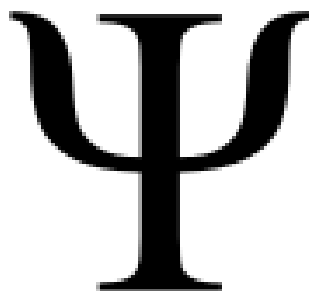


MATHEMATIQUES PSI LYCEE ARAGO PARTIE 1



- 1. Nombres Complexes
- 2. Calculs algébriques

ALGEBRE

- 3. Matrices
- 4. Polynômes
- 5. Espaces vectoriels
- 6. Applications linéaires
- 7. Rang
- 8. Déterminant
- 9. Compléments d'algèbre linéaire
- 10. Diagonalisation, Trigonalisation
- 11. Projecteurs et symétries

LEGENDE

♠ Erreur fatale $\boxed{1 + \frac{\sin x}{n} = 7}$

★ Niveau de difficulté des exercices.

♡ Exercice/Proposition/Méthode incontournable.

1. Nombres Complexes

I - Conjugaison

Définition Soient a et b deux réels et soit $z = a + ib$.

On appelle conjugué de z le nombre noté $\bar{z}$ et défini par : $\bar{z} = a - ib$.

Propriété

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad \overline{zz'} = \bar{z} \bar{z'} \quad \forall (z, z') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \quad \overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}} \quad \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$$

II - Module d'un nombre complexe

Définition Soient a et b deux réels et soit $z = a + ib$.

On appelle module de z le nombre noté $|z|$ et défini par : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Propriété

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad z\bar{z} = |z|^2 \quad |zz'| = |z| |z'| \quad \forall (z, z') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \quad \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$$

Inégalité triangulaire $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$

III - Nombres complexes de module 1

Notation Pour tout réel θ on pose : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Propriété Pour tout θ, θ' réels :

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \sin(\theta) \quad |e^{i\theta}| = 1 \quad e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \quad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

Formule de Moivre $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

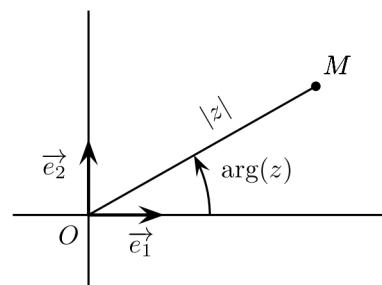
Formule d'Euler $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

IV - Arguments d'un nombre complexe non nul

Propriété et définition Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ il existe $\theta \in \mathbb{R}$ unique modulo 2π tel que $z = |z|e^{i\theta}$.
On dit que θ est un argument de z et on note : $\arg(z) = \theta \bmod (2\pi) = \theta[2\pi]$.

Interprétation géométrique On munit le plan usuel d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et soit M le point du plan d'affixe z .

Le module de z est égal à la distance OM et un argument de z est une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$.



V - Racines n -ièmes de l'unité

Dans tout ce paragraphe, n est un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Définition Les racines n -ièmes d'un complexe a sont les complexes z tels que $z^n = a$.

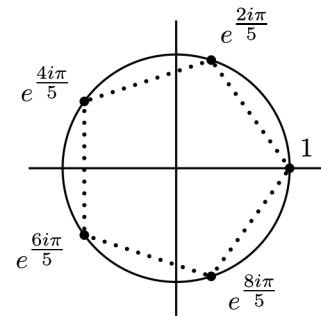
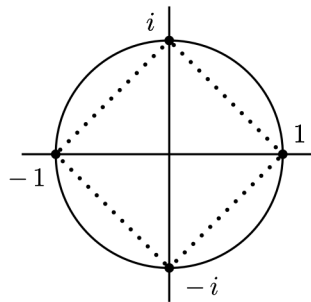
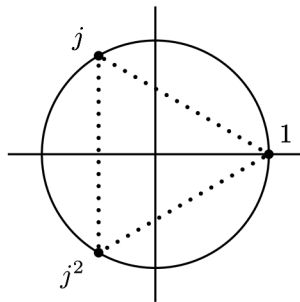
Notation On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ièmes de 1, c'est-à-dire $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}; z^n = 1\}$.

Théorème Pour tout complexe z , on a :

$$z^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

Exemples

$$\bullet \mathbb{U}_3 = \{1; j; j^2\} \text{ avec } j = e^{2i\pi/3} \quad \bullet \mathbb{U}_4 = \{1; i; -1; -i\} \quad \bullet \mathbb{U}_5 = \{1; e^{2i\pi/5}; e^{4i\pi/5}; e^{6i\pi/5}; e^{8i\pi/5}\}$$



Propriété La somme des racines n -ièmes de l'unité est nulle.

Démonstration

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}} \right)^k = \frac{1 - \left(e^{\frac{2i\pi}{n}} \right)^n}{1 - e^{2i\pi/n}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{2i\pi/n}} = 0$$

Exemple $1 + j + j^2 = 0$

Théorème Soit a un complexe non nul.

On écrit a sous forme exponentielle : soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $a = re^{i\theta}$.

Le nombre a admet exactement n racines n -ièmes, à savoir : $\sqrt[n]{r}e^{i\theta/n}e^{2ik\pi/n}$ avec $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

Démonstration Pour tout complexe z , on écrit :

$$z^n = a \Leftrightarrow \frac{z^n}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{z^n}{re^{i\theta}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{\sqrt[n]{r}e^{i\theta/n}} \right)^n = 1 \Leftrightarrow \left(\exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \frac{z}{\sqrt[n]{r}e^{i\theta/n}} = e^{2ik\pi/n} \right)$$

Cas particulier $n = 2$: Un nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées.

Chapitre 1 : Nombres Complexes

Compétences

- ★ Savoir trouver la partie réelle et la partie imaginaire d'un produit ou d'un quotient
- ♠ Dire que la partie réelle d'un produit (ou d'un quotient) est le produit (le quotient) des parties réelles. Par exemple $Re(2ie^{i\theta}) = 2\cos(\theta)$
- ★ Savoir trouver le module d'un nombre complexe.
- ★ Savoir qu'un nombre complexe de module 1 s'écrit $e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.
- ★★ Savoir faire de l'angle moitié. Par exemple $e^{i\theta} + 1 = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$.
- ★★ Savoir les formules d'Euler et de Moivre. Par exemple : $\cos^n(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n$.
- ★★ Connaître la formule des racines nièmes de l'unité et savoir que leur somme est nulle.
- ★★ Savoir utiliser les racines nièmes. Par exemples les racines de $P(X) = (X+1)^n - 1$ sont les nombres $e^{2ik\pi/n} - 1$ pour $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.
- ♠♠ Utiliser des inégalités avec des nombres complexes. Par exemple $e^{i\theta} \geq 0$ ou $e^{i\theta} \leq 1$...

1 Manipuler parties réelle et imaginaire, module et argument

Exercice 1.1.1 Oral ENTPE-EIVP PSI 2019★

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier $(1+i)^n + (-1+i)^n + (1-i)^n + (-1-i)^n$.

Exercice 1.1.2 Oral Mines Telecom PSI 2021 (Kenzi)★

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $e^{ni\pi/4} + e^{-ni\pi/4} + e^{3ni\pi/4} + e^{-3ni\pi/4} = 0$ si n n'est pas un multiple de 4 et $e^{ni\pi/4} + e^{-ni\pi/4} + e^{3ni\pi/4} + e^{-3ni\pi/4} = 4(-1)^p$ si $n = 4p$ avec $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.1.3 Oral Mines Telecom PC 2021 (Louise)★

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a| = |b| = 1$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $\frac{z + ab\bar{z} - a - b}{a - b}$ imaginaire pur.

Exercice 1.1.4 Oral CCINP 2018 ★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner le reste de la division Euclidienne de $P_n = \prod_{k=1}^n (\sin(k\pi/n)X + \cos(k\pi/n))$ par $X^2 + 1$.

Exercice 1.1.5★★

Soit x un nombre réel. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$. En déduire que $\cos(\pi/10) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Exercice 1.1.6 CCINP

Donner une racine cubique de $1+i$.

2 Manipuler l'angle moitié

Exercice 1.2.1

1. Donner la factorisation de $\cos p + \cos q$ à l'aide des nombres complexes.
2. Factoriser $\sin(2x) - \sin(4x)$ à l'aide des complexes.

3 Manipuler le binôme avec des complexes

Exercice 1.3.1★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1}$.

En écrivant $z = (1+i)^{2n}$ sous sa forme trigonométrique donner les valeurs des sommes S_n et T_n .

Exercice 1.3.2★★

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $S_0 = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots$, $S_1 = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots$, $S_2 = \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots$. Calculer ces trois sommes.

Exercice 1.3.3 *Extrait Oral Centrale-Oral ENS*★★

Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sin(x) \neq 0$ on a

$$\sin((2m+1)x) = (\sin(x))^{2m+1} \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k (\cotan(x))^{2m-2k}$$

4 Manipuler les racines n-ièmes de l'unité

Exercice 1.4.1★

Soit $n \geq 2$. Factoriser $X^n - 1$ et $X^n + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 1.4.2★★ *Oral CCINP*

Trouver les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+i}{1-i}$

Exercice 1.4.3 *Oral CCINP*★★★

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = e^{i\pi/3}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1$.

Exercice 1.4.4★★

1. Résoudre l'équation $z^5 + 1 = 0$ en exprimant les solutions sous forme trigonométrique.
2. Déterminer un polynôme Q telle que $z^5 + 1 = (z+1)Q(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
3. En posant $X = z + \frac{1}{z}$ résoudre l'équation $Q(z) = 0$.
4. Déterminer enfin l'expression de $\cos \frac{\pi}{5}$ sous la forme $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$ avec a, b, c, d entiers relatifs.

Exercice 1.4.5★★ *Oral Mines Telecom*

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit $w = e^{2i\pi/n}$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
3. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} |w^k - 1|^2$ en fonction de n .
4. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} |w^k - 1| = 2 \cotan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.
5. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (z + w^k)^n$ en utilisant la formule du binôme.

Exercice 1.4.6★★ *Oral Mines Ponts 2018*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser sur $\mathbb{C}$ le polynôme $P_n = X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1$.

En déduire, en utilisant $P_n(1)$, une expression simple $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$.

Exercice 1.4.7★★★ *Oral Mines Ponts 2019*

Soit $n \geq 2$. On pose $P_n = (X+i)^n - (X-i)^n$. Déterminer les racines complexes de P_n , montrer qu'elles sont réelles. Quel est le terme (degré et coefficient) dominant de P_n ?

En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n-1} \cotan(k\pi/n)$ et celle de $\sum_{k=1}^{n-1} \cotan(k\pi/n)$.

Exercice 1.4.8 *Oral Centrale Oral CCINP 2015 PC*★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in]0; \pi[$. On pose $P_n(X) = (X+1)^n - e^{2ina}$. Donner une expression simple $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 1.4.9★★★ *Oral Mines Ponts*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $Q_n(X) = \frac{1}{2i} \left(\left(1 + \frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1} \right)$.

Déterminer les racines de Q_n puis démontrer que $Q_n(X) = X \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{X^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right)$.

2. Calculs algébriques

I - Sommes

Propriété Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Propriété $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a, b \in \mathbb{C}, a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

Cas particuliers $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ et $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Somme géométrique

Pour tous $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 \leq n_2$ et pour tout $q \in \mathbb{C}$ tel que $q \neq 1$ on a

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} q^k = q^{n_1} \frac{1 - q^{n_2 - n_1 + 1}}{1 - q} = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

II - Sommes doubles

Propriété Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(a_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$ une famille de nombres complexes indexée par $\llbracket 0; n \rrbracket \times \llbracket 0; n \rrbracket$

- On a $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n a_{ij}$. On note ce nombre $\sum_{0 \leq i, j \leq n} a_{ij}$
- On a $\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j a_{ij}$. On note ce nombre $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} a_{ij}$
- On a $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{j-1} a_{ij}$. On note ce nombre $\sum_{0 \leq i < j \leq n} a_{ij}$

III - Coefficients binomiaux

Définition On pose $0! = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = \prod_{k=1}^n k$

Définition Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Si $k \notin \llbracket 0; n \rrbracket$ on pose $\binom{n}{k} = 0$.

Interprétation Ce réel représente le nombre de possibilités de choisir simultanément k éléments parmi n .

Propriété Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$

Propriété Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Propriété Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a : $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1}$

Formule du triangle de Pascal

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, on a : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4
n=0	1				
n=1	1	1			
n=2	1	2	1		
n=3	1	3	3	1	
n=4	1	4	6	4	1

Formule du BINOME de Newton

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Exemples $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k = (1+a)^n$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

IV - Inégalités usuelles**Propriété**

- $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$ (preuve par inégalité des accroissements finis)
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$ (preuve par étude de fonction)
- $\forall x \in]-1; +\infty[, \ln(1+x) \leq x$
- $\forall x \in [0; 1], x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ (preuve par identité remarquable)
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ (preuve par identité remarquable)
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, |ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ (car $|a|^2 = a^2$ et $|b|^2 = b^2$)

Compétences

- ★ Connaître la formule du binôme et la reconnaître. Exemple $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$.
- ★ Connaître et reconnaître la somme géométrique. Exemple :

$$\text{si } \theta \neq 0[2\pi] \quad \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right)$$

- ★ Connaître la somme géométrique même si la somme ne débute pas à l'indice $k=0$.

♠♠ Sortir "du k" de la somme. Par exemple : $\sum_{k=0}^n kq^k = k \sum_{k=0}^n q^k = k \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

- ★ Savoir démontrer les inégalités usuelles (via une étude de fonctions)

★★ Savoir démontrer $|\sin(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ via l'inégalité des accroissements finis.

★★★ Savoir inverser les indices dans une somme double.

Chapitre 2 Calculs algébriques

1 Manipuler les sommes finies et les produits finis

Exercice 2.1.1

Soit $n \geq 2$. Simplifier $\sum_{k=1}^{n+1} (-3)^{k+1}$ puis $\sum_{p=2}^n \ln \frac{p^2}{(p-1)(p+1)}$.

Exercice 2.1.2

Donner la monotonie de la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.1.3★

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$. On pourra séparer les indices pairs et impairs.

Exercice 2.1.4★

Soit $n \geq 2$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Simplifier $\sum_{1 \leq i < j \leq n} i$. Simplifier aussi $\sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n \frac{j}{i}$. Simplifier enfin $\sum_{q=0}^n \sum_{p=q}^n \binom{p}{q} \alpha^q$.

Exercice 2.1.5★♡

Soit $n \in \mathbb{N}$. Ecrire $\prod_{k=0}^n (2k+1)$ sans le symbole produit.

Exercice 2.1.6★

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. En s'aidant de $f : x \mapsto (1+x)^n$ simplifier les sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} ; \quad S_2 = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} ; \quad S_3 = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k \binom{n}{k}$$

Exercice 2.1.7★

Soient $n \geq 3$. En s'aidant de $g : x \mapsto \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} e^{kx}$, donner une forme simplifiée de $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^2$.

Exercice 2.1.8★★

Dans cet exercice on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier la quantité $H_{2n} - H_n$ en l'écrivant à l'aide d'un seul symbole $\sum$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{2^n} \geq \frac{n}{2} + 1$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=1}^n H_k = (n+1)H_n - n$.

3. Montrer, sans récurrence et sans utiliser la formule précédente, que pour tout $n \geq 2$, $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{j-i} = \sum_{k=1}^{n-1} H_k$.

2 Résoudre les systèmes linéaires avec la méthode de Gauss

Exercice 2.2.1

Résoudre le système suivant
$$\begin{cases} x + y + z + t = 10 \\ x - y + z + t = 6 \\ x + y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 4 \end{cases}$$

Exercice 2.2.2★

Résoudre le système suivant en fonction du complexe m .
$$\begin{cases} (1-m)x + 2y - z = 0 \\ -2x - (3+m)y + 3z = 0 \\ x + y - (2+m)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2.2.3 ★ Oral Mines Telecom PSI 2021 (Louis)

Résoudre le système suivant en fonction du réel m
$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

3. Matrices

- $\mathbb{K}$ désigne ici $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices de taille $n \times p$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices de taille $n \times n$.

I - Produit matriciel

Définition

Soient $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = [b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On pose $C = AB = [c_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ avec :

$$\forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket, c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

Exemple ♡ Pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, soit $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient de la ligne i et de la colonne j qui est égal à 1. On a alors :

$$\forall i, j, k, \ell \in \llbracket 1; n \rrbracket, E_{i,j} E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell} \quad \text{avec} \quad \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Le symbole $\delta_{j,k}$ s'appelle le symbole de Kronecker.

Remarque

- Le produit matriciel n'est pas commutatif : on peut avoir $AB \neq BA$.
- **Attention!** On peut aussi avoir $AB = 0_n$ avec $A \neq 0_n$ et $B \neq 0_n$.

Formule du BINOME Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$ alors :

$$\forall m \in \mathbb{N}, (A + B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

Remarque Par convention $A^0 = I_n$ avec I_n la matrice identité de taille n .

II - Transposition

Définition Soit $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle transposée de A la matrice $A' = [a'_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket, a'_{ij} = a_{ji}$.

Cette matrice est notée ${}^t A$ ou A^T .

Propriété

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), (A^T)^T = A$
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, (\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), (AB)^T = B^T A^T$

Définition

- On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est symétrique si $A^T = A$.
- On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique si $A^T = -A$.
- L'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.
- L'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Propriété Si $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice antisymétrique, alors, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_{ii} = 0$.
Ainsi la diagonale est nulle pour une matrice antisymétrique.

Remarque ♡ Toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la somme d'une matrice symétrique $\frac{M + M^T}{2}$ et d'une matrice antisymétrique $\frac{M - M^T}{2}$.

III - Matrices inversibles

Définition Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. Auquel cas la matrice B est unique ; elle est appelée matrice inverse de A et est notée A^{-1} .

Notation L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$ et est appelé "groupe linéaire d'ordre n ".

Propriété Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $A \in GL_n(\mathbb{K})$ (ii) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n$ (iii) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n$

Propriété

- Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors la matrice A^{-1} est aussi inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, alors la matrice AB est aussi inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors la matrice A^T est aussi inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Propriété Une matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Auquel cas :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Méthode

Pour déterminer l'inverse d'une matrice A de $GL_n(\mathbb{K})$, on peut résoudre l'équation $AX = Y$ où X et Y sont des vecteurs colonnes (l'inconnue étant X). L'unique solution $X = A^{-1}Y$ permet ensuite de connaître A^{-1} .

Exemple Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On montre facilement que A est inversible car $\det(A) \neq 0$ (chapitre 8).

Ensuite, pour tout $(y_1; y_2; y_3) \in \mathbb{R}^3$, on résout le système : $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = y_2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$

Après calculs, on obtient $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = -y_1 + y_3 \\ x_3 = y_1 + y_2 - 2y_3 \end{cases}$ d'où $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

IV - Matrices blocs

Je vais travailler dans ce paragraphe avec des matrices de 4 blocs mais tout cela se généralise à des matrices possédant bien plus de blocs.

Définition Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$.

On définit la matrice bloc $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+r, p+q}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en écrivant côte à côte le contenu des matrices A, B, C, D .

