions de liaisons et d'équations différentielles du mouvement

Caractéristiques des corps solides

Masse

$$m_E = \int_{M\in E} dm = \iiint_{M\in E} \rho(M)dV$$

L'unité de masse est le kilogramme (kg).

Centre d'inertie d'un solide

Méthode Intégrale

$$\int_E \overrightarrow{GM}dm = \vec{0}$$

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_E \overrightarrow{OM}\,dm$		
$X_G = \frac{1}{m}\int_E xdm$	$Y_G = \frac{1}{m}\int_E ydm$	$Z_G = \frac{1}{m}\int_E zdm$

Si $\rho = cst$, remplacer m par V et dm par dV

Méthode sous-volumes

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$$

$$E_i \cap E_j = \emptyset \; \forall i \neq j$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{OG_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OG_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

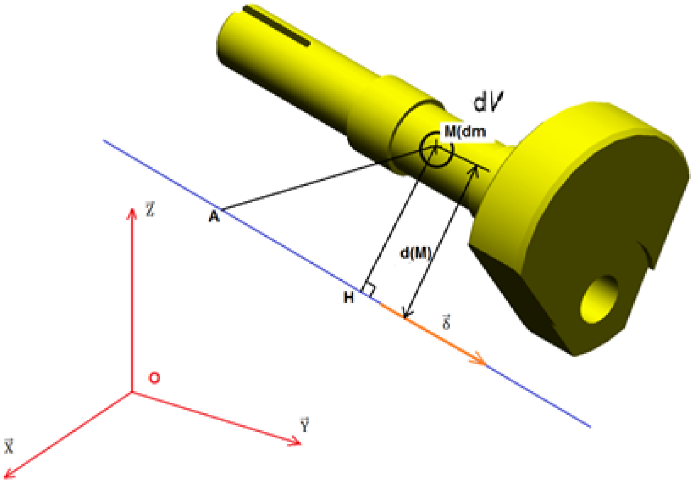
Masses négatives pour formes creuses

Théorème de Guldin (CF polycopié)

Moment d'inertie d'un solide

Moment d'inertie par rapport au point O

$$I_O = \int_S \overrightarrow{OM}^2 dm = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm$$



Moment d'inertie par rapport à l'axe Δ

$$I_\Delta = \int_S d(M)^2 dm$$

Théorème de Huygens :

$$I_\Delta(S) = I_{\Delta_G}(S) + m(S)d^2$$

Moments d'inertie par rapport aux axes du repère

$I_{O_x} = \int_S (y^2 + z^2) dm$	$I_{O_y} = \int_S (x^2 + z^2) dm$	$I_{O_z} = \int_S (x^2 + y^2) dm$

Opérateur d'inertie d'un solide

$$I(A,S)\vec{u} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}) dm$$

Soit $\mathfrak{B}_S$ une base $(\overrightarrow{x_S}, \overrightarrow{y_S}, \overrightarrow{z_S})$ liée au solide S étudié et A l'origine du repère

$$I(A,S) = \begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2) dm & -\int_S xy dm & -\int_S xz dm \\ -\int_S xy dm & \int_S (x^2+z^2) dm & -\int_S yz dm \\ -\int_S xz dm & -\int_S yz dm & \int_S (x^2+y^2) dm \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Théorème de Huygens généralisé

$$\overrightarrow{AG} = a\overrightarrow{x_S} + b\overrightarrow{y_S} + c\overrightarrow{z_S} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S}$$

$$I(A,S) = I(G,S) + M \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

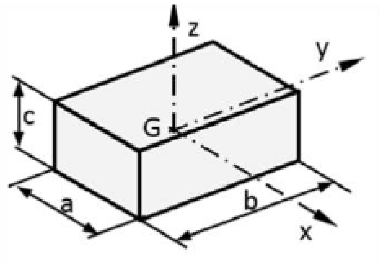
$$\overrightarrow{OG} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} ; \overrightarrow{O'G} = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} ; A = \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} ; A' = \begin{bmatrix} b'^2 + c'^2 & -a'b' & -a'c' \\ -a'b' & a'^2 + c'^2 & -b'c' \\ -a'c' & -b'c' & a'^2 + b'^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$I(O',S) = I(O,S) + M(A' - A)$ -Nécessité de connaître G pour avoir A et A'

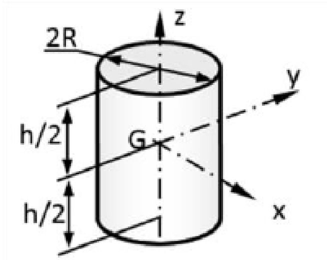
Propriétés des matrices d'inertie (symétries)

