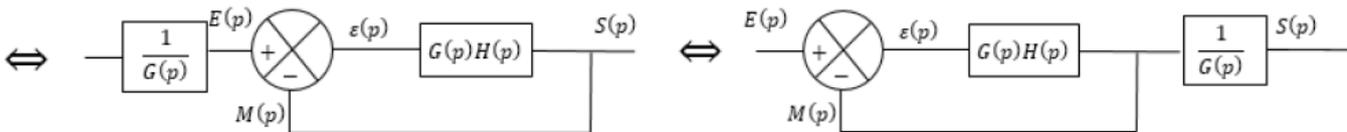
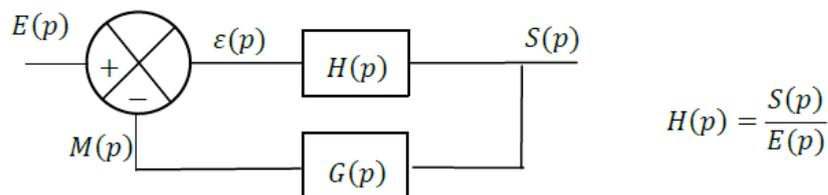


# SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS ET INVARIANTS

## Synthèse

### Performances des systèmes asservis



	1° ordre	2° ordre
Seul	$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$	$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$
Bouclé Retour unitaire	$H(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF} p}$ $K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}$ $\tau_{BF} = \frac{\tau_{BO}}{1 + K_{BO}}$	$H(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2z_{BF}}{\omega_{0BF}} p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$ $\omega_{0BF} = \omega_{0BO} \sqrt{1 + K_{BO}}$ $K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}$ $z_{BF} = \frac{z_{BO}}{\sqrt{1 + K_{BO}}}$

Stabilité	Rapidité	Précision	Allure de la réponse
Pôles FTBF Revers FTBO $\Delta\varphi - \Delta G$	$tr_{5\%}$ $t_m$ $\omega_{c_0} - BP_0$	$\varepsilon_s$ $\varepsilon_v$ Influence perturbations	2° ordre $z$ & $D_0\%$

### Précision

Ecart des systèmes Au comparateur	
Retour non unitaire	Retour unitaire
$\varepsilon(t) = e(t) - m(t)$	$\varepsilon(t) = e(t) - s(t)$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p)$$

$$E(p) = \frac{a}{p^\beta} \quad ; \quad \beta > 0$$

$$= K_{BO} \frac{FTBO(p)}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m)}$$

$\alpha > 0 \quad ; \quad \alpha + m > n$

$e(t)$	$E(p)$	Ecart au comparateur
$au(t)$	$\frac{a}{p}$	$\varepsilon_s$ ou « Ecart statique »
$atu(t)$	$\frac{a}{p^2}$	$\varepsilon_v$ ou « Ecart de traînage »

$\alpha$  : classe de la FTBO - Nombre d'intégrations

$\alpha + m$  : ordre de la FTBO - Degré du dénominateur

Soit :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}$$

Nature de l'entrée		Classe du système			
$e(t)$ Entrée système	$E(p)$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha > 2$
Dirac $e(t) = a\delta(t)$	$a$	0	0	0	0
Echelon $e(t) = Eu(t)$	$\frac{E}{p}$	$\frac{E}{1 + K_{BO}}$	0	0	0
Rampe $e(t) = atu(t)$	$\frac{a}{p^2}$	$\infty$	$\frac{a}{K_{BO}}$	0	0

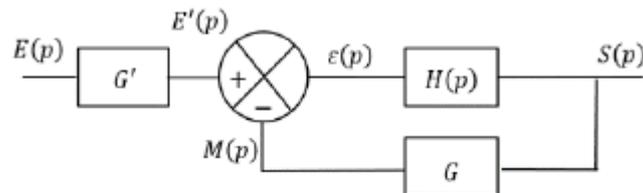
### Conclusions

$\nearrow$  Classe  $\Rightarrow \nearrow$  Précision  
 Si  $\varepsilon$  fini,  $\nearrow K_{BO} \Rightarrow \nearrow$  Précision  
 Si Classe 0,  $\varepsilon_v = \infty$