Cette matrice est dite diagonale par blocs si B et C sont nulles et A et D sont carrées.

Cette matrice est dite triangulaire supérieure par blocs si C est nulle et A et D sont carrées.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est diagonale par blocs et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ est triangulaire par blocs.

Propriété Sous réserve que les tailles soient compatibles on a $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+E & B+F \\ C+G & D+H \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$$

Complément de cours : Chapitre 3 Matrices

Polynôme d'une matrice

Définition Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d \in \mathbb{K}[X]$. On pose

$$P(A) = a_0I_n + a_1A + \dots + a_dA^d$$

On dit que $P(A)$ est un polynôme en A (et on peut noter $P(A) \in \mathbb{K}[A]$).

Attention dans les calculs $A^0 = I_n$.

On dit que P est **annulateur** de A si $P(A) = 0_n$.

Application au calcul de l'inverse (sur des exemples) :

- Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 - 3A - I_3 = 0_3$ alors $A(A - 3I_3) = (A - 3I_3)A = I_3$ donc A est inversible et $A^{-1} = A - 3I_3$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est annulé par $X^2 + X$ et si A n'est pas une matrice diagonale alors A n'est pas inversible. En effet on a $A^2 + A = 0_n$. Si A est inversible alors en multipliant par A^{-1} on aurait $A + I_n = 0_n$ et donc A diagonale. C'est absurde.

Application au calcul des puissances (sur un exemple) : Fixons $n \in \mathbb{N}$.

- Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$ alors il est annulé par $X^2 - 3X + 2$ qui se factorise en $(X - 1)(X - 2)$.
- La division Euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ donne l'existence de $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tels que
(*) $X^n = Q(X)(X^2 - 3X + 2) + R(X)$ avec $\deg(R) < 2$.
- Appliqué en A cela donne $A^n = R(A)$.
- Le reste s'écrit $a_nX + b_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.
- Avec la formule (*) évalué en 1 on a $1^n = 0 + a_n + b_n$. Évalué en 2 on a $2^n = 2a_n + b_n$.
- Ainsi $a_n = 2^n - 1$ et $b_n = 2 - 2^n$ et $A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3$.

Compétences

- ★★ Savoir la formule du produit matriciel. Par exemple si D est une matrice diagonale avec des coeff diagonaux tous distincts, savoir montrer avec la formule du produit que si $MD = DM$ alors M est diagonale.
- ★ Savoir calculer avec le binôme dans le cas de matrice qui commutent.
- ★ Savoir l'inverse d'une matrice de taille 2 ainsi que l'inverse d'un produit.
- ★ Savoir traduire les mots symétriques et antisymétriques.
- ♠ Ecrire que $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n a_{ii}b_{ii}$.

Chapitre 3 Matrices

1 Savoir calculer des puissances de matrices

Exercice 3.1.1★

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que I_2, A, A^2 est une famille liée. En déduire l'expression explicite de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.1.2★♡

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$ en utilisant la formule du binôme.

Indication : utiliser la matrice Attila

Exercice 3.1.3★ CCINP

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. On suppose que $M + M^{-1} = I_n$. Calculer $M^k + M^{-k}$ pour $k = 3, 5$ et 7 .

Exercice 3.1.4★ CCINP

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que $A^2 = A^T$. Trouver un polynôme annulateur de A de degré 3.

Exercice 3.1.5★ CCINP

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 tel que $P(0) = 1$ et $AB = P(A)$.

Montrer que A est inversible. Montrer aussi que A et B commutent.

2 Savoir calculer l'inverse d'une matrice

Exercice 3.2.1

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que I_2, A, A^2 est une famille liée. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} .

Exercice 3.2.2★

1. Avec la méthode de Gauss trouver l'inverse de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $a_{i,j} = \min(i, j)$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$
2. Avec la méthode de résolution de système trouver l'inverse de A définie en Q1.

Exercice 3.2.3★★

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $J^p = 0_n$. En effectuant **au brouillon** une analogie avec les sommes géométriques montrer que $I_n + J$ et $I_n - J$ sont inversibles et exprimer leurs inverses à l'aide des puissance de J .

Exercice 3.2.4★★

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}^*$. On note $S = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$ et on suppose $S \neq -1$ Soient $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$.

Résoudre le système suivant d'inconnues $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} (1 + a_1)x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n &= y_1 \\ x_1 + (1 + a_2)x_2 + x_3 + \dots + x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + (1 + a_n)x_n &= y_n \end{cases}$$

Exercice 3.2.5★★

Soit U une matrice colonne de taille n et V une matrice ligne de taille n . On pose $A = I_n + UV$. En s'aidant de A^2 donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible.

Exercice 3.2.6★♡matrice à diagonale dominante

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$ pour tout i entre 1 et n .

Montrer que A est inversible on pourra considérer la coordonnée de module maximal dans $X \in \text{Ker}(A)$

3 Savoir manipuler les matrices blocs

Exercice 3.3.1★♡

Etudier l'inversibilité (et donner l'inverse le cas échéant) d'une matrice triangulaire par blocs de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

Exercice 3.3.2★★ CCINP

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $AB = BA$. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix}$.

1. Soient $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ semblables. Soit $R \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $R(U)$ et $R(V)$ sont semblables.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Ecrire $P(M)$ à l'aide de B , de $P(A)$ et de $P'(A)$.

Exercice 3.3.3★★ Oral CCINP 2021

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer $Q(B)$ en fonction de $Q(A)$.

Exercice 3.3.4★★ Oral CCINP PSI 2021 (Kenzi)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ on a $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$.

4 Calculs

Exercice 3.4.1★♡

Montrer que, si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\text{tr}(AM) = \text{tr}(BM)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $A = B$.

Exercice 3.4.2★♡

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $\text{tr}(A^T A) = 0$ alors $A = 0_n$. Est-ce vrai dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 3.4.3★♡

Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à coefficients diagonaux deux à deux distincts. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commute avec D . Montrer que A est diagonale.

Exercice 3.4.4★★ Oral CCINP et Mines Ponts PSI 2021

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ telle que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(AB) = f(BA)$. Montrer que f est proportionnelle à tr .

Exercice 3.4.5★★♡

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A est proportionnel à I_n .

Exercice 3.4.6★★ Ecrit Centrale PSI

On note χ_n l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0; 1\}$.

1. Donner tous les éléments de χ_2 .
2. Montrer que χ_2 engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3.4.7★ Extrait ORAL ENS PSI 2018

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ distincts. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $x, y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que $Ax = \lambda x$ et $A^T y = \mu y$. Montrer que $x^T y = 0$ (c'est à dire que x et y sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique).

Exercice 3.4.8★★ Oral Centrale PSI 2018

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit D une application de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $D(I_2) \neq D \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\forall A, B \in E, D(AB) = D(A)D(B)$

1. Montrer que si $A \in E$ est nilpotente alors $D(A) = 0$.
2. Montrer que $A \in E$ est inversible ssi $D(A) \neq 0$.

4. Polynômes

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Degré d'un polynôme

Définition Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$.

On appelle degré de P le nombre noté $\deg(P)$ et défini par :

$$\deg(P) = \max \{k \in \llbracket 0; n \rrbracket; a_k \neq 0\}$$

On appelle coefficient dominant de P le nombre a_d avec $d = \deg(P)$.

On dit que P est unitaire si son coefficient dominant est égal à 1.

Si P est le polynôme nul, alors on pose $\deg(P) = -\infty$.

Notation Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X]; \deg(P) \leq n\}$
En particulier, $\mathbb{K}_0[X]$ désigne l'ensemble des polynômes constants.

Propriété Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$, on a :

- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
- si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
- Si $\deg(P) \geq 1$ alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$

II - Division euclidienne

Définition Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

On dit que B divise A s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.

Auquel cas, on dit aussi que A est divisible par B ou que A est un multiple de B .

Théorème de division Euclidienne Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec B non nul.

Il existe un unique couple de polynômes $(Q; R)$ tel que :
$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

III - Formule de Taylor

Propriété : Formule de Taylor

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{K}_n[X], \forall a \in \mathbb{K}, P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

IV - Racines d'un polynôme

Définition Une racine d'un polynôme P est un nombre a tel que $P(a) = 0$.

Exemple Les racines de $X^2 + X + 1$ sont j et j^2 .

Propriété Un nombre a est racine d'un polynôme P si et seulement si $X - a$ divise P .

Définition Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant de degré n .

On dit que P est scindé s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et s'il existe $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - a_k)$.

Autrement formulé, on dit que P est scindé s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1.

Exemples $X^2 - 1$ et X^5 sont scindés dans $\mathbb{R}[X]$. $X^2 + 1$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ mais pas dans $\mathbb{R}[X]$.

Théorème Si P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, alors P admet au plus n racines comptées avec multiplicité.

Corollaire Si un polynôme P admet une infinité de racines, alors P est le polynôme nul.

Théorème de D'ALEMBERT-GAUSS

- Si P est un polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$, alors P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
- Tout polynôme non constant est scindé dans $\mathbb{C}[X]$.

V - Multiplicité d'une racine

Définition Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul et soit $a \in \mathbb{K}$ une racine de P .

On appelle multiplicité de a en tant que racine de P le plus grand entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X - a)^k$ divise P .

Vocabulaire :

- Si a est une racine de P de multiplicité 1, alors on dit que a est une racine simple de P .
- Si a est une racine de P de multiplicité 2, alors on dit que a est une racine double de P .
- Si a est une racine de P de multiplicité supérieure ou égale à 2, on dit que a est une racine multiple de P .
- Si a n'est pas une racine de P , alors la multiplicité de a est parfois définie comme étant égale à 0.

Propriété Le nombre a est une racine de P de multiplicité m si et seulement si :

$$P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

Exemples :

- Le nombre a est une racine simple de P si et seulement si $P(a) = 0$ et $P'(a) \neq 0$.
- Le nombre a est une racine multiple de P si et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$.
- Si $P(2) = P'(2) = 0$ et $P(3) = 0$ alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X - 2)^2(X - 3)Q(X)$.

Propriété Soit P un polynôme à coefficients réels et soit a un nombre complexe.

Si a est une racine de P , alors le conjugué $\bar{a}$ est aussi une racine de P .

De plus, la multiplicité de $\bar{a}$ en tant que racine de P est égale à la multiplicité de a en tant que racine de P .

VI - Polynômes de Lagrange

Définition Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ des réels ou des complexes distincts.

Pour chaque $i \in \{1, \dots, n+1\}$ on pose

$$L_i(X) = \frac{(X - x_1) \dots (X - x_{i-1})(X - x_{i+1}) \dots (X - x_{n+1})}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{n+1})} = \frac{\prod_{1 \leq k \leq n+1, k \neq i} (X - x_k)}{\prod_{1 \leq k \leq n+1, k \neq i} (x_i - x_k)}$$

On nomme ce polynôme le polynôme de Lagrange d'indice i associé aux points $x_1, \dots, x_{n+1}$.

Propriété *Démonstration à savoir faire*

- Pour tout $i \in \{1, \dots, n+1\}$, L_i est de degré n . De plus $L_i(x_i) = 1$ et $L_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$.

- Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $P(X) = \sum_{i=1}^{n+1} P(x_i) L_i(X)$. En particulier $1 = \sum_{i=1}^{n+1} L_i(X)$.

- $L_1, \dots, L_{n+1}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple Si on cherche tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(1) = 7$, $P(2) = 8$ et $P(3) = 10$.

On pose $L_1(X) = \frac{(X-2)(X-3)}{(1-2)(1-3)}$, $L_2(X) = \frac{(X-1)(X-3)}{(2-1)(2-3)}$ et $L_3(X) = \frac{(X-1)(X-2)}{(3-1)(3-2)}$.

On pose ensuite $P_0(X) = 7L_1(X) + 8L_2(X) + 10L_3(X)$. On a P_0 solution particulière du problème. Alors, si $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\begin{cases} P(1) = 7 \\ P(2) = 8 \\ P(3) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(1) = P_0(1) \\ P(2) = P_0(2) \\ P(3) = P_0(3) \end{cases} \Leftrightarrow 1, 2 \text{ et } 3 \text{ sont racines de } P - P_0$$

Ainsi

$$\begin{cases} P(1) = 7 \\ P(2) = 8 \\ P(3) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X], \quad P(X) - P_0(X) = (X-1)(X-2)(X-3)Q(X)$$

Exemple ♡♡ Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Soit $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$.

Soit $B = PSP^{-1}$ avec $S = \text{diag}(\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n})$.

On voit que $B^2 = A$. On dit que B est une racine carrée de A .

On peut montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $B = Q(A)$. En effet

- On considère, grâce aux polynômes de Lagrange, un polynôme Q vérifiant $Q(i) = \sqrt{i}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.
- On montre ensuite que $Q(A) = Q(PDP^{-1}) = PQ(D)P^{-1}$.
- On remarque pour finir que $Q(D) = S$ et donc que $Q(A) = B$.

Compétences

- ★ Savoir manipuler le degré d'une somme et d'un produit. Par exemple montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $XP'(X) + X(X-1)P''(X) \in \mathbb{R}_n[X]$.
- ♠ Dire que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $\deg(P) = n$.
- ★★ Savoir calculer une puissance de matrices avec une division Euclidienne par un polynôme annulateur.
- ★ Savoir que tout polynôme non constant admet au moins une racine complexe et que tout polynôme non constant est toujours scindé dans $\mathbb{C}$.
- ★ Savoir trouver des racines évidentes. Par exemple 0 et 1 sont racines évidentes de $X^3 - 2X^2 + 3X$.
- ★ Savoir que seul le polynôme nul admet une infinité de racines. Par exemple si $P(\cos(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors P est le polynôme nul.
- ★★ Connaître la définition de racines multiples et le lien avec les dérivées du polynôme. Par exemple si $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ alors 1 est racine au moins triple de P .
- ★★ Savoir que des racines complexes conjuguées d'un polynôme **réel** ont la même multiplicité.
- ★★ CLASSIQUE : les exos sur les polynômes de Lagrange.
- ★★ D'autres familles de polynômes interviennent souvent dans les problèmes (mais rien à connaître sur ces polynômes) : Tchebychev (fonctions trigonométriques), Legendre (dérivées nièmes), Hermite (interpolation, produit scalaire), Laguerre (dérivées nièmes), Bernstein (lois Binomiales)

5. Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Espaces vectoriels

Définition

- On appelle loi de composition interne sur un ensemble E toute application :

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E \\ (x; y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

- On appelle loi de composition externe de $\mathbb{K}$ sur un ensemble E toute application :

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda; x) &\mapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$

- On appelle $\mathbb{K}$ -espace vectoriel tout triplet $(E, +, \cdot)$ avec E un ensemble et :
 - une loi de composition interne $+$ telle que :
 - (i) $\forall x, y, z \in E, (x + y) + z = x + (y + z)$ (associativité)
 - (ii) $\exists 0_E \in E, \forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x$ (existence du vecteur nul)
 - (iii) $\forall x \in E, \exists y \in E, x + y = y + x = 0_E$ (existence d'un opposé pour chaque vecteur)
 - (iv) $\forall x, y \in E, x + y = y + x$ (commutativité)
 - une loi de composition externe telle que :
 - (v) $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$
 - (vi) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$
 - (vii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \lambda \cdot (x + y) = (\lambda \cdot x) + (\lambda \cdot y)$
 - (viii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = (\lambda \cdot x) + (\mu \cdot x)$

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur $\mathbb{K}^n$ une loi de composition interne et une loi de composition externe. Pour tout $(x_1; x_2; \dots; x_n) \in \mathbb{K}^n$, pour tout $(y_1; y_2; \dots; y_n) \in \mathbb{K}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose :

$$\begin{cases} (x_1; x_2; \dots; x_n) + (y_1; y_2; \dots; y_n) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots; x_n + y_n) \\ \lambda (x_1; x_2; \dots; x_n) = (\lambda x_1; \lambda x_2; \dots; \lambda x_n) \end{cases}$$

L'ensemble $\mathbb{K}^n$ muni de ces deux lois est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Exemple

Soit I un intervalle réel. L'ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ ou $\mathbb{K}^I$.

Pour toutes fonctions f et g de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ et pour tout λ de $\mathbb{K}$, on définit les fonctions $f + g$ et λf en posant :

$$\begin{cases} \forall x \in I, (f + g)(x) = f(x) + g(x) \\ \forall x \in I, (\lambda f)(x) = \lambda(f(x)) \end{cases}$$

L'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ muni de ces deux lois est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Propriété Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E)$$

II - Sous-espaces vectoriels

Dans tout ce paragraphe, $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F est un sous-ensemble de E .

Caractérisation L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

$$\begin{cases} \bullet F \neq \emptyset \\ \bullet \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \lambda x + \mu y \in F \end{cases}$$

Exemples

- L'ensemble E est un sous-espace vectoriel de E .
- L'ensemble $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E , appelé "sous-espace nul".
- Soit x un vecteur non nul de E . L'ensemble $\mathbb{K}x = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ est un sous-espace vectoriel de E , appelé "droite vectorielle dirigée par x ".

Propriété L'intersection de sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel.

Définition Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

On appelle somme de F et G l'ensemble noté $F + G$ et défini par :

$$F + G = \{x_F + x_G \mid (x_F, x_G) \in F \times G\}$$

En pratique un vecteur x appartient à $F + G$ si et seulement s'il existe $x_F \in F$ et $x_G \in G$ tels que $x = x_F + x_G$.

Propriété L'ensemble $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Remarques

$$\bullet F + F = F \quad \bullet F + \{0_E\} = F \quad \bullet F + E = E \quad \bullet F \subset F + G \quad \bullet F \subset G \Rightarrow F + G = G$$

III - Familles génératrices, familles libres et bases

Dans tout ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(x_1; x_2; \dots; x_p)$ est une famille de vecteurs de E .

Définition

On appelle combinaison linéaire de $(x_1; x_2; \dots; x_p)$ tout vecteur de E de la forme $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$.

Propriété

L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ est un sous-espace vectoriel de E .

Il est noté $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p)$, c'est-à-dire :

$$\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} \right\}$$

Cas particulier $\text{Vect}(x) = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}x$

Définition Soit A une partie de E .

On note $\text{Vect}(A)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'une famille fini d'éléments de A .

Définition On dit que $(x_1; x_2; \dots; x_p)$ est une famille génératrice de E si $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p) = E$, c'est-à-dire si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de $x_1, x_2, \dots, x_p$.

Définition

- On dit que $(x_1; x_2; \dots; x_p)$ est une famille libre si :

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lambda_i = 0 \right)$$

Auquel cas, on dit aussi que les vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont linéairement indépendants.

- On dit que $(x_1; x_2; \dots; x_p)$ est une famille liée si elle n'est pas libre, c'est-à-dire si :

$$\exists (\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \setminus \{(0; 0; \dots; 0)\}, \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0_E$$

Auquel cas, on dit aussi que les vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont linéairement dépendants.

Propriété

- Une famille est liée si et seulement s'il existe un vecteur de cette famille qui est combinaison linéaire des autres.
- Si une famille contient deux vecteurs égaux, alors elle est liée.
- Si une famille contient le vecteur nul, alors elle est liée.
- Soit x un vecteur de E . La famille (x) est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.
- Soit x et y deux vecteurs de E avec x non nul. La famille (x, y) est liée si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$.