$(O,\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S})$ Plan de symétrie	Deux plans de symétrie parmi $(\boldsymbol{O},\overrightarrow{\boldsymbol{x_S}},\overrightarrow{\boldsymbol{y_S}})(\boldsymbol{O},\overrightarrow{\boldsymbol{x_S}},\overrightarrow{\boldsymbol{z_S}})\ (\boldsymbol{O},\overrightarrow{\boldsymbol{y_S}},\overrightarrow{\boldsymbol{z_S}})$	Axe de révolution $(\boldsymbol{O},\overrightarrow{\boldsymbol{z_S}})$ *Angle de révolution* $\theta = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$I(O,S) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$	$I(O,S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$	$I(O,S)$ $= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$ $A = \frac{C}{2} + \int_S z^2 dm$ $\forall \mathfrak{B}(\_,\_,\overrightarrow{z_S})$
Solide sphérique de centre O	$(O,\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S}) : z = 0$	
$I(O,S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$ $A = \frac{2}{3} I_O$ $\forall \mathfrak{B}_S$	$I(O,S) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$	

Matrices des formes usuelles (à savoir justifier)

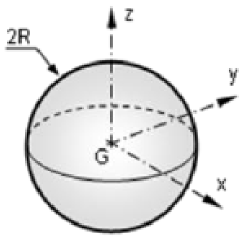


$$I(G,S) = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$



$$I(G,S) = \begin{bmatrix} m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Matrice inchangée dans toute base contenant l'axe de révolution



$$I(G,S) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Masse ponctuelle S_i en M_i

$$\overrightarrow{OM_i} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S}$$

$$I(M_i,S_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$I(O,S_i) = m_i \begin{bmatrix} {y_i}^2+{z_i}^2 & -x_iy_i & -x_iz_i \\ -x_iy_i & {x_i}^2+{z_i}^2 & -y_iz_i \\ -x_iz_i & -y_iz_i & {x_i}^2+{y_i}^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Ensemble de solides

$$I(A,S)=\sum_{i=1}^{N} I(A,S_i)=\sum_{i=1}^{N}\left[I(G_i,S_i)+m_i\begin{bmatrix} {y_i}^2+{z_i}^2 & -x_iy_i & -x_iz_i \\ -x_iy_i & {x_i}^2+{z_i}^2 & -y_iz_i \\ -x_iz_i & -y_iz_i & {x_i}^2+{y_i}^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}\right]$$

Axe principal d'inertie

$$I(A,S)=\begin{bmatrix} A^* & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$(O,\overrightarrow{x_s})$ est axe principal d'inertie de ce solide

Opérations

Moment d'inertie par rapport à l'axe (A,Δ)

$$I_\Delta(S)=\vec{\delta}.I(A,S)\vec{\delta}$$

$\vec{\delta}$ et $I(A,S)$ exprimés dans la même base

Moment d'inertie par rapport à au point A avec

$$I(A,S)=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} : I_A=\frac{A+B+C}{2}$$

Moment d'inertie autour d'un axe $(A,\overrightarrow{x_s})$ avec

$$I(G,S)=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} : I_{(A,\overrightarrow{x_s})}=A+md^2$$

avec d distance entre $(A,\overrightarrow{x_s})$ et $(G,\overrightarrow{x_s})$

Changement de base

$$I(O,S)_{B_2}=P^{-1}I(O,S)_{B_1}P$$

$P^{-1}=P^T$; P matrice de passage de B_1 à B_2

Masse ponctuelle

$$d=\sqrt{{x_i}^2+{y_i}^2}\ (distance\ de\ M\ à\ l'axe)$$

$$I_\Delta=m_i\,d^2$$

Condition d'équilibrage

Le solide S de centre de gravité G est équilibré en rotation autour de $(O,\overrightarrow{x_s})$ si :

$G\in(O,x_s)$

$(O,\overrightarrow{x_s})$ est axe principal d'inertie de S en un point de l'axe

Cinétique et dynamique

Cinétique

$$\{\mathcal{C}(S/R_0)\}$$

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_c}(S/0) = \int_E \vec{V}(M,S/R_0)dm \\ \vec{\sigma}(A,S/R_0) = \int_E \overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(M,S/R_0)dm \end{Bmatrix}_A$$

$$\forall(A,B), \vec{\sigma}(A,S/R_0) = \vec{\sigma}(B,S/R_0) + \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R_c}(S/0)$$