### Remarques

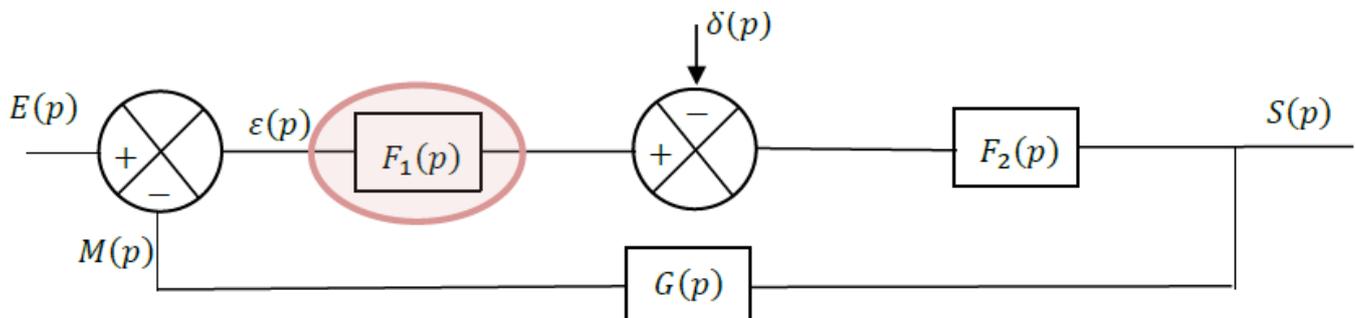
Une intégration  
 $\Rightarrow$  Ecart statique nul et Ecart de traînage fini

### Choix du gain $G'$ - Systèmes à retour $G$



$\alpha = 0$	$\alpha \geq 1$
$G' = \frac{1 + K_{BO}}{K_{CD}}$	$G' = G$

### Perturbation



$\delta(p)$	$\varepsilon_s^\delta = 0$ si $F_1(p)$ est de classe
Impulsion	$\geq 0$
Echelon	$\geq 1$
Rampe	$\geq 2$

### Conclusions

La classe de la partie en amont d'une perturbation influence l'écart qu'elle engendre  
 Une intégration en amont d'une perturbation de type impulsion ou échelon annule son effet  
 Si  $\varepsilon_s^\delta \neq 0 : \nearrow K \text{ de } F1 \Rightarrow \searrow \varepsilon_s^\delta$

## Rapidité

Tableau bilan

	1° ordre	2° ordre
Seul	$tr_{5\%} = 3\tau$ $\omega_c = \omega_0$ $\omega_{c0} = \omega_0 \sqrt{K^2 - 1}$	$\omega_0 t_m \approx 3$ $tr_{5\%} \omega_0 = k(z)$ $k(0,7) = 3 - \text{Plus rapide}$ $k(1) = 5 - \text{Plus rapide sans dépassement}$ $\omega_c = \omega_0 \sqrt{\sqrt{(2z^2 - 1)^2 + 1} - (2z^2 - 1)}$ $\omega_{c0} = \omega_0 \sqrt{\sqrt{(2z^2 - 1)^2 + (K^2 - 1)} + (1 - 2z^2)}$
	$\nearrow \omega_0 \Leftrightarrow \nearrow$ Rapidité	
Bouclé Retour unitaire	$K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}$ $\tau_{BF} = \frac{1}{\omega_{0BF}} = \frac{\tau_{BO}}{1 + K_{BO}}$	$\omega_{0BF} = \omega_{0BO} \sqrt{1 + K_{BO}}$ $K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}$ $z_{BF} = \frac{z_{BO}}{\sqrt{1 + K_{BO}}}$
	$\nearrow K_{BO} \Rightarrow \nearrow \omega_{0BF} \Rightarrow \nearrow t_m \Leftrightarrow \nearrow$ Rapidité  $\nearrow K_{BO} \Rightarrow (\nearrow \omega_{c0BO} \Leftrightarrow \nearrow BP_{oBO})$ $\nearrow K_{BO} \Rightarrow \nearrow \omega_{0BF} \Rightarrow \nearrow (\omega_{c0BF} \Leftrightarrow BP_{oBF})$  Attention : $\nearrow K_{BO} \Rightarrow tr_{5\%}$ tant que $z_{BF} \geq 0,7$	