Vocabulaire Deux vecteurs x et y sont dits colinéaires lorsque la famille (x, y) est liée.

Propriété Soit $(P_0; P_1; P_2; \dots; P_n)$ une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$.

Si cette famille est de degrés échelonnés, c'est-à-dire si $\deg(P_0) < \deg(P_1) < \dots < \deg(P_n)$, alors elle est libre.

Définition On appelle base de E toute famille de vecteurs de E qui est à la fois génératrice et libre.

Exemple : La famille $(1; X; X^2; \dots; X^n)$ est une base du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$.

Propriété - Définition

Une famille $(e_1; e_2; \dots; e_p)$ est une base de E si et seulement si, pour tout x de E , il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ telle que $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$.

Pour tout $x \in E$, on appelle alors coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ l'unique famille $(\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ telle que $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$.

IV - Dimension d'un espace vectoriel

Définition On dit qu'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Théorème de la base extraite Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

De toute famille génératrice de E , on peut extraire une base de E .

Autrement dit, si $(e_1; e_2; \dots; e_p)$ est une famille génératrice de E , alors il existe un ensemble I tel que $I \subset \llbracket 1; p \rrbracket$ et tel que la sous-famille $(e_i)_{i \in I}$ soit une base de E .

Théorème de la base incomplète Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E .

Autrement dit, si $(e_1; e_2; \dots; e_p)$ est une famille libre de vecteurs de E , alors il existe des vecteurs $e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n$ tels que la surfamille $(e_1; \dots; e_p; e_{p+1}; \dots; e_n)$ soit une base de E .

Propriété Tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie admet une base.

Remarque

- Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul est donc de dimension finie si et seulement s'il admet une base finie.
- Quant à l'espace vectoriel nul, il n'admet pas de base, mais, par convention, il est de dimension finie égale à 0.

Théorème de la dimension Dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre de vecteurs.

Définition Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie.

On appelle dimension de E , et on note $\dim(E)$, le nombre de vecteurs d'une base de E .

Par convention, la dimension de l'espace vectoriel nul est 0.

Exemples

- $\dim(\mathbb{K}^n) = n$ et $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$ • $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$ (en particulier $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = n^2$)
- $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$

Définition-Propriété Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$. Soient $E_1, E_2, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels.

On note $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ ou $\prod_{k=1}^p E_k$ l'ensemble dont les éléments s'écrivent $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ où $x_i \in E_i, \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

On parle du produit cartésien de $E_1, \dots, E_p$. On munit cet espace d'une addition (coordonnée par coordonnée) et d'une multiplication par un scalaire (coordonnée par coordonnée) qui en font un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Si $E_1, \dots, E_p$ sont des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie alors $E_1 \times \dots \times E_p$ est de dimension finie et

$$\dim(E_1 \times \dots \times E_p) = \sum_{k=1}^p \dim(E_k)$$

Remarque En général $E_1 \times E_2 \neq E_2 \times E_1$.

Vocabulaire

- On appelle droite vectorielle tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1.
- On appelle plan vectoriel tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2.

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie et soit $(e_1; e_2; \dots; e_p)$ une famille de p vecteurs de E .

- Si $(e_1; e_2; \dots; e_p)$ est libre, alors $p \leq \dim(E)$.
- Si $(e_1; e_2; \dots; e_p)$ est génératrice de E , alors $p \geq \dim(E)$.
- Si $(e_1; e_2; \dots; e_p)$ est libre et si $p = \dim(E)$, alors $(e_1; e_2; \dots; e_p)$ est une base de E .
- Si $(e_1; e_2; \dots; e_p)$ est génératrice de E et si $p = \dim(E)$, alors $(e_1; e_2; \dots; e_p)$ est une base de E .

V - Dimension d'un sous-espace vectoriel

Dans tout ce paragraphe, F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie.

Propriété Si $F \subset G$ alors $\dim(F) \leq \dim(G)$.

Propriété Si $F \subset G$ et si $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$.

Formule de Grassmann

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

VI - Espaces Vectoriels de référence

Je donne une liste (non exhaustive) d'espaces vectoriels de référence :

- $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel
- $\mathbb{K}[X]$ (ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$) est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel
- $\mathbb{K}_n[X]$ (ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n) est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel
- $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ (ensemble des fonctions de I , un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$) est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel
- $C^0(I, \mathbb{K})$ (ensemble des fonctions continues de I , un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$) est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel
- $C^k(I, \mathbb{K})$ (ensemble des fonctions de classe C^k de I , un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$) est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel
- $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$) est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Complément de cours chapitre 5 : Espaces vectoriels

∝ Vous devez savoir justifier les dimensions de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ en donnant une base de chacun de ces espaces.

∝ Par exemple pour $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ une base est la famille composée des vecteurs $(E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ et des vecteurs $(E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$.

∝ Idée de la démonstration pour $\dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$:

- Prenons $e_1, \dots, e_n$ une base de E_1 . Prenons $f_1, \dots, f_m$ une base de E_2
- On pose $g_1 = (e_1, 0_{E_2}), \dots, g_n = (e_n, 0_{E_2}), g_{n+1} = (0_{E_1}, f_1), \dots, g_{n+m} = (0_{E_1}, f_m)$
- On vérifie que $g_1, \dots, g_{n+m}$ est une base de $E_1 \times E_2$.

Compétences

- ★ Savoir montrer que F est un sous-espace vectoriel de E par caractérisation.
- ★ Savoir montrer que F est un sous-espace vectoriel de E en l'écrivant "sous la forme d'un Vect"
- ★ Savoir traduire $x \in F + G$: il existe $a \in F$ et $b \in G$ tels que $x = a + b$.
- ♠ Penser que $x \in F + G$ veut dire que $x \in F$ et $x \in G$.
- ★ Savoir montrer qu'une famille est libre.
- ★ Savoir qu'une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés est une famille libre.
- ★ Savoir rédiger qu'une famille est une base de F et en déduire la dimension de F .
- ★★ Savoir qu'une famille libre de E contient toujours moins de vecteurs que la dimension de E . Par exemple dans $\mathbb{R}^n$ une famille de $n + 1$ vecteurs est toujours liée.
- ★★ Savoir montrer qu'une famille est libre en composant par une application linéaire u (ou u^2 ou $u^n \dots$). Par exemple si $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et si $u^{n-1}(e_1) \neq 0$ alors $(e_1, u(e_1), \dots, u^{n-1}(e_1))$ est libre.
- ★★ Savoir montrer qu'une famille de fonctions est libre en évaluant en certains réels x ou en faisant certaines limites. Par exemple $x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x}$ et $x \mapsto e^{3x}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- ★ Savoir les dimensions de $\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- ♠ Penser que $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n$.
- ★ Savoir montrer l'égalité de deux sev par égalité des dimensions et une inclusion (la plus facile svp).
- ★★ Connaître la formule de Grassmann.

Chapitre 5 Espaces vectoriels

1 Montrer que l'on a un (sous) espace vectoriel

Exercice 5.1.1

Montrer que $\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(3) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$: par caractérisation / en montrant que c'est un sous espace vectoriel engendré / en reconnaissant un noyau

Exercice 5.1.2

Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 5.1.3 *Oral CCINP MP*

Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid m_{11} = m_{22} \text{ et } m_{12} = m_{21}\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en donner une base.

Exercice 5.1.4★

Montrer que l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Exercice 5.1.5★♡

Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $Z_u = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$.

Montrer que Z_u est un espace vectoriel. Montrer que si $v \in Z_u$ alors $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ est stable par v pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exercice 5.1.6★★

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $F = \{f \in E \mid \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^m f^{(n)}(x) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E .
2. Donner une fonction non nulle qui est dans F .
3. Justifier que si $f \in F$ et si P est une fonction polynôme alors $Pf \in F$.

Exercice 5.1.7★★ Montrer que l'ensemble F des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ pour lesquelles il existe $a < b$ tels que la fonction soit nulle en dehors du segment $[a, b]$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Exercice 5.1.8★★Centrale

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $F = \left\{ f \in C^0([x_0; +\infty[, \mathbb{C}) \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}, \frac{f(x)}{x^\alpha} \rightarrow 0 \text{ lorsque } x \rightarrow +\infty \right\}$.

Montrer que F est un espace vectoriel.

Exercice 5.1.9★CCINP

Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on pose $S(A) = \{PAP^{-1} \mid P \in GL_2(\mathbb{R})\}$. $S(A)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

2 Montrer qu'une famille est libre/liée/génératrice/une base

Exercice 5.2.1

Montrer que la famille $((X-1)^2, (X^2-1), (X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner les coordonnées de X dans cette base.

Exercice 5.2.2

Donner une base de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - z\}$.

Exercice 5.2.3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), \dots, X(X-1)\dots(X-(n-1))$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 5.2.4★★★MinesPonts

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P_k(X) = (1-X)^k X^{n-k}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

1. Montrer que la famille $P_0, P_1, \dots, P_n$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Donner les coordonnées de $(X^n(1-X)^n)^{(n)}$ dans cette base.
3. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 5.2.5★Oral CCINP PSI 2019

On pose $f(x) = x \operatorname{ch}(x)$ et $g(x) = x \operatorname{sh}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donner la dimension de $F = \operatorname{Vect}(ch, sh, f, g)$ on utilisera un développement limité

Exercice 5.2.6★CCINP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les vecteurs $x \mapsto e^{kx}$, k variant de 1 à n , forment une famille libre.

Exercice 5.2.7★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les vecteurs $x \mapsto \sin(2^k x)$, k variant de 0 à n , forment une famille libre.

Exercice 5.2.8★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les vecteurs $x \mapsto \cos^k(x)$, k variant de 0 à n , forment une famille libre.
on pourra faire intervenir un polynôme

Exercice 5.2.9

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Justifier qu'il existe $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_9$ des réels non tous nuls tels que $\lambda_0 I_3 + \lambda_1 M + \dots + \lambda_9 M^9 = 0_3$.

Exercice 5.2.10★

On se place dans E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. On considère $e_1, \dots, e_n$ une famille libre de n vecteurs avec $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On

pose $u = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des scalaires. On suppose que $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq 1$.

On pose alors $v_i = e_i - u$ pour tout i entre 1 et n . Montrer que $v_1, \dots, v_n$ est une famille libre.

Exercice 5.2.11★★

Soit $n \geq 2$. Soient $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que $u_1, \dots, u_n$ est une famille liée ssi il existe $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $u_{j+1} \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_j)$.

Exercice 5.2.12

1. Donner la dimension de $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = t \text{ et } y = z\}$.
2. Donner la dimension de $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = t = y = z\}$.
3. Donner la dimension de $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + t = y + z\}$.

Exercice 5.2.13 Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ on pose $f_{a,b,c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f_{a,b,c}(t) = \begin{pmatrix} be^t + c^{-t} \\ 2a - be^t \\ a + ce^{-t} \end{pmatrix}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Soit $F = \{f_{a,b,c} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$. Montrer que F est un espace vectoriel, en donner une base et la dimension.

Exercice 5.2.14★♥Ecrit E3A PSI

1. Donner la dimension de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n .
2. Donner la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 5.2.15★★Oral Mines Ponts - Centrale PSI 2018-2021

1. Montrer que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = n(n+1)/2$.
2. Est-ce que l'ensemble des matrices nilpotentes est un espace vectoriel?
3. Soit $\mathcal{N}$ un sous espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ composé de matrices nilpotentes. On admet que la seule matrice symétrique qui est nilpotente est la matrice nulle. Montrer que $\dim(\mathcal{N}) \leq n(n-1)/2$.

Exercice 5.2.16★★★Oral Mines Ponts-2019 On note H le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices de trace nulle et $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On admet que $\text{Vect}(\mathcal{N}) \subset H$.

1. Les ensembles H et $\mathcal{N}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels?
2. Montrer que $H = \text{Vect}(\mathcal{N})$.

6. Applications linéaires

I - Généralités

Dans tout ce paragraphe, E, F et G sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Caractérisation Une application $f : E \rightarrow F$ est linéaire si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Exemples

- On appelle application nulle l'application $\begin{pmatrix} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & 0_F \end{pmatrix}$.
- On appelle identité de E l'application $\begin{pmatrix} \text{id}_E : E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x \end{pmatrix}$.
- On appelle homothétie de E de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ l'application $\begin{pmatrix} h_\lambda : E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{pmatrix}$.

Propriété Si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$.

Propriété Si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire, alors :

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \forall x_1, \dots, x_n \in E, f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

Définition

- On appelle isomorphisme de E sur F toute application linéaire bijective de E dans F .
- On appelle endomorphisme de E toute application linéaire de E dans E .
- On appelle automorphisme de E toute application linéaire bijective de E dans E .

Vocabulaire

Deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels E et F sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme de E sur F .

Notations

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.
- L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$ (au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$).
- L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$ et est appelé "groupe linéaire de E ".

Propriété

- Si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $\lambda f : E \rightarrow F$ est aussi linéaire.
- Si $f : E \rightarrow F$ et si $g : E \rightarrow F$ sont des applications linéaires, alors l'application $f + g : E \rightarrow F$ est aussi linéaire.
- Si $f : E \rightarrow F$ et si $g : F \rightarrow G$ sont des applications linéaires, alors l'application $g \circ f : E \rightarrow G$ est aussi linéaire.
- Si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire et bijective, alors l'application $f^{-1} : F \rightarrow E$ est aussi linéaire.

Corollaire La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme.

Notation

Pour un endomorphisme $f : E \rightarrow E$, l'application $f \circ f$ est souvent notée f^2 .

Plus généralement, on définit $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence en posant $\begin{cases} f^0 = \text{id}_E \\ \forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f \circ f^n = f^n \circ f. \end{cases}$

Remarque Attention f^2 n'est pas $f \times f$ (qui n'a aucun sens en général!!!)

II - Noyau et image d'une application linéaire

Dans tout ce paragraphe, E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire.

Définition

- On appelle noyau de f l'ensemble noté $\text{Ker}(f)$ et défini par : $\text{Ker}(f) = \{x \in E; f(x) = 0_F\}$.
En pratique : $x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0_F$.
- On appelle image de f l'ensemble noté $\text{Im}(f)$ et défini par : $\text{Im}(f) = \{f(x); x \in E\}$.
En pratique : $y \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Propriété

- L'ensemble $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .
- L'ensemble $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Propriété

- L'application f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- L'application f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.

Propriété ♡

Si E est de dimension finie et si $e_1, \dots, e_n$ est une base de E alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

III - Applications linéaires en dimension finie

Dans tout ce paragraphe, E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels non nuls de dimension finie.

Théorème

Une application linéaire de E dans F est entièrement déterminée par l'image d'une base de E .

Autrement écrit, si $(e_1; e_2; \dots; e_n)$ est une base de E et si $(f_1; f_2; \dots; f_n)$ est une famille de vecteurs de F , alors il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $u(e_i) = f_i$.

Remarque

Ce théorème est utile pour définir les applications linéaires. On peut par exemple rencontrer des énoncés du type :

Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\Phi(X^k) = X^{n-k}$

Ici, l'image d'un polynôme $\sum_{k=0}^n a_k X^k$ par Φ s'obtient en écrivant : $\Phi\left(\sum_{k=0}^n a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^n a_k \Phi(X^k) = \sum_{k=0}^n a_k X^{n-k}$

Propriété L'image d'une base par un isomorphisme est une base.

Autrement écrit, si $u : E \rightarrow F$ est une application linéaire bijective et si $(e_1; e_2; \dots; e_n)$ est une base de E , alors la famille $(u(e_1); u(e_2); \dots; u(e_n))$ est une base de F .

Propriété Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de même dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est injective (ii) u est surjective (iii) u est bijective

Remarque Cette propriété est fausse en dimension infinie.

Par exemple, l'application $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]; P \mapsto P'$ est surjective mais n'est pas injective.

Théorème

Deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.

IV - Représentation matricielle

Dans tout ce paragraphe, on considère :

- E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie p , muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1; e_2; \dots; e_p)$;
- F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie n , muni d'une base $\mathcal{C} = (f_1; f_2; \dots; f_n)$;
- G un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie m , muni d'une base $\mathcal{D} = (g_1; g_2; \dots; g_m)$.

Définition

Soit x un vecteur de E de coordonnées $(\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ ainsi $x = \sum_{k=1}^p \lambda_k e_k$.

On appelle matrice de x dans la base $\mathcal{B}$ la matrice notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et définie par : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Définition Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire.

Pour tout $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, soit $(a_{1j}; a_{2j}; \dots; a_{nj})$ les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$ ainsi $u(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{kj} f_k$.

On appelle matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ la matrice notée $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et définie par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{bmatrix} u(e_1) & u(e_j) & u(e_p) \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_i \\ f_n \end{matrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Cas particulier Si $u : E \rightarrow E$ est un endomorphisme, alors la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$ est simplement notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} u(e_1) & u(e_j) & u(e_p) \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_i \\ e_p \end{matrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$$

Propriété

L'application $\begin{pmatrix} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \end{pmatrix}$ est un isomorphisme.

Corollaire $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$

Propriété

- Pour toute application linéaire $u : E \rightarrow F$ et pour tout vecteur x de E : $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.
- Pour toute application linéaire $u : E \rightarrow F$ et pour tout scalaire λ de $\mathbb{K}$: $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda u) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$.
- Pour toutes applications linéaires $u : E \rightarrow F$ et $v : E \rightarrow F$: $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u + v) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) + \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(v)$.
- Pour toutes applications linéaires $u : E \rightarrow F$ et $v : F \rightarrow G$: $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) \times \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$.

Propriété On suppose ici que E et F sont de même dimension n .

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La matrice A est inversible si et seulement si u est un isomorphisme. Auquel cas : $A^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u^{-1})$.

V - Noyau et image d'une matrice

Remarque

On identifie souvent un n -uplet $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ avec le vecteur colonne $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Définition

L'application linéaire canoniquement associée à une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'application $\begin{pmatrix} u : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n \\ X \mapsto AX \end{pmatrix}$

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A .

- On appelle noyau de A l'ensemble noté $\text{Ker}(A)$ et défini par : $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(u) = \{X \in \mathbb{K}^p; AX = 0\}$.
- On appelle image de A l'ensemble noté $\text{Im}(A)$ et défini par : $\text{Im}(A) = \text{Im}(u) = \{AX; X \in \mathbb{K}^p\}$.

Propriété L'image d'une matrice est le sous-espace vectoriel engendré par ses colonnes.

VI - Matrices de passage

Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{B} = (b_1; b_2; \dots; b_n)$ et $\mathcal{B}' = (b'_1; b'_2; \dots; b'_n)$ sont deux bases d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

Définition

Pour tout $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, soit $(a_{1j}; a_{2j}; \dots; a_{nj})$ les coordonnées de b'_j dans la base $\mathcal{B}$ ainsi $b'_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} b_k$.

On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice notée $\mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ ou $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et définie par :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} b'_1 & b'_2 & \dots & b'_n \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Propriété La matrice $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible et $\left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

Propriété

Soit x un vecteur de E , soit $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, soit $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ et soit $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. On a : $X = PX'$.

Théorème de changement de bases

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, soit $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ et soit $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. On a : $A' = P^{-1}AP$.