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_c} = M\vec{V}(G,S/R_0) \\ \vec{\sigma}(A,S/R_0) = I(A,S)\vec{\Omega}(S/R_0) + M\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A,S/R_0) \end{Bmatrix}_A$$

$$\{\mathcal{C}(E/R_0)\} = \sum_{i=1}^{N}\{\mathcal{C}(S_i/R_0)\}$$

Dynamique

$$\{\mathcal{D}(S/R_0)\}$$

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_d}(S/0) = \int_E \vec{\Gamma}(M,S/R_0)dm \\ \vec{\delta}(A,S/R_0) = \int_E \overrightarrow{AM}\wedge\vec{\Gamma}(M,S/R_0)dm \end{Bmatrix}_A$$

$$\forall(A,B), \vec{\delta}(A,E/R_0) = \vec{\delta}(B,S/R_0) + \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R_d}(S/0)$$

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_d} = M\vec{\Gamma}(G,S/R_0) \\ \vec{\delta}(A,S/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0} + M\vec{V}(A,S/R_0)\wedge\vec{V}(G,S/R_0) \end{Bmatrix}_A$$

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \sum_{i=1}^{N}\{\mathcal{D}(S_i/R_0)\}$$

PFD

$$\{\mathcal{D}(E/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\overline{E} \to E)\}$$

Théorème de la résultante dynamique : $M\vec{\Gamma}(G,E/R_g) = \vec{R}_{\overline{E}\to E}$

Théorème du moment dynamique : $\vec{\delta}(A,E/R_g) = \overrightarrow{M_{A_{\overline{E}\to E}}}$

6 équations par isolement

Actions de liaisons de travail nul

Equations différentielles du mouvement + action exerçant un travail

Cas particuliers d'un solide indéformable en …

translation dans une direction fixe
$TRD: F = ma$

rotation autour d'un axe fixe d'inertie J autour de cet axe
$TMD: J\ddot{\theta} = C$

Remarques

Une vitesse imposée correspond à une action de liaison présente

Théorème des actions réciproques
$\{\mathcal{T}(E_2 \to E_1)\} = -\{\mathcal{T}(E_1 \to E_2)\}$

Masses et inerties négligées
$\{\mathcal{D}(S/R_0)\} = \{0\}$

Simplification du PFD en projection sur un axe en moment en G ou A fixe

$$(uv)' = uv' + u'v \quad ; \quad u = \vec{\sigma}(G,S/R_0) \quad ; \quad v = \vec{u}$$

$$\vec{\delta}(G,S/R_0).\vec{u} = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0}.\vec{u} = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S/R_0).\vec{u}}{dt}\right)_{R_0} - \vec{\sigma}(G,S/R_0).\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_0}$$

Energétique

Energie cinétique

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}\int_E \vec{V}^2(M,S/R_0)\,dm$$

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}M\vec{V}^2(G,S/R_0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\left[I(G,S)\vec{\Omega}(S/R_0)\right]$$

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}M\vec{V}^2(G,S/R_0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\vec{\sigma}(G,S/R_0)$$

$$T(S/R_0)\frac{1}{2}\{\mathcal{C}_{S/R_0}\}\{\mathcal{V}_{S/R_0}\}\ \forall P$$

$$T(E/R_0) = \sum_{i=1}^{N} T(S_i/R_0)$$

Mouvements plans	
Translation de vitesse V	Rotation Ω axe $(A,\vec{z})$ fixe ; $AG = R$
$T(S/R_0) = \frac{1}{2}MV^2$	$T(S/R_0) = \frac{1}{2}MR^2\Omega^2 + \frac{1}{2}I_{zz}^G\Omega^2$ $T(S/R_0) = \frac{1}{2}\Omega^2 I_{zz}^A$
Translation + Rotation : Somme des Ec des mvt indépendants	