## Stabilité

### Définition

Système stable

Entrée bornée  $\Rightarrow$  Sortie bornée

Asymptotiquement stable : converge

### Condition fondamentale de stabilité

Système stable

$Re(P\text{ôles FTBF}) < 0$

### Critères de stabilité

**Algébrique** : on regarde le signe de la partie réelle des pôles de la **FTBF**

**Graphique** : critère du revers et définition des marges de la **FTBO**

## Critère de revers :

Un système asservi est stable en BF si, en décrivant le lieu de transfert de la BO dans le sens des pulsations  $\omega$  croissantes dans le plan de

- Bode : à la pulsation
    - o Et à  $\omega_{c_0}/G_{dB} = 0, \varphi > -180^\circ$
    - o Et à  $\omega/\varphi = -180^\circ, G_{dB} < 0$
  - Nyquist : le point critique est à gauche
  - Black : le point critique est à droite
- Cas particuliers dans Bode : se ramener à Black*

## FTBO :

Marge de gain	Marge de phase	
$\Delta G = -20 \log  H(j\omega_{-180^\circ}) $ $\arg H(j\omega_{-180^\circ}) = -180^\circ$  Marge de gain minimale : 10 à 15 dB	$\Delta\varphi = \arg H(j\omega_{c_0}) - (-\pi) = \pi + \arg H(j\omega_{c_0})$	
	1° ordre	Second ordre
	Existence de $\omega_{c_0} \Leftrightarrow K > 1$	
	$\omega_{c_0} = \omega_0 \sqrt{K^2 - 1}$	$\omega_{c_0} = \omega_0 \sqrt{\sqrt{(2z^2 - 1)^2 + (K^2 - 1)} + (1 - 2z^2)}$

## Conclusion :

### Conclusions

$\nearrow K_{BO} \Rightarrow \nearrow \omega_{c_0} \Rightarrow \searrow \varphi_{\omega_{c_0}} \Rightarrow \searrow \Delta\varphi \Rightarrow \searrow$  Stabilité

### Remarque

Vérifier la stabilité d'un système avant d'utiliser le théorème de la valeur finale

### Stabilité 1° et 2° ordre en BF

1° ou 2° ordre en BF : stable en BF grâce aux pôles  
 1° ou 2° ordre en BO : Stable en BF grâce au Revers

## Identification de la réponse

Si  $z < 1$

$$D_{1\%} = e^{\frac{-\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$$

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$$

$$z_{BF} = \frac{z_{BO}}{\sqrt{1+K_{BO}}} < z_{BO}$$

## BILAN

### Stabilité

- Un système est stable si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle négative (*FTBF*)
- Un système est stable si la première colonne du tableau de Routh contient des coefficients tous du même signe (*FTBF*)
- Un système est stable si le lieu de Black de sa boucle ouverte (*FTBO*) passe à droite du point critique pour les  $\omega$  croissants.
- Pour garantir une stabilité et un amortissement convenable malgré les imperfections, il est nécessaire de prévoir des marges de stabilité: les marges de gain et de phase. Ces marges agissent essentiellement sur les régimes transitoires.