Définition Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A est semblable à B s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Remarque

- A est semblable à B ssi A et B sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.
- La relation "être semblable à" est une relation d'équivalence.
 - Elle est réflexive : pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est semblable à A .
 - Elle est symétrique : pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si A est semblable à B alors B est semblable à A .
 - Elle est transitive : pour tous $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si A est semblable à B et B est semblable à C alors A est semblable à C .

Complement de cours chapitre 6 : Applications linéaires

Proposition Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ qui **commutent** ($u \circ v = v \circ u$). Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k} \quad \text{Formule du Binome}$$

Définition Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d \in \mathbb{K}[X]$. On pose

$$P(u) = a_0 Id_E + a_1 u + \dots + a_d u^d$$

On dit que $P(u)$ est un polynôme en u (et on peut noter $P(u) \in \mathbb{K}[u]$).

Attention dans les calculs $u^0 = Id_E$.

On dit que P est **annulateur** de u si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Application au calcul de l'inverse (sur un exemple) :

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $u^4 - 3u + Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors $3u - u^4 = Id_E$ donc $u(3Id_E - u^3) = (3Id_E - u^3)u = Id_E$.
Ainsi u est un automorphisme et $u^{-1} = 3Id_E - u^3$.

Compétences

- ★ Savoir montrer qu'une application est linéaire.
- ★ Savoir montrer qu'une application est un endomorphisme.
- ♠ Confondre endomorphisme et automorphisme.
- ♠ Confondre $f \circ g$ et $f(x) \times g(x)$ (qui n'a pas de sens...)
- ♠ Ecrire des horreurs comme $(f(x))^n$ à la place de $f^n(x)$ qui est $f(f(\dots f(x)))$
- ★★ Savoir montrer que f est bijective en trouvant g tel que $f \circ g = g \circ f$.
- ★ Savoir montrer que f est bijective en montrant que $\det(f) \neq 0$.
- ★ Savoir montrer que f est bijective en montrant que 0 n'est pas valeur propre de f .
- ★ Savoir traduire $x \in \text{Ker}(f)$ (c'est $f(x) = 0$) ainsi que $x \in \text{Im}(f)$ (c'est il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$)
- ★ Savoir passer de $f^2 = 0$ à $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ par exemple.
- ★ Savoir montrer que $\text{Ker}(f^p) \subset \text{Ker}(f^{p+1})$ et $\text{Im}(f^{p+1}) \subset \text{Im}(f^p)$
- ★ Savoir l'équivalence entre injectif/bijectif/surjectif pour un endomorphisme en dimension finie.
- ★ Savoir trouver la matrice d'une application linéaire dans une base donnée.
- ★★ Savoir construire une base adaptée pour avoir une matrice sympathique. Par exemple dans une base adaptée la matrice d'un projecteur est ...
- ★★★ Savoir compléter une famille libre en une base pour avoir une matrice sympathique par blocs. Par exemple si $e_1, \dots, e_p$ est une base du noyau de f et qu'on la complète en une base de E alors la matrice de f dans cette base possède ses p premières colonnes nulles.
- ★ Savoir construire une matrice de passage et savoir qu'elle est inversible.
- ★ Savoir la relation donnée par le théorème de changement de bases.
- ★★ Savoir donner le noyau d'une matrice A (on pose $AX = 0$ avec X matrice colonne) et l'image de A (Vect engendré par ses colonnes).
- ★ Si p projecteur, savoir montrer que $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - id)$.
- ★★ Si p projecteur et s symétrie, savoir que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$ et $E = \text{Ker}(s - id) \oplus \text{Ker}(s + id)$.

Chapitre 6 : applications linéaires

1 Montrer qu'une application est linéaire/un endomorphisme

Exercice 6.1.1★

Soit f l'application qui à tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe $f(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donner sa matrice dans la base canonique.

Exercice 6.1.2★♥

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit ψ l'application définie sur E par $\psi(P) = XP'(X) + P(2X)$.
Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6.1.3★

Soit E de dimension finie. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\text{Ker}(f - 2\text{id}_E) \subset \text{Ker}(f \circ g - g \circ f)$.
Montrer que g permet de définir un endomorphisme induit sur $\text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$.

Exercice 6.1.4★Oral CCINP 2019 PSI

On se place dans $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $f : x \mapsto x \, ch(x)$ et $g : x \mapsto x \, sh(x)$.

Soit $F = \text{Vect}(ch, sh, f, g)$. On admet que ch, sh, f, g est une base de F .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \in F$, on pose $T_\lambda(h) : x \mapsto xh''(x) - \lambda h'(x) - xh(x)$.

Montrer que T_λ est un endomorphisme de F . Montrer que T_λ est bijective si et seulement si $\lambda \notin \{0, 2\}$. Déterminer le noyau et l'image de T_λ en fonction de λ .

2 Théorème de changements de bases

Exercice 6.2.1★

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée.

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. On note i, j, k la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $u = k$, $v = i - j$ et $w = i + j$. Justifier que u, v, w est une base de $\mathbb{R}^3$, donner la matrice de f dans cette nouvelle base puis écrire le théorème de changement de base.

Exercice 6.2.2★★

Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = -I_4$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ canoniquement associée à A .

1. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ alors $(x, f(x))$ est libre.

2. En déduire qu'il existe $P \in GL_4(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.2.3★

Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la projection p sur la droite D d'équation $x + y = 0$ parallèlement à la droite D' d'équation $x = y/2$.

Exercice 6.2.4★

Montrer que $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

3 Manipuler/trouver l'image/le noyau. Utiliser le théorème du rang

Exercice 6.3.1♥★

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.

Montrer que $\text{Ker}(f^3) = \text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f^3) = \text{Im}(f)$.

Exercice 6.3.2♥★Oral Mines-Telecom 2017

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$.

1. Montrer que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f) \iff \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{0_F\}$.
2. Montrer que $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f) \iff \text{Ker}(f) + \text{Im}(g) = E$.

Exercice 6.3.3★ *Oral CCINP 2019 PSI*

Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0_n$. Montrer que $\text{rg}(A) \leq n$.

Exercice 6.3.4★★ *Oral Centrale 2021 PSI*

Soient A et B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que A et B soient non nulles et $A^2 = B^2 = 0_3$.
Montrer que A est semblable à B . *Indication : chercher la dimension de $\text{Ker}(A)$*

Exercice 6.3.5★ *Oral Mines-Telecom PSI*

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ une racine carrée non nulle de l'application nulle. Donner la dimension du noyau de f .

Exercice 6.3.6★

On pose $g(P) = (3X + 1)P'(X) + (1 - X^2)P(1)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer $\text{Ker } g$ et $\text{Im } g$.

Exercice 6.3.7 *Oral CCINP PSI 2021 (Kenzi)★★*

Soit φ définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ qui à P associe le reste de la division Euclidienne de $X^2P(X)$ par $X^4 - 1$.
Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ et donner sa matrice dans la base canonique.
 φ est-elle inversible ? Si oui déterminer φ^{-1} .

Exercice 6.3.8★ *Oral Mines Telecom PC*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donner noyau et image de A . De même pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.3.9★★ CCINP

Soit $E = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
2. On pose $\phi(f) = \int_0^1 tf(t)dt$ pour tout $f \in E$. Montrer que ϕ est linéaire.
3. Soit $f_0 : t \mapsto t$. Montrer que $\text{Ker}(\phi) \cap \text{Vect}(f_0) = \{0_E\}$. Soit $f \in E$ trouver $g \in \text{Ker}(\phi)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = g + \lambda f_0$. *Que venons nous de montrer ?*

Exercice 6.3.10★★ CCINP

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$ tels que $p + q = \text{id}$ et $\text{rg}(p) + \text{rg}(q) \leq \dim(E)$.
Montrer que $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$. Montrer que p et q sont des projecteurs.

Exercice 6.3.11★

Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que f et p commutent ssi $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont stables par f .

Exercice 6.3.12★

Soient p, q deux projecteurs qui commutent. Vérifier que $p \circ q$ est un projecteur.

Montrer que $\text{Ker}(p \circ q) = \text{Ker}(p) + \text{Ker}(q)$ et $\text{Im}(p \circ q) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$.

Exercice 6.3.13★★

Soit E un espace vectoriel. Soient p, q deux projecteurs de E tels que $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q)$.

1. Montrer que $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) = \{0_E\}$.
2. Soit $r = p + q - p \circ q$. Montrer que r est un projecteur, sur $\text{Im}(p) + \text{Im}(q)$ parallèlement à $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

Exercice 6.3.14★★

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $2n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)$.

Exercice 6.3.15★★ *Oral Centrale PSI*

Soit Δ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\Delta(P) = P(X + 1) - P(X)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ soit Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier que $\Delta_n^{n+1} = 0$.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ on a $\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X + j) = 0$.

Exercice 6.3.16*** *Oral Mines Ponts PSI 2019 et Centrale 2018*

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

On dit que $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifie $(*)$ si $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

1. Montrer que si v vérifie $(*)$ alors $E = \text{Im}(v) \oplus \text{Ker}(u)$ et $F = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(v)$.
2. Soient E_1 un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E et F_1 un supplémentaire de $\text{Im}(u)$ dans F . Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant $(*)$ et $E_1 = \text{Im}(v)$ et $F_1 = \text{Ker}(v)$.

Exercice 6.3.17** *MinesPonts*

Soit E un espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Soit S un sous-espace vectoriel de E qui est stable par u et qui vérifie $E = \text{Im}(u) + S$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, E = \text{Im}(u^k) + S$.
2. Qu'en conclure ?

4 Montrer qu'une application est un automorphisme

Exercice 6.4.1* *ECINP PSI 2018*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $f : P \mapsto X^2 P'' + (1 - a - b)XP' + abP$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Chercher la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Donner la trace de f .
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit un automorphisme.

Exercice 6.4.2

Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Soit $f : M \mapsto P^{-1}MP$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et donner sa réciproque.

Exercice 6.4.3**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. On pose $f(P) = (P \times Q)^{(n)}$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur Q pour que f soit un automorphisme.

Exercice 6.4.4* *Oral CCINP PSI 2019*

On se donne trois réels distincts a_1, a_2, a_3 .

Soit φ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(P) = (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$.

1. Montrer que φ est un isomorphisme.
2. On note $(e_k)_{1 \leq k \leq 3}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $L_k = \varphi^{-1}(e_k)$. Montrer que $(L_k)_{1 \leq k \leq 3}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Expliciter les L_k .

Exercice 6.4.5** *Oral Centrale PSI 2021*

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'endomorphisme φ défini par $\varphi(P) = \sum_{k=0}^n \int_0^1 P(t)t^k dt X^k$ pour tout $P \in E$.

Soit $P \in \text{Ker}(\varphi)$. Montrer que $\int_0^1 P(t)Q(t)dt = 0$ pour tout $Q \in E$. En déduire que φ est bijective.

5 Utiliser des relations polynômiales

Exercice 6.5.1*

Soit $g \in L(E)$. On suppose que $g^2 = \text{Id}_E$. Montrer que $\text{Id}_E + 2g$ est inversible et trouver son inverse.

Exercice 6.5.2*

Soit $f \in L(E)$ telle que $f^2 + f - 2\text{id} = 0_{L(E)}$

1. Montrer que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire alors l'expression de $f^n(x)$ en fonction de $x, f(x)$ et n .

Exercice 6.5.3 ★♡♡

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Justifier qu'il existe $a \in E$ tel que la famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ soit libre.
2. En déduire que si E est de dimension finie n , alors $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 6.5.3 ★★♡♡

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = (a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ soit une base de E .
2. Montrer qu'un endomorphisme g commute avec f si et seulement si g est combinaison linéaire de $id, f, \dots, f^{n-1}$.
Indication : on pourra exprimer $g(a)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 6.5.3.bis★

Soient E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension 3 et $f \in L(E)$ tel que $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.5.3.ter★★

Existe-t-il une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.5.4★★

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $A^3 + A = 0_3$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.5.5★★CCINP

Soient E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension $3n$ et $f \in L(E)$ tel que $rg(f^2) = n$ et $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

Exercice 6.5.6★★Centrale

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev et $f \in L(E)$ tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On définit $\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ par $\psi(g) = f \circ g - g \circ f$. Montrer que ψ est nilpotente.

Exercice 6.5.7★★Oral CCINP PSI 2023

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $u^3 + u^2 + u = 0$.

1. Déterminer $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(u^2 + u + id)$.
2. Montrer que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u^2 + u + id)$ puis que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.

6 Autres

Exercice 6.6.1★★♡

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $(x, f(x))$ est liée $\forall x \in E$.

1. Montrer que $\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda_x x$.
2. Montrer que $\forall (x, y) \in (E \setminus \{0_E\})^2$, on a : $\lambda_x = \lambda_y$ (on pourra étudier les cas : $\{x, y\}$ libre et $\{x, y\}$ liée).
3. En déduire que f est une homothétie de E .

7. Rang

I - Rang d'une application linéaire

Dans tout ce paragraphe, E, F, G, E' et F' sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

Définition Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle rang de f le nombre noté $\text{rg}(f)$ et défini par : $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.

Théorème du rang Pour toute application linéaire $f : E \rightarrow F$, on a :

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$$

Propriété Pour toutes applications linéaires $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$, on a :

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g) \text{ et } \text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$$

Propriété d'invariance du rang par composition par un isomorphisme

- Pour toute application linéaire $f : E \rightarrow F$ et pour tout isomorphisme $\varphi : E' \rightarrow E$, on a : $\text{rg}(f \circ \varphi) = \text{rg}(f)$
- Pour toute application linéaire $f : E \rightarrow F$ et pour tout isomorphisme $\psi : F \rightarrow F'$, on a : $\text{rg}(\psi \circ f) = \text{rg}(f)$

II - Rang d'une matrice

Définition Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle rang de A le nombre noté $\text{rg}(A)$ et défini par : $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A))$.

Autrement formulé, le rang d'une matrice est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ses colonnes.

Propriété Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels non nuls de dimension finie. Soit A la matrice représentative de u dans des bases de E et F . On a alors : $\text{rg}(u) = \text{rg}(A)$.

Théorème du rang $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A)) = p$ (nombre de colonnes de A)

Cas particulier $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A)) = n$

Propriété $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \text{rg}(BA) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$

Propriété d'invariance du rang par multiplication par une matrice inversible

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall P \in GL_p(\mathbb{K}), \text{rg}(AP) = \text{rg}(A)$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall Q \in GL_n(\mathbb{K}), \text{rg}(QA) = \text{rg}(A)$

Corollaire Deux matrices semblables ont même rang : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in GL_n(\mathbb{K}), \text{rg}(P^{-1}AP) = \text{rg}(A)$

Propriété

- Une matrice carrée d'ordre n est inversible si et seulement si son rang est égal à n .
- Une matrice carrée d'ordre n est inversible si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base de $\mathbb{K}^n$.

Propriété $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \text{rg}(A^T) = \text{rg}(A)$

Définition On appelle opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice A les opérations suivantes :

- ajouter à une colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes;
- multiplier une colonne de A par un scalaire non nul;
- échanger deux colonnes de A .

Propriété

- Les opérations élémentaires sur les colonnes conservent le rang.
- Les opérations élémentaires sur les lignes conservent le rang.
- Le rang d'une matrice échelonnée en ligne est égal à son nombre de lignes non nulles (idem en colonne).

Exemple

$$\text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & -18 & -27 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1$ $L_2 \leftarrow (-1/9)L_2$
 $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1$ $L_3 \leftarrow (-1/8)L_3$

III - Rang d'une famille de vecteurs**Définition**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et soit $(x_1; x_2; \dots; x_p)$ une famille de vecteurs de E .

On appelle rang de $(x_1; x_2; \dots; x_p)$ le nombre noté $\text{rg}(x_1; x_2; \dots; x_p)$ et défini par :

$$\text{rg}(x_1; x_2; \dots; x_p) = \dim(\text{Vect}(x_1; x_2; \dots; x_p))$$

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie n et soit $\mathcal{B} = (e_1; e_2; \dots; e_n)$ une base de E .

Soit $(x_1; x_2; \dots; x_p)$ une famille de vecteurs de E .

Pour tout $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, soit $(a_{1j}; a_{2j}; \dots; a_{nj}) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de x_j dans la base $\mathcal{B}$ ainsi $x_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k$.

On a :

$$\text{rg}(x_1; x_2; \dots; x_p) = \text{rg} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_p \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et soit $(x_1; x_2; \dots; x_p)$ une famille de vecteurs de E .

- $\text{rg}(x_1; x_2; \dots; x_p) \leq p$
- $\text{rg}(x_1; x_2; \dots; x_p) = p$ si et seulement si $(x_1; x_2; \dots; x_p)$ est libre
- $\text{rg}(x_1; x_2; \dots; x_p) \leq \dim(E)$
- $\text{rg}(x_1; x_2; \dots; x_p) = \dim(E)$ si et seulement si $(x_1; x_2; \dots; x_p)$ est génératrice de E

Complément de cours chapitre 7 : Rang

Une situation ultra classique

Dans un certain nombre d'exercices on se retrouve avec des matrices de rang 1 il faut savoir les exploiter :

- une matrice de rang 1 est une matrice dont toutes les colonnes sont proportionnelles
- une matrice de rang 1 est une matrice dont toutes les lignes sont proportionnelles
- une matrice de rang 1 est une matrice (de taille n) dont le noyau est de dimension $n - 1$
- une matrice de rang 1 est une matrice (de taille n) dont 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n - 1$
- une matrice M de rang 1 peut s'écrire UV^T avec U, V deux vecteurs colonnes non nuls
- une matrice M de rang 1 vérifie $M^2 = \text{tr}(M)M$.
- une matrice M de rang 1 possède $X^2 - \text{tr}(M)X$ comme polynôme annulateur.

Détaillons les derniers points :

- si M est de rang 1 alors il existe une colonne de M non nulle. Notons U cette colonne.
- La colonne 1 de M est proportionnelle à U : il existe $v_1 \in \mathbb{K}$ tel que cette colonne soit égale à $v_1 U$.
- De même pour les autres colonnes : il existe $v_k \in \mathbb{K}$ tel que la colonne k soit égale à $v_k U$.
- On vérifie alors que $M = UV^T$.

- Puis $M^2 = UV^T UV^T = U(V^T U)V^T$. Avec $V^T U = \sum_{k=1}^n v_k u_k = \text{tr}(M)$ on a bien $M^2 = \text{tr}(M)M$.

Exemple : soit $\alpha \in \mathbb{C}$, trouver le rang de $A = (\alpha^{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n}$. (5/2 : A est-elle diagonalisable ?)

Méthode de Gauss

- Les opérations élémentaires sur les lignes conservent le rang, conservent le noyau.
- Les opérations élémentaires sur les colonnes conservent le rang, conservent l'image.
- Les opérations élémentaires sur les colonnes correspondent à des multiplications à droite par des matrices inversibles (*matrices de dilatation, de transposition ou de transvection*).
- Les opérations élémentaires sur les lignes correspondent à des multiplications à gauche par des matrices inversibles.