Puissance

Puissance des actions extérieures

$$P(\bar{S} \to S/R_0) = \{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\}\{\mathcal{V}(S/R_0)\}\ \forall P$$

$$P(\bar{S} \to E/R_0) = \sum_{i=1}^{N} P(\bar{S} \to S_i/R_0)$$

$$\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_A(\vec{R})} \end{Bmatrix}_A . \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(A,S/R_0) \end{Bmatrix}_A$$

$$\vec{R}.\vec{V}(A,S/R_0) + \overrightarrow{M_A(\vec{R})}.\vec{\Omega}(S/R_0)$$

Puissance d'inter efforts

$$P(S_i,S_j) = P(S_j,S_i) = \{\mathcal{T}_{S_i\to S_j}\}\{\mathcal{V}(S_j/S_i)\}$$

$$P_i(E) = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} P(S_i,S_j)$$

$$P(S_i,S_j) = P(S_i \to S_j/R_0) + P(S_j \to S_i/R_0)$$

Liaisons parfaites : $P(S_i \to S_j/R_0) = -P(S_j \to S_i/R_0) \neq 0$

Théorème de l'énergie cinétique

Enoncé

$$\frac{dT(US_i/R_g)}{dt} = P_{ext} + P_{int}$$

On isole US_i

R_g : Référentiel Galiléen

$$P_{ext} = P(\overline{US_i} \to US_i/R_g)$$
$$P_{int} = P_i(US_i)$$

Rôle

Il permet d'obtenir une relation du mouvement d'un point de vue différent : celui des actions exerçant un travail.

Conséquences (liaison énergétiquement parfaites

Liaison parfaite
Pas d'action spécifique
entre i et j

$\Rightarrow P_{diss} = 0$

$P_{diss} = P_{int}$ si bâti isolé

$P_{diss} = P_{int} + P_{ext}(L_{ext} \to S/R_0)$ sinon

Régime stationnaire $\Rightarrow \frac{dT(US_i/R_g)}{dt} = 0$

Masses et inerties négligées

$T(S/R_0) = 0$

Conclusion

On utilise souvent ce théorème afin d'obtenir assez vite une loi entrée/sortie en efforts en régime permanent.

Outils

Calcul d'inertie ou de masse équivalente

Inertie équivalente ramenée à l'arbre d'entrée

$$T(US_i/R_0) = \frac{1}{2} J_{eq}{}^{e} \omega_e{}^2$$

Inertie équivalente ramenée à l'arbre de sortie

$$T(US_i/R_0) = \frac{1}{2} J_{eq}{}^{s} \omega_s{}^2$$

Masse équivalente

$$T(US_i/R_0) = \frac{1}{2} M_{eq} V^2$$

Notion de rendement

Bilan des puissances

Considérons un système isolé auquel sont appliqués des efforts extérieurs en entrée et en sortie

$$Régime\ stationnaire: \frac{dT(US_i/R_g)}{dt} = 0$$

$$Liaisons\ parfaites: P_{diss} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad P_{entrante} = P_{sortante}$$

Rendement uniquement en régime stationnaire

$$\eta = \frac{P_{sortante}}{P_{entrante}}$$

$$\eta = \frac{P_n}{P_1} = \frac{P_n}{P_{n-1}} \dots \frac{P_2}{P_1} = \prod_{i=1}^{n-1} \eta_i$$

$$P_{diss} = -(1-\eta) P_{entrante}$$

Relations bilan

Relation cinématique e/s : imposée par le mécanisme supposé indéformable -> ne peut évoluer

Relation F/C d'e/s : peut évoluer en fonction du rendement et des accélérations.

La relation issue du TEC doit conduire à l'obtention de la relation entre efforts/couples connaissant la relation cinématique entrée/sortie et non l'inverse, sauf cas particulier : régime permanent & rendement égal à 1.

Une manière simple d'obtenir la relation statique e/s d'un mécanisme est de déterminer la relation cinématique e/s et d'utiliser le TEC en liaisons parfaites et régime stationnaire.

Rq : Une résolution cinématique est plus simple qu'une résolution statique !

Choix du théorème à utiliser

Objectifs des deux théorèmes

Obtenir des actions de liaisons
Obtenir des équations différentielles du mouvement liées aux actions entrée/sortie

PFD	TEC ou TEP
Obtention de 6 équations par isolement **Equations donnant les actions à travail nul** **Equations différentielles du mouvement sur** la/les équation(s) de mobilité donnant les actions à travail non nul et les lois d'accélérations des pièces On obtient toutes les actions du système, et donc la loi entrée/sortie en effort Application lourde s'il y a beaucoup de solides Difficultés d'applications s'il y a des pertes Penser à ne déterminer que l'équation utile au problème (ex : Moment suivant $\vec{z}$)	**Equations différentielles du mouvement sur** la/les équation(s) de mobilité donnant les actions à travail non nul et les lois d'accélérations des pièces On obtient en particulier la relation entrée/sortie en effort Impossibilité de déterminer les actions à travail non nul Très adapté aux problèmes à 1 DDL Fonctionne très bien qu'il y ait peu ou beaucoup de solides