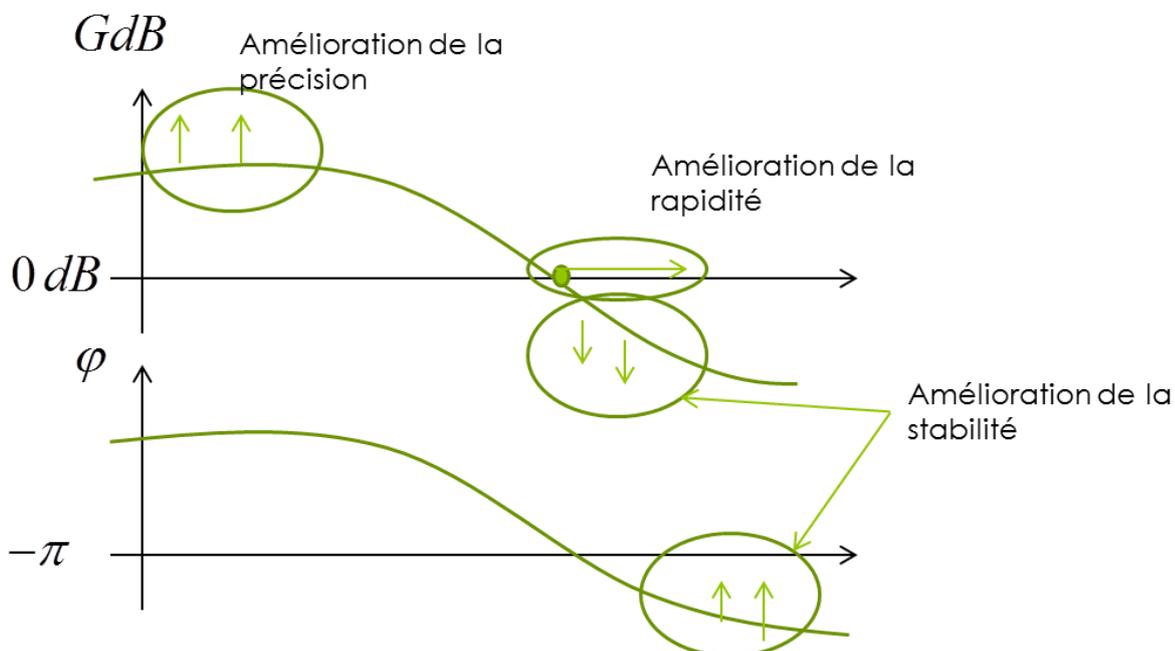
### Rapidité

- Aptitude du système à suivre des entrées rapidement variables ou à réagir efficacement aux perturbations. Elle est caractérisable par la bande passante de la boucle. (pulsation de coupure à  $0\text{ dB}$ ).
- Calcul du temps de réponse à 5 %
- Détermination de la bande passante
- Pour  $K$  élevé, l'accroissement du gain de boucle accroît la bande passante et en conséquence la rapidité du système.

### Précision

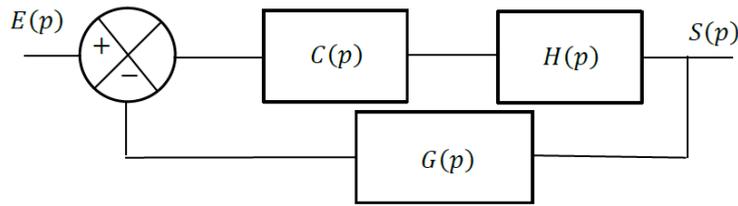
- Importance de la classe du système (nombre d'intégrateurs purs).
- Elle est caractérisée par l'erreur en régime permanent.
- Elle augmente avec le gain de boucle.

En FTBO on a :



## Correction des systèmes asservis

### Correcteurs classiques



Corrections classiques	$C(p)$	Stabilité	Précision	Rapidité
Proportionnelle	$C(p) = K > 1$	↘	↗	↗ ( $\Delta t_{r5\%}$ )
Intégrale	$C(p) = \frac{1}{p}$	↘	↗	↘
Dérivée	$C(p) = p$	↗	↘	↗

### Correcteurs à action localisée

#### Retard de phase

$$C(p) = \frac{a(1 + Tp)}{1 + aTp} \quad ; \quad a > 1$$

Objectif

↗ Gain aux BF

Réglage afin de retarder la phase en BF

Résultats : ↗ Gain statique  $\Leftrightarrow$  ↗ **Précision**  
Sans changer  $\Delta\varphi$

#### Avance de phase

$$C(p) = \frac{1 + aTp}{1 + Tp} \quad ; \quad a > 1$$

Objectif

↗ Phase de  $\theta$  à  $\omega_{c0}$

Réglage tel que :

$$a = \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \quad \varphi_{max} = \sin^{-1} \left( \frac{a - 1}{a + 1} \right)$$

$$T = \frac{1}{\omega_{c0} \sqrt{a}} \quad \omega_{max} = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$

Résultats : ↗  $\Delta\varphi \Leftrightarrow$  ↗ **Stabilité**