Dans les calculs pour le rang on essaye de se ramener à une matrice échelonnée c'est à dire une matrice de la forme (pour le cas d'une matrice échelonnée par lignes)

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 & \bullet & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad \text{avec } a_1, a_2, \dots \text{ non nuls}$$

Exemples : cherchons le rang, le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ puis de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Compétences

- ★ Connaître le th du rang.
- ♠ Dire que le th du rang appliqué en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donne $\text{rg}(A) + \dim(\text{Ker}(A)) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ (alors que c'est $\dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$).
- ★ Savoir que deux matrices semblables ont même rang.
- ★ Savoir trouver le rang d'une matrice avec les opérations de Gauss.
- ★ Savoir trouver le rang d'une application linéaire en passant par sa matrice dans une base.
- ★★ Savoir montrer qu'une matrice de rang 1 peut s'écrire sous la forme $X^T Y$ avec X et Y vecteurs colonnes non nuls.
- ★★ Savoir montrer qu'une matrice de rang 1 vérifie $A^2 = \text{tr}(A)A$.
- ★★ Savoir construire une base adaptée à un endomorphisme de rang 1 tel que la matrice dans cette base possède $n - 1$ colonnes nulles.
- ♠ Croire qu'une matrice de rang 1 possède toutes ses colonnes identiques.
- ♠♠ Croire qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec des colonnes toutes distinctes est de rang n .

Chapitre 7 : rang

1 Calculs-Définitions

Exercice 7.1.1★

Trouver deux matrices de même rang qui ne sont pas semblables.

Exercice 7.1.2★

Donner le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ puis de $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ et enfin de la matrice de taille n avec uniquement de 1.

Exercice 7.1.3★

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Trouver le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & b & b \\ c & d & c & d \\ ac & ad & bc & bd \end{pmatrix}$.

Exercice 7.1.4★

Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouver le rang de la matrice avec des 1 partout sauf sur la diagonale où on place des a .

Exercice 7.1.5★★

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Donner le rang de $\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Exercice 7.1.6★

Soit $n \geq 1$ un entier. Soit $E = \mathbb{C}_{2n}[X]$. On pose $f(P) = (X^2 - X)P(1) + (X^2 + X)P(-1)$ pour tout $P \in E$. Montrer que f est un endomorphisme de E puis trouver son rang et son image.

Exercice 7.1.7 ORAL CCINP ★

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ et v un vecteur de E .

Soit f l'endomorphisme de E tel que $f(e_1) = \dots = f(e_n) = v$. Quel est le rang de f ? Donner l'expression de f^2 .

Exercice 7.1.8 ORAL ENS (extrait) ★

Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ avec $rg(A) = rg(B) = 1$. On pose $A \circ B$ la matrice dont le coefficient d'indice i, j est $a_{i,j}b_{i,j}$. Montrer que $A \circ B \in S_n(\mathbb{R})$ et que $rg(A \circ B) \leq 1$.

Exercice 7.1.9 ORAL CCINP ★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $(1 \ 2 \ \dots \ n)$, la première colonne est $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ et tous les autres coefficients nuls.

Quel est le rang de A ? Donner $\dim(Ker(A))$.

2 Savoir se placer dans une base adaptée. Utiliser le théorème du rang

Exercice 7.2.1♥★

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si p est un projecteur on a $tr(p) = rg(p)$.

Exercice 7.2.2★★

Soit $u \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que $u^2 = 0_{L(E)}$ et $u \neq 0_{L(E)}$.

1. Montrer que $rg(u) = 1$.

2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de u dans cette base soit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7.2.2 Oral CCINP ★★

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ tel que $u^2 = 0$ et $rg(u) = n$.

1. Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^{2n}$ telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.

Exercice 7.2.3 Oral Centrale ★★

Soient A et B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que A et B soient non nulles et $A^2 = B^2 = 0_3$.
Montrer que A est semblable à B . *Indication : chercher la dimension de $\text{Ker}(A)$*

Exercice 7.2.4★ ♥

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $rg(f) = 1$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \alpha f$.

Exercice 7.2.4.bis★ ♥CCINP

Soit A une matrice de taille $n \geq 2$ à coefficients réels et de rang 1.
Montrer qu'il existe deux vecteurs colonnes U et V tels que $A = UV^T$. Montrer que $A^2 = \text{tr}(A)A$.

Exercice 7.2.5 Oral CCINP 2019 ★

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient p, q deux endomorphismes de E .
On suppose que $p + q = \text{Id}$ et $rg(p) + rg(q) \leq \dim(E)$. Montrer que p et q sont des projecteurs.

Exercice 7.2.6★

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$ ssi $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$ ssi $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.

Exercice 7.2.7 Oral CCINP 2019 ★

Montrer que pour toute matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on a : $M^2 = 0_3$ ssi $\text{tr}(M) = 0$ et $rg(M) = 1$.

Exercice 7.2.8★★

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer l'équivalence entre

1. $rg(f + g) = rg(f) + rg(g)$.
2. $\text{Im}(f) + \text{Im}(g) = \text{Im}(f + g)$ et $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0_F\}$.
3. $\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) = E$ et $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) = \text{Ker}(f + g)$.

Exercice 7.2.9★ ♥Oral Mines PSI

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. Calculer le rang de u .

Exercice 7.2.10★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

1. Résoudre sur $] -1; 1[$ l'équation différentielle $(1 - x^2)y'(x) + 2nxy(x) = 0$.
2. Soit f définie sur $\mathbb{R}_{2n}[X]$ par $f(P) = (1 - X^2)P' + 2nXP$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.
 - (a) Montrer que f est un endomorphisme.
 - (b) Trouver le rang de A la matrice de taille $2n + 1$ avec des zéros partout sauf au dessus de la diagonale où on place (de gauche à droite) les nombres $1, 2, \dots, 2n$ et au-dessous de la diagonale où on place (de gauche à droite) les nombres $2n, 2n - 1, \dots, 1$.

8. Déterminant

I - Déterminant d'une matrice carrée

Propriété : opérations élémentaires sur les colonnes Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si on ajoute à une colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes, alors on obtient une matrice A' telle que $\det(A') = \det(A)$.
- Si on multiplie une colonne de A par un scalaire λ , alors on obtient une matrice A' telle que $\det(A') = \lambda \det(A)$.
- Si on échange deux colonnes de A , alors on obtient une matrice A' telle que $\det(A') = -\det(A)$.

Corollaire $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Propriété $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A^T) = \det(A)$

Conséquence

Les opérations élémentaires sur les lignes ont les mêmes conséquences sur le déterminant que les opérations élémentaires sur les colonnes.

Définition et propriété : développement par rapport à une ligne ou une colonne

Soit $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $(i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$.

On appelle cofacteur $(i; j)$ de A le produit $(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$ où $\Delta_{i,j}$ est le déterminant obtenu en supprimant dans A la i -ième ligne et la j -ième colonne :

$$(-1)^{i+j} \Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

- Pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$ (développement par rapport à la colonne j).
- Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$ (développement par rapport à la ligne i).

Corollaire Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Propriété Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Propriété $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(AB) = \det(BA) = \det(A) \det(B)$

Corollaire $\forall A \in GL_n(\mathbb{K}), \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Propriété - Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs ♡

$$\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K}), \det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det(A) \det(C)$$

Définition et Propriété Soit $x_1, x_2, \dots, x_n$ des nombres réels ou complexes.

On appelle déterminant de Vandermonde, et on note $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, le déterminant de la matrice $\left[x_i^{j-1}\right]_{1 \leq i, j \leq n}$.

On a

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Exemple $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = (3-2)(4-2)(4-3) = 2$

II - Déterminant d'un endomorphisme

Propriété Deux matrices semblables ont même déterminant : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in GL_n(\mathbb{K}), \det(P^{-1}AP) = \det(A)$

Définition Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit A la matrice représentative de u dans une base $\mathcal{B}$ de E .

Le déterminant de A ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie.

On appelle cet invariant le déterminant de u et on le note $\det(u)$.

Propriété

- $\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$
- $\forall u \in \mathcal{L}(E), (u \in GL(E) \Leftrightarrow \det(u) \neq 0)$
- $\forall u, v \in \mathcal{L}(E), \det(u \circ v) = \det(v \circ u) = \det(u) \det(v)$
- $\forall u \in GL(E), \det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$

III - Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie n et soit $\mathcal{B} = (e_1; e_2; \dots; e_n)$ une base de E .

Soit $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ une famille de n vecteurs de E .

Pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, soit $(a_{1j}; a_{2j}; \dots; a_{nj}) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de x_j dans la base $\mathcal{B}$ ainsi $x_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k$.

On appelle déterminant de $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ le nombre noté $\det_{\mathcal{B}}(x_1; x_2; \dots; x_n)$ et défini par :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1; x_2; \dots; x_n) = \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

Propriété : caractérisation des bases

Avec les mêmes notations, $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(x_1; x_2; \dots; x_n) \neq 0$.

Complement de cours chapitre 8 : Déterminant

Théorème Il existe une unique application f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ qui vérifie

- f est linéaire par rapport à chaque colonne
- f est antisymétrique et alternée :
 - si on échange deux colonnes de M et que l'on note M' le résultat alors on a $f(M') = -f(M)$.
 - si M contient (au-moins) deux colonnes identiques alors $f(M) = 0$.
- $f(I_n) = 1$.

Cette application est appelée **déterminant** et est notée $\det$.

Remarques : pour les anciens MPSI la formule générale est hors programme. La comatrice est aussi hors programme.

Proposition

1. Si $A = (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ alors $\det(A) = a$.
2. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ alors $\det(A) = ad - bc$.
3. **Règle de Sarrus** : si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ alors $\det(A) = aei + cdh + bfg - ecg - dbi - ahf$.

∝ Démonstration de cours 1 : déterminant de VanderMonde

∝ Démonstration de cours 2 : déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

▷▷▷ **PYTHON** dans le module `numpy.linalg` il y a la fonction `det`

- `import numpy.linalg as alg`
- `A = np.array([[1,2], [3,4]])`
- `alg.det(A)` donne -2.0000000000000004

Compétences

- ★ Connaître la règle de Sarrus pour les matrices de taille 2 ou de taille 3.
- ♠ Utiliser la règle de Sarrus pour les matrices de taille 4 ou plus.
- ♠ Penser que $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ ou que $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$ car $\det$ est linéaire.
- ★ Savoir calculer un déterminant avec les opérations élémentaires pour se ramener à une matrice triangulaire.
- ★ Savoir utiliser des déterminants triangulaires par blocs
- ♠ Penser que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.
- ★ Savoir calculer le déterminant de Van Der Monde.
- ★ Savoir calculer le déterminant d'une famille pour montrer que l'on a une base.
- ★ Savoir calculer le déterminant d'un endomorphisme en passant par la matrice dans une base (parfois bien choisie).
- ★★ Savoir développer par rapport à une ligne ou une colonne. Par exemple pour le déterminant d'une matrice tridiagonale on trouve une relation entre les déterminants de taille n , $n - 1$ et $n - 2$.
- ★★★ Utiliser la multilinéarité du déterminant.
- ★★ Savoir que le déterminant est une fonction polynomiale par rapport aux coefficients de la matrice (et est donc une fonction continue). Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \det(A_n) = \det \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n \right)$.

Chapitre 8 : déterminant

1 Calcul par opération de Gauss et/ou par développement et/ou multilinéarité

Exercice 8.1.1★

$$\text{Calculer } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \text{ puis } \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_n \text{ puis } \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix}_n \text{ puis } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}_n$$

Exercice 8.1.2 Oral CCINP ★★

Soit $A(x) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $A_{i,j} = x + i + j - 2$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Soit $d_n(x) = \det(A(x))$.

— Donner $d_2(x)$ et $d_3(x)$.

— Pour $n \geq 4$ montrer que les colonnes de $A(x)$ sont liées. Conclusion ?

Exercice 8.1.3 Oral Mines Ponts ★★★

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $A_{i,j} = P(x + i + j - 2)$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$. A est-elle inversible ? *Indication : on pourra utiliser une formule de Taylor.*

Exercice 8.1.4★Ecrit E3A PC

Donner le déterminant de $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b & d \\ c & a \end{pmatrix}$.

Exercice 8.1.5

Donner le déterminant de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $f(P) = P(X+1) + (X+1)P'(X+1)$.

Exercice 8.1.6★Oral CCINP PC

On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_{2n-1}[X])$ définie par $f(X^k) = 2X^k + 3X^{2n-1-k}$ pour tout k entre 0 et $2n-1$. Donner le déterminant de f .

Exercice 8.1.7★★

Par récurrence montrer que pour tout $n \geq 2$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n([0;1])$ on a $|\det(A)| < n!$.

Exercice 8.1.8★Déterminant compagnon

Soient $a_1, \dots, a_n, x \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $m_{i,1} = a_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $m_{i,i} = x$ pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $m_{i,i+1} = -1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $m_{i,j} = 0$ sinon. On commencera par un développement par rapport à la première colonne.

Exercice 8.1.9 Oral Centrale ★

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. La matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $m_{i,j} = a$ si $i = j$ et $m_{i,j} = b$ si $i \neq j$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ est-elle inversible ?

Exercice 8.1.10★Oral CCINP PC

On se place dans $\mathbb{R}^n$. Soit $e_1, \dots, e_n$ la base canonique. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(e_1 - x, e_2 - x, \dots, e_n - x)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8.1.11 Oral CCINP PSI ★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D_1, \dots, D_n$ ses colonnes telles que $D_k = \sum_{i \neq k} C_i$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. Calculer $\det(M)$ en fonction de $\det(A)$.

Exercice 8.1.12 Oral Mines Telecom ★

On considère l'endomorphisme u de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $u(M) = \frac{1}{3}(2M - M^T)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Donner trace et déterminant de u .

Exercice 8.1.13 Oral Mines Ponts PSI ★★★

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soient $f_1, \dots, f_n \in E$.

1. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $\det((f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n}) \neq 0$. Montrer que $f_1, \dots, f_n$ est une famille libre.
2. Réciproquement, en procédant par récurrence, montrer que si $f_1, \dots, f_n$ est libre il existe $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $\det((f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n}) \neq 0$.

Exercice 8.1.14 Oral Mines Ponts ★★

Pour tout $n \geq 2$ on pose $P_n(X) = X^n - X + 1$.

1. Montrer que P_n admet au-plus une racine réelle.
2. Donner les racines de P'_n et montrer que P_n est à racines (complexes) simples.
3. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1+r_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+r_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+r_3 \end{vmatrix}$ si r_1, r_2, r_3 sont les racines de P_3 .

2 Se ramener à une étude de suites

Exercice 8.2.1★ Oral CCINP PC Soient $(a, b) \in \mathbb{K}$ distincts. Calculer $\begin{vmatrix} a+b & b & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & a & a+b \end{vmatrix}$

Exercice 8.2.1.bis★

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On pose A_n la matrice de taille n avec des a juste sous la diagonale, des b juste au dessus de la diagonale et des $a+b$ sur la diagonale. Soit $D_n = \det(A_n)$.

1. Calculer D_1 et D_2 .
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_{n+1} = aD_n + b^{n+1}$.
3. En déduire une formule de D_n sous la forme d'une somme. Simplifier cette formule.

Exercice 8.2.2★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $m_{ij} = 2$ si $i = j$ puis $m_{ij} = 1$ si $i = j+1$ ou $i = j-1$ et $m_{ij} = 0$ sinon. Donner le déterminant de A .

Exercice 8.2.3★ Déterminant compagnon

Soient $a_1, \dots, a_n, x \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $m_{i,1} = a_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $m_{i,i} = x$ pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $m_{i,i+1} = -1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $m_{i,j} = 0$ sinon. On commencera par un développement par rapport à la dernière colonne.

Exercice 8.2.4★

Soit $a \in]0; \pi[$. On note $b = \cos(a)$. Calculer $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2b & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2b & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2b & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2b \end{vmatrix}$

Exercice 8.2.5★

Soient a, b et c trois réels avec $b \neq c$ et $n \geq 2$ un entier. On pose le déterminant de taille n : $D(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ c & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & c & a \end{vmatrix}$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = D(a+x, b+x, c+x)$.

1. Par des opérations sur les colonnes, démontrer que f est une fonction affine de x .
2. En donnant à x deux valeurs convenables, calculer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ en fonction de a, b, c et n .
3. En déduire $D(a, b, c)$ en fonction de a, b, c et n .

Exercice 8.2.6 Oral Mines Ponts ★★

On considère le déterminant $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & \dots & x \\ x & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ x & \dots & \dots & x & x+a_n \end{vmatrix}$ où $a_1, \dots, a_n, x$ sont des réels.

1. Montrer que Δ_n est un polynôme de degré inférieur ou égale à 1 en x .
2. En déduire la valeur de $\Delta_n(x)$.

3 Déterminants blocs

Exercice 8.3.1★

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$.

Exercice 8.3.2★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ avec $d \neq 0$, montrer que $\det \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} = (ad - bc)^n (\det(A))^2$.

Montrer que cette formule est aussi vraie pour $d = 0$.

Exercice 8.3.3★★

1. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec A inversible et $AC = CA$, montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$.
on utilisera une matrice bloc de la forme $\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}$ et une autre de la forme $\begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec A inversible et $AB = BA$, montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geq 0$.

4 Déterminants de VanDerMonde

Exercice 8.4.1★

Si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer que $I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1}$ est une base de l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 8.4.2★

Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. Montrer que $(X - a_0)^n, \dots, (X - a_n)^n$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 8.4.3★

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$ en utilisant un déterminant de VanDerMonde et un polynôme.

Exercice 8.4.4 Oral Centrale et CCINP ★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite montrer que la famille $((X + k)^n)_{0 \leq k \leq n}$ est libre.

Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{k=0}^n \alpha_k (X + k)^n = 0$.

1. Montrer que pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, $\sum_{k=0}^n \alpha_k (X + k)^p = 0$.
2. Montrer que pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, $\sum_{k=0}^n \alpha_k k^p = 0$. Conclure.

9. Compléments d'algèbre linéaire

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Sous-espaces vectoriels supplémentaires (cas de deux sev)

Dans tout ce paragraphe, F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

Rappel On note $F + G$ l'ensemble $\{x_F + x_G \mid (x_F; x_G) \in F \times G\}$.

Définition

On dit que la somme $F + G$ est directe si tout vecteur x de $F + G$ s'écrit de manière unique sous la forme $x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. Si la somme $F + G$ est directe, alors on la note $F \oplus G$.

Caractérisation La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Définition

On dit que F et G sont supplémentaires dans E si la somme $F + G$ est directe et si elle est égale à E . Autrement écrit, F et G sont supplémentaires dans E si :

$$F \cap G = \{0_E\} \text{ et } E = F + G$$

Dans ce cas, on peut donc écrire $E = F \oplus G$.

Propriété

On a $E = F \oplus G$ ssi, pour tout x de E , il existe un unique couple $(x_F; x_G)$ dans $F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

Idée de la démonstration

L'hypothèse "somme égale à E " fournit l'existence. L'hypothèse "somme directe" fournit l'unicité.

Exemple On a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

De plus, la décomposition d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ suivant cette somme est : $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.

Exemples

- On a $\mathbb{R}^2 = Vect(1, 0) \oplus Vect(1, 1)$.
- On a $\mathbb{K}[X] = (X^2 + 1)\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_1[X]$ par le théorème de division Euclidienne.

Propriété

On suppose ici que E est de dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) F et G sont supplémentaires dans E ;
- (ii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$;
- (iii) $E = F + G$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Définition : base adaptée

On suppose que E est de dimension finie non nulle et que F et G sont supplémentaires dans E .

On pose $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$.

On dit qu'une base $(e_1; e_2; \dots; e_n)$ de E est adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ si :

- les p premiers vecteurs forment une base de F ,
- les $n - p$ derniers vecteurs forment une base de G .

Théorème : existence de supplémentaires

Si E est de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel F de E admet (au moins) un supplémentaire G .

II - Sous-espaces vectoriels supplémentaires (cas général)

Dans tout ce paragraphe, $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

Notation On note $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ ou $\sum_{i=1}^p F_i$ l'ensemble $\left\{ \sum_{i=1}^p x_i \mid (x_1; x_2; \dots; x_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p \right\}$.

Un vecteur x appartient à $\sum_{i=1}^p F_i$ si et seulement s'il existe $(x_1; x_2; \dots; x_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^p x_i$.

Propriété L'ensemble $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ est un sous-espace vectoriel de E .

Définition

On dit que la somme $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ est directe si tout vecteur x de $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ s'écrit de manière unique sous la forme $x_1 + x_2 + \dots + x_p$ avec $(x_1; x_2; \dots; x_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p$.

Si la somme $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ est directe, alors on la note $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$ ou $\bigoplus_{i=1}^p F_i$.

Remarque

Si la somme $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ est directe, alors, pour tous $i, j \in \llbracket 1; p \rrbracket$ tels que $i \neq j$, $F_i \cap F_j = \{0_E\}$.
Par contre, la réciproque est fautive en général.

Remarque Le vecteur nul 0_E appartient toujours à $F_1 + F_2 + \dots + F_p$. On a en effet :

$$0_E = \underbrace{0_E}_{\in F_1} + \underbrace{0_E}_{\in F_2} + \dots + \underbrace{0_E}_{\in F_p}$$

Caractérisation

La somme $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ est directe si et seulement si la décomposition du vecteur nul suivant cette somme est unique, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall (x_1; x_2; \dots; x_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p, \quad 0_E = \sum_{i=1}^p x_i \Rightarrow (\forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, x_j = 0_E)$$

Définition

On dit que $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont supplémentaires dans E si la somme $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ est directe et égale à E .
Dans ce cas, on peut donc écrire $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$.

Propriété

On a $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$ si et seulement si, pour tout x de E , il existe un unique p -uplet $(x_1; x_2; \dots; x_p)$ dans $F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p$ tel que $x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$.

Propriété On suppose ici que E est de dimension finie.

- On a toujours : $\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$.
- De plus, $\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$ si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe.

Définition : base adaptée ♡

On suppose que E est de dimension finie non nulle et que $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont supplémentaires dans E .
On pose $n = \dim(E)$ et, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $n_i = \dim(F_i)$. On a en particulier $n = n_1 + n_2 + \dots + n_p$.
On dit qu'une base $(e_1; e_2; \dots; e_n)$ de E est adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$ si :

- les n_1 premiers vecteurs forment une base de F_1 ,
- les n_2 vecteurs suivants forment une base de F_2 ,
- ...
- les n_p derniers vecteurs forment une base de F_p .

III - Trace

Définition Soit $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle trace de A le nombre noté $\text{tr}(A)$ et défini par : $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Propriété de linéarité $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B)$

Propriété

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$$

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K}), \text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB)$$

Attention ! $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$ en général.

Propriété

Deux matrices semblables ont même trace : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in GL_n(\mathbb{K}), \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$

Définition Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit A la matrice représentative de u dans une base $\mathcal{B}$ de E .

La trace de A ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie. On appelle cet invariant la trace de u et on le note $\text{tr}(u)$.

IV - Sous-espaces vectoriels stables et endomorphismes induits

Dans tout ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $u : E \rightarrow E$ un endomorphisme.

Définition

On dit que F est stable par u si pour tout vecteur x de F , le vecteur $u(x)$ appartient encore à F (c'est-à-dire $u(F) \subset F$).

Définition Si F est stable par u , alors on peut considérer la restriction de u au départ et à l'arrivée à F . On note cette restriction u_F .

$$\begin{aligned} u_F : F &\rightarrow F \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

L'application u_F est linéaire. On dit que u_F est l'endomorphisme induit par u sur F .

Propriété Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

Si u et v commutent, alors $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont stables par v .

Propriété On suppose ici que F est de dimension finie et que $\mathcal{B} = (e_1; e_2; \dots; e_p)$ est une base de F .

Alors F est stable par u si et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, le vecteur $u(e_k)$ appartient à F .

Propriété On suppose ici que E est de dimension finie non nulle n et que F est de dimension finie non nulle p .

Soit $\mathcal{B} = (e_1; e_2; \dots; e_n)$ une base de E adaptée à F , c'est-à-dire telle que $(e_1; e_2; \dots; e_p)$ est une base de F .

Le sous-espace vectoriel F est stable par u si et seulement si la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$

avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

V - Hyperplans et formes linéaires

Dans tout ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul.

Définition On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemples si $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

- l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x; y) \mapsto ax + by$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$.
- l'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; (x; y; z) \mapsto ax + by + cz$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.
- l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}; A \mapsto \text{tr}(A)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit I un intervalle réel non vide et soit $x_0 \in I$ fixé.
L'application $\varphi : \mathcal{F}(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}; f \mapsto f(x_0)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.
- L'application $\psi : C^0([0; 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$ est une forme linéaire sur $C^0([a, b], \mathbb{R})$.

Remarque : si f est une forme linéaire comme $\text{Im}(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}$ on a $\text{Im}(f) = \{0\}$ ou $\text{Im}(f) = \mathbb{K}$. Ainsi si f n'est pas la forme linéaire nulle on a f surjective.

Définition

On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel H admettant un supplémentaire de dimension 1.

Autrement dit, un hyperplan est un sous-espace vectoriel H pour lequel il existe $a \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}a$.

Propriété

Un sous-espace vectoriel H est un hyperplan si et seulement s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$.
Autrement dit, H est un hyperplan de E si et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E .

Corollaire Si H est un hyperplan de E , alors, pour tout $a \in E \setminus H$, on a $E = H \oplus \mathbb{K}a$.

Exemples si $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

- Si (a, b) non nul, l'ensemble $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^2$.
- Si (a, b, c) non nul, l'ensemble $\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
- l'ensemble $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{Tr}(A) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit I un intervalle réel non vide et soit $x_0 \in I$ fixé.
L'ensemble $\{f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K}) \mid f(x_0) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Propriété Supposons E de dimension finie n non nulle.

ICI un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si $\dim(H) = n - 1$.

Exemple

L'ensemble $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{Tr}(A) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et est donc de dimension $n^2 - 1$.

Complement de cours chapitre 9

∝ Démonstration de cours possible : $\sum_{k=1}^p F_k$ est un sous espace vectoriel de E par caractérisation.

Remarque : l'ordre importe peu car la loi $+$ est commutative dans E , par exemple $F_1 + F_3 + F_2 = F_2 + F_1 + F_3$.

∝ Démonstration de cours 1 démonstration de la propriété de caractérisation

Remarque : dans $\mathbb{R}^2$, $Vect(1, 0) + Vect(1, 1) + Vect(1, 2)$ n'est pas une somme directe même si les intersections deux à deux sont toutes réduites à $\{(0, 0)\}$.

Proposition

— Si $x_1, \dots, x_p$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E alors

$$\forall i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \quad Vect(x_1, \dots, x_i) \oplus Vect(x_{i+1}, \dots, x_p) = Vect(x_1, \dots, x_p)$$

— En particulier **[Principe de fractionnement d'une base]** si E est de dimension finie $n \geq 2$, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors si on décompose cette base en une partition $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_p$ on a $E = \bigoplus_{i \in \{1, \dots, p\}} Vect(\mathcal{B}_i)$.

— Inversement si E est de dimension finie, si $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$, si $\mathcal{B}_i$ est une base de F_i pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ alors la concaténation des $\mathcal{B}_i$ fournit une base de E . **On la nomme base adaptée à la somme** $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$.

∝ Démonstration de cours 2 (le troisième point)

Exemples :

- Dans E de dimension finie non nulle, si p est un projecteur, on sait que $E = Ker(p) \oplus Ker(p - id_E)$. Si on note $r = rg(p) = n - \dim(Ker(p))$. Alors la matrice de p dans une base adaptée à cette somme directe possède une forme très simple : $\begin{pmatrix} 0_{n-r} & 0_{n-r, r} \\ 0_{r, n-r} & I_r \end{pmatrix}$.
- Pour montrer que $E = Vect(u_1) \oplus Vect(u_2, u_3) \oplus Vect(u_4)$ on peut essayer de montrer que u_1, u_2, u_3, u_4 est une base de E .
- Pour rappel : tout sous espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie admet un supplémentaire G . En effet on considère $\mathcal{B}_1$ une base de F . Avec le théorème de la base incomplète on obtient $\mathcal{B}$ une base de E où $\mathcal{B}$ s'écrit $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Alors $G = Vect(\mathcal{B}_2)$ convient.

∝ Idée de démonstration Si E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces vectoriels de E . Alors $\dim\left(\sum_{k=1}^p F_k\right) \leq \sum_{k=1}^p \dim(F_k)$.

Si on prend une base $\mathcal{B}_k$ de chaque F_k alors la famille $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant toutes ces bases est une famille génératrice de $\sum_{k=1}^p F_k$ donc la dimension de $\sum_{k=1}^p F_k$ est inférieure au nombre de vecteurs de $\mathcal{B}$.

∝ démonstration de cours 3 : lorsque les deux produits ont un sens on a $tr(AB) = tr(BA)$.

∝ Démonstration de cours 4 : si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, si u et v commutent. Alors $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont stables par v .

Remarque : en particulier si $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont stables par u .

Proposition Si E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Si $u \in \mathcal{L}(E)$.

— Si F est un sous espace vectoriel de E de dimension p .

Si $\mathcal{B} : e_1, \dots, e_n$ est une base de E telle que $e_1, \dots, e_p$ soit une base de F .

Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ est la matrice de u dans $\mathcal{B}$ avec A un bloc carré de taille p .

Alors F est stable par u ssi le bloc C est nul.

— Plus généralement si $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$. Si $\mathcal{B}$ est une base adaptée à cette somme. Alors

— la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs ssi $u(F_i) \subset F_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

— la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieur par blocs ssi $u(F_i) \subset F_1 + \dots + F_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Autre exemple : si $E = F \oplus G \oplus H$, si $\mathcal{B}$ est une base adaptée à cette somme. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est de matrice M dans $\mathcal{B}$

avec M définie par blocs par $M = \begin{pmatrix} 0 & C & 0 \\ A & 0 & 0 \\ B & 0 & D \end{pmatrix}$ alors on peut dire que :

Théorème Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit H un sous espace vectoriel de E . On a équivalence entre

i) $\dim(H) = \dim(E) - 1$

ii) H admet un supplémentaire de dimension 1 : il existe $a \in E$ non nul tel que $E = H \oplus \mathbb{K}a$.

iii) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle : il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$.

Si H vérifie l'une de ces conditions on dit que H est un hyperplan de E . On dit de plus que l'équation $\varphi(x) = 0$ est une équation de H .

∝ **Démonstration de cours 5**

Compétences

- ★ Savoir montrer que $F + G = F \oplus G$ en montrant que $F \cap G = \{0_E\}$.
- ★ Savoir montrer que $E = F \oplus G$ en montrant que $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.
- ★★ Savoir montrer que $E = F + G$ en trouvant pour chaque $x \in E$, par analyse synthèse, $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y + z$. Par exemple $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
- ★★ Comprendre la notion de base adaptée à une somme directe et savoir utiliser cette base dans les calculs matriciels.
- ★★★ Savoir montrer qu'une somme de plusieurs sev est une somme directe.
 - ★ Savoir calculer la trace d'une matrice.
 - ★ Savoir montrer que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
 - ♠ Penser que du coup $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BAC)$.
- ★★ Savoir montrer qu'un sev F est stable par u : on montre que pour tout $x \in F$ on a $u(x) \in F$.
- ★★ Savoir montrer qu'un sev F est stable par u en montrant qu'une base de F est stable par u .
- ★★ Savoir traduire matriciellement qu'un sev F est stable par u : dans une base adaptée la matrice est triangulaire par blocs.
- ★★ Connaître la définition d'un hyperplan et d'une forme linéaire et savoir que tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
- ★ Pour une forme linéaire f comprendre que $f(x)$ est un scalaire pour tout $x \in E$ et du coup dans les calculs avec des endomorphismes on peut le "sortir" par linéarité.

Chapitre 9 : complément d'algèbre linéaire

1 Manipuler des sommes directes/des supplémentaires

Exercice 9.1.1★♡

Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ en utilisant une application linéaire puis sans utiliser une application linéaire.

Exercice 9.1.2★

Montrer que $C^0([0; 1], \mathbb{R}) = F \oplus G$ avec F l'ensemble des fonctions de $C^0([0; 1], \mathbb{R})$ d'intégrale nulle sur $[0; 1]$ et G l'ensemble des fonctions de $C^0([0; 1], \mathbb{R})$ qui sont constantes sur $[0; 1]$.

Exercice 9.1.3★CCINP

Montrer que $\mathbb{R}^n = Vect((1, 1, \dots, 1)) + \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$.

Exercice 9.1.4 Oral CCINP 2019 ★

Soient D la droite d'équations $x = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$ et P le plan d'équation $x + y + z = 0$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = D \oplus P$. Soit f la projection sur P parallèlement à D . Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9.1.5★

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Si $f^2 = id_E$. Montrer que $Ker(f - id_E) \oplus Ker(f + id_E) = E$.

Exercice 9.1.6★★ Mines Telecom CCINP

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = Ker(\varphi^2) \oplus Ker(\varphi - 2id)$.

2. Calculer $\varphi(-1, 1, 0)$. Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.1.7 Oral CCINP ★★

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$.

1. Montrer que f n'est pas bijective.

2. Montrer que $E = Ker(f) \oplus Ker(f^2 + id)$.

3. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(f(x), f^2(x))$ soit une famille libre de $Ker(f^2 + id)$.

4. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.1.8 Oral Mines Ponts ★★

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$, $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

1. On suppose E de dimension finie, montrer que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont supplémentaires.

2. On ne suppose plus E de dimension finie, montrer que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont supplémentaires.

Exercice 9.1.9★

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $Ker(f - id_E) + Ker(f - 2id_E) + Ker(f - 3id_E)$ est une somme directe.

Exercice 9.1.10★

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ montrer que la somme $F + G + H$ est directe si F est l'ensemble des fonctions constantes, G l'ensemble des fonctions impaires et H l'ensemble des fonctions nulles sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 9.1.11 Oral CCINP ★★

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Soient $f_1, \dots, f_n$ des endomorphismes de E tels que $f_1 + \dots + f_n = Id_E$ et $f_i \circ f_j = 0$ pour tout $i \neq j$ entre 1 et n .

Montrer que f_i est un projecteur pour tout i entre 1 et n . Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^n Im(f_i)$.

Exercice 9.1.12★★

Soient p, q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E . Montrer que si p et q commutent alors

$$E = Im(p) \cap Im(q) \oplus Ker(p) \cap Im(q) \oplus Im(p) \cap Ker(q) \oplus Ker(p) \cap Ker(q)$$

Exercice 9.1.13CCINP**

On appelle matrice magique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la somme des coefficients de chaque ligne est égale à un même nombre, telle que la somme des coefficients de chaque colonne est égale à ce même nombre et telle que la somme des coefficients diagonaux est aussi égale à ce même nombre.

1. Montrer que $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.
2. Soit E l'ensemble des matrices symétriques magiques de trace nulle.
Soit F l'ensemble des matrices antisymétriques magiques.
Soit G l'ensemble des matrices dont tous les coefficients sont égaux.
Montrer que $\mathcal{M} = E \oplus F \oplus G$.

2 Endomorphisme induit / base adaptée**Exercice 9.2.1★♡**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A^2 = A$. Montrer que A est semblable à une matrice bloc de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.2.2★

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(u - 3id) \oplus \text{Ker}(u - 2id)$.

1. Montrer que $u^2 = 5u - 6id$.
2. Montrer que l'on peut définir l'endomorphisme induit par u sur $\text{Ker}(u - 3id)$ et caractériser cet endomorphisme.

Exercice 9.2.3★Oral Centrale**

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ telles que $f^2 = g^2 = Id_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1. Montrer que n est pair
2. Montrer qu'il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que les matrices de f et g dans $\mathcal{B}$ soient $\begin{pmatrix} I_p & 0_p \\ 0_p & -I_p \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0_p & I_p \\ I_p & 0_p \end{pmatrix}$.

Exercice 9.2.4★Oral CCINP

Soient $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $e_1 = \cos$, $e_2 = \sin$, $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

Pour tout $f \in E$ on pose $T_f : t \mapsto (10f(0) - 6f'(0)) \cos(t) + (12f(0) - 7f'(0)) \sin(t)$. On pose $u : f \mapsto T_f$.

1. Montrer que e_1 et e_2 sont linéairement indépendants.
2. Montrer que u permet de définir un endomorphisme induit sur F .
3. (5/2) Donner les valeurs propres de cet endomorphisme.

3 Manipuler/reconnaître des hyperplans. Formes linéaires**Exercice 9.3.1**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la dimension de $\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(12) = P(27)\}$.

Exercice 9.3.2★

Justifier que $\{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid X + 1 \text{ divise } P\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$ et en donner une base.

Exercice 9.3.3**

Soit H_1 et H_2 deux hyperplans d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Si $x \in E$ on notera $(x_1, \dots, x_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

1. Justifier qu'il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $x \in H_1$ ssi $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$.
2. Justifier qu'il existe $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $x \in H_2$ ssi $b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0$.
3. On pose $P(X) = (a_1 + \dots + a_nX^{n-1})(b_1 + \dots + b_nX^{n-1})$. En s'aidant de P montrer que $H_1 \cup H_2 \neq E$.

Exercice 9.3.4★

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts. Montrer que $E = H_1 + H_2$ puis que $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

Exercice 9.3.5★

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in E$ non nul. Soit f une forme linéaire non nulle de E . On pose $g(x) = f(x)u$ pour tout $x \in E$.

1. Vérifier que l'on a un endomorphisme de E . Quel est son rang?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que g soit un projecteur.

Exercice 9.3.6CCINP**

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f une forme linéaire non nulle.

1. Justifier qu'il existe $a \in E$ tel que $f(a) = 1$.
2. On pose $u(x) = x + \alpha f(x)a$ pour tout $x \in E$. On a $u \in \mathcal{L}(E)$. Trouver une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale (avec des 1 sur les $n - 1$ premiers termes de la diagonale).

Exercice 9.3.7CCINP**

Soient E un espace vectoriel de dimension n , ℓ une forme linéaire non nulle sur E et a un vecteur de E non nul. On pose $f : x \in E \mapsto \ell(a)x - \ell(x)a$.

Montrer que f est un endomorphisme de E . Calculer $f(a)$. Déterminer $\text{Ker}(f)$. Calculer $f(\text{Ker}(\ell))$.

On suppose que $\ell(a) = 0$. Calculer f^2 . En déduire un polynôme annulateur de f .

4 Manipuler la trace

Exercice 9.4.1*

Si E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Si $E = F \oplus G$. Donner la trace de la symétrie par rapport à F de direction G . Quelle est la trace de $f : M \mapsto M^T$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

Exercice 9.4.2**

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = A$. Montrer que A n'est pas inversible.

Exercice 9.4.3*

Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \text{Vect}(I_n) \oplus \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$.

Exercice 9.4.4**

Trouver l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\text{tr}(AM) = \frac{1}{n} \text{tr}(A) \text{tr}(M)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 9.4.5 Oral CCINP **

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour $1 \leq i, j, k, \ell \leq n$, donner $E_{i,j}E_{k,\ell}$.
2. Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(AB) = f(BA)$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que f est colinéaire à la trace.
3. Soit g un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $g(AB) = g(BA)$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $g(I_n) = I_n$. Montrer que g conserve la trace.

Exercice 9.4.6 Oral mines Ponts **

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $M \mapsto M + \text{tr}(AM)A$.

Calculer $\varphi^2(M)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et trouver une relation entre φ^2 , φ et Id .

Exercice 9.4.7***

Soit $q \in \mathbb{N}^*$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^q = I_n$. On pose $B = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} A^k$.

1. Montrer que $B^2 = B$. En déduire $\heartsuit$ que $\text{tr}(B) = \text{rg}(B)$.
2. En déduire que $\dim(\text{Ker}(A - I_n)) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \text{tr}(A^k)$.

Exercice 9.4.8**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Soit $\varphi : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto X - \text{tr}(X)A$.

1. Montrer que φ est non injective si et seulement si $\text{tr}(A) = 1$.
2. On suppose $\text{tr}(A) = 1$ dans cette question. Reconnaître en détail la nature géométrique de φ .
3. Résoudre en général l'équation $\varphi(X) = B$ où $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est fixée.

Exercice 9.4.9**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : M \mapsto \frac{1}{2} (M + M^T) - \frac{\text{tr}(M)}{n} I_n$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\text{Im}(f) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \text{Ker}(\text{tr})$ et $\text{Ker}(f) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \text{Vect}(I_n)$.

10. Diagonalisation - Trigonalisation

Dans tout ce chapitre, on considère E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie n , $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

I - Valeurs propres et vecteurs propres

Définition

- Une valeur propre de u est un scalaire λ pour lequel il existe $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$.
- Une valeur propre de A est un scalaire λ pour lequel il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $AX = \lambda X$.
- Un vecteur propre de u est un vecteur $x \in E$ non nul pour lequel il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
- Un vecteur propre de A est un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul pour lequel il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$.

Définition

- Le spectre de u est l'ensemble des valeurs propres de u . On le note $\text{Sp}(u)$.
- Le spectre de A est l'ensemble des valeurs propres de A . On le note $\text{Sp}(A)$.

Définition

- Soit λ une valeur propre de u .
Le sous-espace propre de u associé à λ est l'ensemble $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) = \{x \in E; u(x) = \lambda x\}$ noté $E_\lambda(u)$.
- Soit λ une valeur propre de A .
Le sous-espace propre de A associé à λ est l'ensemble $\text{Ker}(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}); AX = \lambda X\}$ noté $E_\lambda(A)$.

Remarque Le sous-espace propre associé à une valeur propre λ est constitué des vecteurs propres associés à λ **et du vecteur nul**.

Propriété

Toute famille de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

Propriété La somme des sous-espaces propres de u est une somme directe.

II - Polynôme caractéristique

Propriété et Définition

- L'application $\lambda \mapsto \det(\lambda \text{id}_E - u)$ est polynomiale, unitaire et de degré n .
On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme χ_u de $\mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \chi_u(\lambda) = \det(\lambda \text{id}_E - u)$$

- On définit de même le polynôme caractéristique de A comme le polynôme χ_A de $\mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

Propriété Le terme constant de ce polynôme est $(-1)^n \det(u)$. Le terme de degré $n - 1$ de χ_u est $-tr(u)$.

Propriété Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.

Corollaire

- Un endomorphisme u de $\mathcal{L}(E)$ possède au plus n valeurs propres (avec $n = \dim E$).
- Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au plus n valeurs propres.
- Pour une matrice triangulaire, les valeurs propres sont exactement les éléments diagonaux de la matrice.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors A admet au-moins une valeur propre par d'Alembert Gauss.

Propriété

- Un endomorphisme u est bijectif si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de u .
- Une matrice carrée A est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A .

Propriété Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique et donc les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités.

Définition

On appelle multiplicité, notée m_λ , d'une valeur propre λ sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

Propriété Soit λ une valeur propre (d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée).

La dimension du sous-espace propre associé à λ est inférieure ou égale à la multiplicité de λ .

Application Si une valeur propre λ d'une matrice A est de multiplicité 1, comme la dimension du sous-espace propre associé est comprise entre 1 et cette multiplicité, on a nécessairement $\dim(E_\lambda(A)) = 1$.

III - Diagonalisation

Définition

- On dit que u est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.
- On dit que A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

Propriété (CNS) Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est diagonalisable ;
- (ii) il existe une base de E formée de vecteurs propres de u ;
- (iii) E est égal à la somme (directe) des sous-espaces propres de u ;
- (iv) la somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à la dimension de E ;
- (v) le polynôme caractéristique de u est scindé et, pour toute valeur propre λ , la dimension du sous-espace propre associé à λ est égale à la multiplicité de λ .

Remarque On énonce des CNS similaires pour la diagonalisabilité d'une matrice carrée A .

Propriété (CS) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède n valeurs propres deux à deux distinctes, alors A est diagonalisable.

Propriété (CS) - théorème spectral (première version)

Si A est une matrice symétrique réelle de taille n alors $Sp(A) \subset \mathbb{R}$ et A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

IV - Polynômes annulateurs

Définition Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On pose $P(u) = \sum_{k=0}^d a_k u^k \in \mathcal{L}(E)$ et $P(A) = \sum_{k=0}^d a_k A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ici u^k renvoie à la composition d'endomorphismes et A^k renvoie au produit matriciel avec $u^0 = \text{id}_E$ et $A^0 = I_n$.

Propriété Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

Alors $P(u)$ et $Q(u)$ commutent et $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) = (PQ)(u) = (QP)(u)$.

Définition

- On dit que P est un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- On dit que P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0_n$.

Exemple

- Si p est un projecteur de E , alors un polynôme annulateur de p est $X^2 - X$.
- Si s est une symétrie de E , alors un polynôme annulateur de s est $X^2 - 1$.

Propriété Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de u . Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on a : $u(x) = \lambda x \Rightarrow P(u)x = P(\lambda)x$. Ainsi si λ est une valeur propre de u alors λ est une racine de P .

Conséquence Les valeurs propres sont à chercher parmi les racines d'un polynôme annulateur.

Théorème de Cayley-Hamilton

- Le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u ainsi $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- Le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A ainsi $\chi_A(A) = 0_n$.

Théorème (CNS)

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples.
Une matrice est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Exemple Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.

Théorème (CNS)

L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$ pour polynôme annulateur.

Une matrice A est diagonalisable si et seulement s'il admet $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)$ pour polynôme annulateur.

V - Retour sur la notion de sous-espace vectoriel stable

Propriété Soit x un vecteur non nul de E .

La droite $\text{Vect}(x)$ est stable par u si et seulement si x est un vecteur propre de u .

Propriété

Si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent, alors les sous-espaces propres de u sont stables par v .

Propriété

Soit F un sous-espace vectoriel non nul de E stable par u et soit u_F l'endomorphisme de F induit par u .

Le polynôme caractéristique de u_F divise le polynôme caractéristique de u .

Propriété

Soit F un sous-espace vectoriel non nul de E stable par u et soit u_F l'endomorphisme de F induit par u .

Si u est diagonalisable, alors u_F est diagonalisable.

VI - Trigonalisation**Définition**

- On dit que u est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.
- On dit que A est trigonalisable si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire s'il existe T triangulaire supérieure et P inversible telles que $A = PTP^{-1}$.

Remarque

Si la matrice de u dans une base $(e_1; e_2; \dots; e_n)$ est triangulaire inférieure, alors on peut montrer que la matrice de u dans la base $(e_n; e_{n-1}; \dots; e_1)$ est triangulaire supérieure.

Propriété (CNS)

- Un endomorphisme u de $\mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_u est scindé.
- Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_A est scindé.

Corollaire

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors tout endomorphisme u de $\mathcal{L}(E)$ est trigonalisable.
- Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Propriété

- La trace est égale à la somme des valeurs propres complexes comptées avec multiplicité.
- Le déterminant est égal au produit des valeurs propres complexes comptées avec multiplicité.

VII - Applications

1) Calculer les puissances d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable : il existe D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$A^k = (PDP^{-1})^k = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})}_{k \text{ fois}} = P \underbrace{DD \dots D}_{k \text{ fois}} P^{-1} = PD^k P^{-1}$$

Rédiger une récurrence pour une démonstration rigoureuse.

2) Étudier une suite définie par une relation de récurrence linéaire

Propriété : matrice compagnon (EXERCICE classique)

Soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ et soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de A est égal à :

$$\chi_A(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_2X^2 - a_1X - a_0$$

De plus, pour toute valeur propre λ_0 de A , le sous-espace propre associé est $\text{Ker}(A - \lambda_0 I_n) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_0 \\ \lambda_0^2 \\ \vdots \\ \lambda_0^{n-1} \end{pmatrix}$.

Exemple

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par ses premiers termes $u_0 = 1, u_1 = 0, u_2 = -1, u_3 = 3$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+4} = 3u_{n+3} + 11u_{n+2} - 3u_{n+1} - 10u_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \\ u_{n+4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10 & -3 & 11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix}$.

On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10 & -3 & 11 & 3 \end{pmatrix}$, on obtient $U_{n+1} = AU_n$ puis $U_n = A^n U_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On factorise ensuite le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(X) = X^4 - 3X^3 - 11X^2 + 3X + 10 = \dots = (X+2)(X+1)(X-1)(X-5)$$

On en déduit que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 5 \\ (-2)^2 & (-1)^2 & 1^2 & 5^2 \\ (-2)^3 & (-1)^3 & 1^3 & 5^3 \end{pmatrix}$

Pour obtenir u_n , il reste à calculer le premier coefficient de U_n , c'est-à-dire de $PD^n P^{-1} U_0$.

3) Déterminer le commutant d'une matrice carrée

Le commutant de la matrice A est l'ensemble des matrices M qui commutent avec A ; il est souvent noté $\mathcal{C}(A)$.

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$$

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on cherche parfois la dimension et une base.

Supposons A diagonalisable : il existe D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

On peut alors écrire, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \Leftrightarrow DP^{-1}MP = P^{-1}MPD \Leftrightarrow DN = ND$$

avec $N = P^{-1}MP$.

On en déduit que le commutant de A et le commutant de D sont isomorphes via l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C}(A) &\rightarrow \mathcal{C}(D) \\ M &\mapsto P^{-1}MP \end{aligned}$$

Pour déterminer $\mathcal{C}(A)$, il suffit donc de déterminer $\mathcal{C}(D)$.

4) Résoudre un système différentiel linéaire

Exemple Soit (S_0) le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 3x - y + 2z \\ y' = -2x + 4y + 2z \\ z' = x - y + 4z \end{cases}$$

où les inconnues sont les fonctions x, y et z qui appartiennent à $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Ainsi le système (S_0) s'écrit $X' = AX$.

Après calculs, on montre que A est diagonalisable et que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient ainsi :

$$X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X$$

On pose ensuite $Y = P^{-1}X$. La matrice P^{-1} est indépendante de la variable t donc $Y' = (P^{-1}X)' = P^{-1}X'$.

On obtient donc :

$$X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$$

Soit enfin $f, g, h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $Y = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$. Le nouveau système différentiel $Y' = DY$ s'écrit $\begin{cases} f' = 2f \\ g' = 4g \\ h' = 5h \end{cases}$.

Il existe $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f(t) = \lambda e^{2t} \\ g(t) = \mu e^{4t} \\ h(t) = \nu e^{5t} \end{cases}$.

Pour conclure, il suffit d'écrire :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda e^{2t} \\ \mu e^{4t} \\ \nu e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^{2t} + \mu e^{4t} + \nu e^{5t} \\ \lambda e^{2t} + \mu e^{4t} \\ \mu e^{4t} + \nu e^{5t} \end{pmatrix}$$

Complement de cours chapitre 10

1 Valeurs propres. Vecteurs propres.

Une première proposition pour expliquer d'où vient la définition de la notion de valeur propre.

Proposition Soit $x \in E$ non nul. Soit $D = Vect(x)$. Alors D est stable par u ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

∝ Démonstration à savoir faire

- En effet si D est stable par u alors comme $x \in D$ alors $u(x) \in D$ donc comme $D = Vect(x)$ il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
- Inversement si $D = Vect(x)$ et si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$ alors si $y \in D$ il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $y = \alpha x$ et alors $u(y) = \alpha \lambda x \in D$. Donc D est stable par u .

Remarques :

- à une valeur propre donnée il existe plusieurs vecteurs propres associés
- à un vecteur propre donné il n'existe qu'une seule valeur propre associée
- $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u ssi $E_\lambda(u) \neq \{0_E\}$ ssi $\lambda id_E - u$ est non injectif ssi $u - \lambda id_E$ est non injectif ssi $\chi_u(\lambda) = 0$.
- $E_\lambda(u)$ est un sous espace vectoriel de E car c'est un noyau d'application linéaire.

Exemples :

- Etudions ce qui se passe pour $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par $u(x, y) = (y, x)$.
- Etudions ce qui se passe pour $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$ définie par $u(P) = P'$.
- Etudions ce qui se passe pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

∝ Démonstration de cours 1 : toute famille de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est une famille libre.

Proposition Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ commutent alors tout sous espace propre de f est stable par g .

∝ savoir en faire la démonstration : si λ est une valeur propre de f . Si $x \in E_\lambda(f)$ alors

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x) \quad \text{donc} \quad g(x) \in E_\lambda(f) \quad \text{donc} \quad E_\lambda(f) \text{ est stable par } g$$

Application : avec les mêmes notations, si $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(f)$, si $\mathcal{B}$ est une base adaptée à cette somme directe, si f et g commutent alors les matrices de f et de g ont des formes particulières à savoir trouver et, si, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on note h_i l'endomorphisme induit par g sur E_{λ_i} alors χ_f et χ_g ont des formes particulières à savoir trouver.

2 Polynôme caractéristique

Remarques :

- On peut justifier que le polynôme caractéristique est bien un polynôme et qu'il est unitaire et de degré n en effectuant des développements successifs par rapport à la première colonne (et donc rigoureusement par une récurrence).
- On a $\chi_u(\lambda) = \det(\lambda id_E - u) = (-1)^n \det(u - \lambda id_E)$.

Exemples :

- Calculons le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ puis de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On suppose que $E = F \oplus G$ avec $F \neq \{0_E\}$ et $G \neq \{0_E\}$. Calculons le polynôme caractéristique de p un projecteur sur F de direction G .
- Pareil pour $u : P \mapsto P'$ définie sur $\mathbb{R}_3[X]$.

∝ Démonstration de cours 2 : les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.

Exemples :

1. étudions ce qui se passe pour $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. étudions ce qui se passe pour I_3 puis pour $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

∝ démonstration de cours 3 : deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

∝ démonstration de cours 4 : Si λ_0 valeur propre de u alors $1 \leq \dim(E_{\lambda_0}(u)) \leq m_{\lambda_0}$.

Exemple : pour une matrice dont le polynôme caractéristique est $(X-1)^2(X-2)$ alors

- 2 est une valeur propre et $\dim(E_2(\lambda)) = 1$
- 1 est une valeur propre et $\dim(E_1(\lambda)) = 1$ ou 2

Regardons pour la matrice D précédente.

Regardons aussi pour $u : P \mapsto P'$ définie sur $\mathbb{R}_3[X]$.

Remarque ♡ : avec la même démonstration, si F est un sous espace vectoriel de E stable par u alors le polynôme caractéristique de l'endomorphisme de F induit par u divise le polynôme caractéristique de u .

3 Diagonalisation

Remarques :

- une base dans laquelle la matrice de u est diagonale est formée de vecteurs propres de u
- Si $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale alors la matrice D contient sur sa diagonale les valeurs propres de A (car $\chi_A = \chi_D$)
- et la matrice P contient des vecteurs propres associés aux valeurs propres de A (nous reviendrons sur ce point dans les exemples)
- Si $Sp(A) = \emptyset$ (impossible dans $\mathbb{C}$) alors A n'est pas diagonalisable car A n'admet aucune valeur propre.

∝ Idée de démonstration de (iii) et (iv) : Si u diagonalisable, notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u ,

— on sait que $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$ est une somme directe

— on sait alors, propriété du chapitre 9, que $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u) = E$ ssi $\sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(u)) = \dim(E)$

— si $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u) = E$ alors en juxtaposant les bases des $E_{\lambda_i}(u)$ on a une base de E . Cette base est constituée uniquement de vecteurs propres donc u est bien diagonalisable.

∝ Idée de démonstration de (v) : on suppose u diagonalisable, notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u ,

— on sait que $\dim(E_{\lambda_i}(u)) \leq m_{\lambda_i}$ pour tout i entre 1 et p donc $\sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(u)) \leq \sum_{i=1}^p m_{\lambda_i}$

— On a $\sum_{i=1}^p m_{\lambda_i} \leq \deg(\chi_u) = n = \dim(E)$

— Ainsi u est diagonalisable ssi $\sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(u)) = \dim(E)$ ssi il y a égalité dans toutes les inégalités précédentes ssi χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\dim(E_{\lambda}(u)) = m_{\lambda}$ pour tout $\lambda \in Sp(u)$.

Exemples :

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est elle diagonalisable? Si oui la diagonaliser.
2. u définie sur $\mathbb{R}_1[X]$ par $u(P) = X(X+1)P' - XP$ est elle diagonalisable? Si oui trouver une base formée de vecteurs propres.
3. $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est elle diagonalisable? Si oui la diagonaliser. Pareil pour $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4 Polynômes annulateurs

∝ **démonstration de cours 5** ♡♡ les valeurs propres sont parmi les racines d'un polynôme annulateur.

∝ **Démonstration de cours 6** ♡ si u est diagonalisable alors $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de u .

ERREUR FATALE : dire que u est diagonalisable ssi χ_u est scindé à racines simples

Remarques :

- Si $\dim(E) = n$, comme $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie égale à n^2 la famille $id_E, u, \dots, u^{n^2}$ est nécessairement liée donc u admet toujours au-moins un polynôme annulateur
- Attention si on a P un polynôme annulateur de u on ne peut pas dire que toutes les racines de P sont valeurs propres de u . Il n'y a pas équivalence.
Par exemple si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $(X-2)(X-1)(X-50)$ est annulateur de A bien que 50 ne soit pas une valeur propre de A .

Proposition Si u est diagonalisable. Si F est un sous espace vectoriel stable par u alors l'endomorphisme de F induit par u est diagonalisable.

Matriciellement si $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ est une matrice bloc avec B et D matrices carrées. Alors si A est diagonalisable on a B qui est diagonalisable (et D aussi).

∝ **Idée ♡** : il existe P un polynôme annulateur de A scindé et à racines simples alors on vérifie sans peine que $P(A) = \begin{pmatrix} P(B) & \bullet \\ 0 & P(D) \end{pmatrix}$ donc P est aussi annulateur de B donc B est diagonalisable.

6 Trigonalisation

Méthode : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit f canoniquement associé.

- On cherche les valeurs propres de A
- On cherche les sous espaces propres de A
- Pour les valeurs propres où $\dim(E_\lambda) \neq m_\lambda$ on cherche une famille de vecteurs $x_1, \dots, x_{m_\lambda}$ telle que $f(x_1) = \lambda x_1$ et $f(x_k) = x_k + \varepsilon_k x_{k-1}$ pour tout $k \in \{2, \dots, m_\lambda\}$ où $\varepsilon_k \in \{0; 1\}$.
- On montre que la concaténation de tous les vecteurs trouvés est bien une base de $\mathbb{K}^n$

Exemples :

- montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice triangulaire de la forme $\begin{pmatrix} \bullet & 1 \\ 0 & \bullet \end{pmatrix}$.
- Trigonaliser $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Chapitre 10 : Diagonalisation - Trigonalisation

Dans mes exercices l'espace vectoriel considéré est supposé non nul même si cela n'est pas précisé

1 Eléments propres

Exercice 10.1.1★

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit ψ définie sur E par $\psi(f) = f'$ pour tout $f \in E$. Trouver les éléments propres de ψ .

Exercice 10.1.2★♡

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que si λ est une valeur propre non nulle de $f \circ g$ alors λ est une valeur propre de $g \circ f$.
2. Montrer que si 0 est une valeur propre de $f \circ g$ alors 0 est une valeur propre de $g \circ f$.

Exercice 10.1.3★★♡

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie. On suppose que $f \circ g = g \circ f$.

1. Justifier que f possède au-moins une valeur propre λ . Montrer que $E_\lambda(f)$ est stable par g .
2. Montrer que f et g admettent un vecteur propre commun.

Exercice 10.1.4 Oral CCINP ★★

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversibles telles que $AB = \omega BA$ où $\omega = e^{2i\pi/n}$.

1. Montrer qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $\lambda_0 \in Sp(A)$.
2. Montrer que A est diagonalisable et que $Sp(A) = \{\lambda_0, \lambda_0\omega, \dots, \lambda_0\omega^{n-1}\}$.

Exercice 10.1.5★★♡ Matrice compagnon

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A , trouver un vecteur propre associé à λ ainsi qu'une équation satisfaite par λ .

Exercice 10.1.6★★ Oral CCINP PSI

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant n valeurs propres deux à deux distinctes. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E .

Exercice 10.1.7★★

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = A$. Simplifier $A^k B - BA^k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A est nilpotente. On pourra utiliser l'application $\psi : M \mapsto MB - BM$

Exercice 10.1.8★♡

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

Montrer, en calculant $X^T A X$ pour X bien choisi, que la seule valeur propre réelle possible de A est 0.

Exercice 10.1.9★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $[0; 1]$. Soit λ une valeur propre de A montrer que $|\lambda| \leq n$. Donner un exemple explicite où l'on a égalité.

on pourra considérer la coordonnée la plus grande en valeur absolue d'un vecteur propre

Exercice 10.1.10★★ Mines Ponts

1. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}) \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C}), \overline{AB} = \overline{A} \overline{B}$.
2. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Soit λ une valeur propre de A (éventuellement complexe). Avec la question précédente, montrer que $\overline{\lambda} = -\lambda$.
3. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Donner la forme de χ_A . Donner $\chi_A(0)$ si n est impair. Montrer que $\det(A) > 0$ si n est pair et $0 \notin Sp(A)$.

Exercice 10.1.11★ ★ CCINP

Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec n valeurs propres distinctes. On pose $Z_u = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$.

1. Montrer que Z_u est un espace vectoriel.
2. Montrer que si $v \in Z_u$ alors $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ est stable par v pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
3. Donner la dimension des sous-espaces propres de u .
4. Soit $v \in Z_u$ montrer que tout vecteur propre de u est vecteur propre de v .
5. Montrer que $\dim(Z_u) \leq n$ puis que $(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ est une base de Z_u .

Exercice 10.1.12★ ★ MinesPonts

Soit $f \in C^0([0; 1], \mathbb{R})$, on pose $\phi(f) : x \in [0; 1] \mapsto \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$.

1. Soit F primitive de f sur $[0; 1]$, montrer que : $\forall x \in [0; 1], \phi(f)(x) = -\int_0^x F(t) dt + xF(1)$.
2. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $C^0([0; 1], \mathbb{R})$.
3. Donner noyau et image de ϕ .
4. Donner les éléments propres de ϕ .

2 Diagonalisation et polynôme caractéristique

Exercice 10.2.1★

Lorsque cela est possible diagonaliser les matrices suivantes (dans $\mathbb{R}$ si possible sinon dans $\mathbb{C}$)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -11 \\ -4 & 8 & -4 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 10.2.2

Trouver deux matrices de même trace et de même polynôme caractéristique qui ne sont pas semblables.

Exercice 10.2.3★

Lorsque cela est possible diagonaliser les matrices suivantes (dans $\mathbb{R}$ uniquement)

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 10.2.4★

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 10.2.5★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Donner le polynôme caractéristique de A .

Exercice 10.2.6 Oral CCINP 2019 ★

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$? Dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$?

Exercice 10.2.7★

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de trace nulle. Montrer que A est diagonalisable ou nilpotente.

Exercice 10.2.8★ ★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Montrer que $\det(A) = 0$ et $\det(I_n + A) = 1$.

Exercice 10.2.9★

Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables? De même pour les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10.2.10★♥

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable et trouves ses éléments propres.

Exercice 10.2.11★★★Ecrit Centrale PSI

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on pose $A_p = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On note $P_p(x) = \det(xI_p - A_p)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'à x fixé la suite $(P_p(x))$ vérifie une relation linéaire d'ordre 2 que l'on précisera.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-2| < 2$. Après avoir justifier l'existence d'un unique $\theta \in]0; \pi[$ tel que $x-2 = 2\cos(\theta)$, déterminer $P_p(x)$ en fonction de $\sin((p+1)\theta)$ et de $\sin(\theta)$.
3. Déterminer les valeurs propres de A_p . A_p est-elle diagonalisable?

3 Diagonalisation et éléments propres, rang, trace,...**Exercice 10.3.1 Oral CCINP 2019 ★**

Soit $Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note $C_1, \dots, C_5$ ses colonnes.

1. Donner le rang de Z
2. Calculer $C_1 + C_5$. En déduire un élément propre de Z .
3. Calculer $C_1 + C_5 - C_3$. En déduire un élément propre de Z .
4. Achever la réduction de Z .

Exercice 10.3.2★CCINP

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle. Soit $A = XX^T$.

1. Donner $rg(A)$ et $Sp(A)$. Donner χ_A
2. Montrer que $\det(I_n + XX^T) = 1 + X^T X$.

Exercice 10.3.3★Oral CCINP

Trouver les a réel tel que $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 2a & 2 & 2 & 2a \\ 3a & 3 & 3 & 3a \\ 4a & 4 & 4 & 4a \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 10.3.4★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 2, de trace nulle avec $A - I_n$ non inversible. Montrer que A est diagonalisable

Exercice 10.3.5★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Montrer que A est semblable à A^T .

Exercice 10.3.6★★♥

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables. On suppose que f et g commutent.

1. Montrer que les sous-espace propres de f sont stables par g .
2. Montrer alors que f et g sont diagonalisables dans une même base.

Exercice 10.3.7 Oral CCINP ★

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Soit $A = (\alpha^{i+j-2})_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que A est diagonalisable.
2. Calculer le rang de A . En déduire ses valeurs propres.
3. A quelle condition sur α , A est-elle diagonalisable?

Exercice 10.3.8 Oral Centrale ★★

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ en étudiant $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \det(xI_3 - A)$.
2. On note a, b, c ses racines. Que peut-on dire sur a, b, c ? Montrer que l'une des racines est réelle, on la note a .
3. Montrer que $a^n + b^n + c^n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que $\sum_{n \geq 0} \sin(\pi a^n)$ converge.

Exercice 10.3.9★★

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de taille ≥ 2 . Justifier que A est diagonalisable. Calculer

A^2 puis sa trace. Trouver le polynôme caractéristique et les éléments propres de A . Faire de même avec B .

Exercice 10.3.10★★♡ Oral Mines Ponts

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. On suppose que f^2 est diagonalisable.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $\text{Ker}(f^2 - \lambda^2 \text{Id}) = \text{Ker}(f + \lambda \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$.
2. Montrer, par double implication, que f est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

Exercice 10.3.11★

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice avec uniquement des 1. Soit $A = 3I_n + J$.

Diagonaliser J . Justifier que A est diagonalisable. Trouver le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A .

Exercice 10.3.12 Oral CCINP ★★

Soit $n \geq 3$. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner la dimension du noyau de A .
2. A est-elle diagonalisable? Que dire de la multiplicité de 0?
3. Montrer que A possède trois valeurs propres : 0, a , b . Donner $a + b$ et $a^2 + b^2$. En déduire a et b .

4 Diagonalisation d'endomorphisme

Exercice 10.4.1★ Oral IMT

Éléments propres de φ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exercice 10.4.2★ Oral Mines Telecom

On considère l'endomorphisme u de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $u(M) = \frac{1}{3}(2M - M^T)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner les éléments propres de u . u est-elle diagonalisable?
2. Donner trace et déterminant de u .

Exercice 10.4.3★★ Oral CCINP

Soit $n \geq 3$. Soit f définie par $f(P) = (X^2 - 1)P'' - 2XP' + 2P$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. f est-elle diagonalisable?

Exercice 10.4.4★★★ Oral CCINP

Soit $f : P \mapsto X(X - 1)P' - nXP$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Est-ce que f est diagonalisable? bijective?
3. Donner ses éléments propres. on pourra utiliser une équation différentielle

Exercice 10.4.5★Oral CCINP

Soit φ l'endomorphisme qui à $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division Euclidienne de X^2P par $X^4 - 1$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que φ est diagonalisable et donner ses éléments propres.

Exercice 10.4.6★★Oral CCINP

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Soit f définie par $f(M) = \text{tr}(A)M + \text{tr}(M)A$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que f soit diagonalisable.

5 Diagonalisation et polynôme annulateur

Exercice 10.5.1★

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. On suppose que $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, $f^2 \neq f$ et $f^3 = f^2$.

1. Montrer que si λ est valeur propre de f alors $\lambda^2 = \lambda^3$.
2. Donner les valeurs propres de f .

Exercice 10.5.2★★

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f^2 est un projecteur. Montrer que f est diagonalisable ssi $f^3 = f$.

Exercice 10.5.3 Oral CCINP 2019 ★

Soit $M \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $M^3 - 3M^2 + 2M = 0_5$, M inversible et $\text{tr}(M) = 6$. Déterminer χ_M .

Exercice 10.5.4 Oral CCINP ★★

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ annulateur de A . Montrer que les valeurs propres de A sont des racines de P .
2. Peut-on avoir $\text{tr}(A) = 0$ et $A^2 + A^T = I_3$?

Exercice 10.5.5★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 + A + 4I_n = 0_n$. Donner la trace et le déterminant de A .

Exercice 10.5.6★Oral CCINP

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

1. Soit P polynôme annulateur de M , montrer que les valeurs propres de M sont racines de P .
2. On suppose dans cette question que M est symétrique. Montrer que $\det(M) \times \text{tr}(M) \neq 0$.
3. Dans le cas général, montrer que M est diagonalisable.

Exercice 10.5.7★Oral CCINP

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on pose $\varphi(M) = M + \text{Tr}(M)I_n$.

1. Déterminer le noyau et le rang de φ .
2. Trouver un polynôme annulateur de φ .
3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
4. L'endomorphisme φ est-il inversible ? Si oui donner son inverse.

Exercice 10.5.8★Oral CCINP

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0_n$. Montrer que $\text{rg}(A)$ est pair et $\text{Tr}(A) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 10.5.9★

Soit f définie par $f(M) = M + \text{tr}(M)I_n$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Trouver un polynôme annulateur de f . f est-elle diagonalisable ? Trouver ses éléments propres.

Exercice 10.5.10★★♡Oral CCINP

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ de rang 1. Montrer que $f^2 = \text{tr}(f)f$ puis montrer que f est diagonalisable ssi $\text{tr}(f) \neq 0$.

Exercice 10.5.11★

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 + A^T = I_n$ alors A est diagonalisable.

Exercice 10.5.12★★♡

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente ssi $\text{Sp}(A) = \{0\}$ ssi $\chi_A(X) = X^n$ ssi $A^n = 0$.

Exercice 10.5.13★♡Oral CCINP Oral Mines Telecom

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. On suppose que A^2 est diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable.
Donner un contre exemple dans $GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10.5.14★★♡Oral Mines Ponts

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A^2 est diagonalisable.
Montrer, par double implication, que A est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^2)$.
on utilisera un polynôme annulateur

Exercice 10.5.15★★Oral CCINP PSI

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ diagonalisable. On suppose que $(Id, f, \dots, f^{n-1})$ est une famille libre.
Montrer que f admet n valeurs propres deux à deux distincts.

Exercice 10.5.16★♡Oral CCINP PSI

Soit A une matrice carrée d'ordre n qui est inversible. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $A^{-1} = P(A)$.

Exercice 10.5.17★★Oral Centrale PSI

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sans valeur propre commune.

1. Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si $AM = MB$ alors M est la matrice nulle.

Exercice 10.5.18★★Mines Ponts

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie non nulle.
Montrer qu'il existe une droite ou un plan stable par f .
indication : utiliser le théorème de Cayley-Hamilton

Exercice 10.5.19★★Oral CCINP

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Soit f définie par $f(M) = \text{tr}(AM)I_n$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Trouver un polynôme annulateur de f et donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.
Préciser les éléments propres.

Exercice 10.5.20★★Oral Mines Telecom

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit s une symétrie de E . Soit $\varphi : u \in \mathcal{L}(E) \mapsto \varphi(u) = \frac{1}{2}(u \circ s + s \circ u)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer un polynôme annulateur de φ .
3. φ est-il diagonalisable?

Exercice 10.5.21★★★Oral Centrale

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $f_A(M) = AM$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ alors $P(f_A) = f_B$ où B est à déterminer.
2. En déduire que f_A est diagonalisable ssi A l'est.
3. Déterminer les valeurs propres de f_A , leurs multiplicités,
les sous-espaces propres associés en fonction des éléments propres de A . *on pourra exprimer la matrice de f_A dans une base bien choisie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*
4. Montrer de nouveau la question 2 à l'aide de la question 3.

Exercice 10.5.22 Oral Centrale 2019 ★★★ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que M est nilpotente ssi $\text{Sp}(M) = \{0\}$.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $C = [A, B] = AB - BA$. On suppose que C commute avec A et B . Montrer que $\text{tr}(C^k) = 0$ pour tout $k \geq 1$. En déduire que C est nilpotente.

Exercice 10.5.23 Oral Mines Ponts 2019 ★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 10.5.24 Ecrit/Oral CCINP 2019 ★★ Dans cet exercice on travaille dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice est à diagonale propre si ses coefficients diagonaux sont exactement ses valeurs propres répétées avec leur multiplicité.

1. Donner deux exemples de telles matrices dont au-moins un exemple non diagonale ou triangulaire.

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle à diagonale propre?

3. Soit A une matrice antisymétrique à diagonale propre.
 - (a) Que peut on dire de ses valeurs propres ?
 - (b) Montrer qu'il existe $p \geq 2$ tel que $A^p = 0$.
 - (c) Calculer $(A^T A)^p$.
 - (d) Montrer que $A = 0$.
4. Donner la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (sans preuve).
5. On note E_n l'ensemble des matrices à diagonale propre. Montrer que si F est un sous espace vectoriel inclus dans E_n alors $\dim(F) \leq \frac{n(n+1)}{2}$.
6. Quelle est la dimension maximale d'un sous espace vectoriel inclus dans E_n ?

6 Matrices blocs

Exercice 10.6.1★

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. La matrice bloc $\begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ 0_n & cI_n \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 10.6.2★★

Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$. Soit $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$.

1. M est-elle symétrique ? Diagonaliser A .
2. Trouver le spectre de M en calculant le polynôme caractéristique.
3. Retrouver le spectre de M en cherchant les vecteurs propres sous la forme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ avec $X, Y \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 10.6.3★★CCINP

Soit $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Soit $A_{n+1} = \begin{pmatrix} J_n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A_{n+1} est diagonalisable. Diagonaliser J_n .
2. Construire des vecteurs du noyau de A_{n+1} à partir des vecteurs du noyau de J_n .
3. Diagonaliser A_{n+1} .

Exercice 10.6.4★★♡

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix}$.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, A et $P'(A)$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que M soit diagonalisable.

Exercice 10.6.5★★★ Oral Centrale PSI

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Soit $M = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

1. Donnez les valeurs propres de M . Donner les sous espaces propres de M .
2. Montrer que M est diagonalisable.
3. Que se passe-t-il si on ne suppose plus A inversible ?

Exercice 10.6.6★★ Oral Navale PSI

1. Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$. Montrer que B et C sont semblables.

Exercice 10.6.7★ Oral CCINP PSI

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. On suppose A diagonalisable. Montrer que B est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 10.6.8★★ *Oral CCINP PSI*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$.

1. B est-elle inversible? Calculer B^2 .
2. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q(0) = 0$. Quelle est le lien entre $Q(B)$ et $Q(A)$.
3. Montrer que B est diagonalisable ssi A est diagonalisable.

Exercice 10.6.9★★★ *Oral Centrale PSI*

Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que la matrice $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 10.6.10★★ *Oral Centrale PSI*

Pour tout $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on pose $A \otimes M = \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix}$.

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer $(A \otimes M)(B \otimes N)$.
2. On suppose A et M inversibles. Montrer que $A \otimes M$ est inversible et trouver son inverse.
3. Prouver que si A et M sont diagonalisables alors $A \otimes M$ est diagonalisable.
4. Etablir que dans ce cas on a $\det(A \otimes M) = \det(A)^n (\det(M))^2$.

Exercice 10.6.11★★ *Oral CCINP PSI*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer le rang de B en fonction du rang de A .
2. Trouver une relation entre χ_B et χ_A . En déduire le spectre de B en fonction du spectre de A .
3. Déterminer les dimensions des sous espaces propres de B en fonction de celles des espaces propres de A .
4. Montrer que si A est diagonalisable et A inversible alors B est diagonalisable.
5. Montrer la réciproque.

7 Trigonaliser

Exercice 10.7.1★ Montrer que $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ où a est un réel à trouver. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10.7.2★ Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 10.7.3 *Oral IMT 2019* ★★

Soit $n \geq 2$ un entier. Résoudre $M^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
on sera amené à trigonaliser une matrice

Exercice 10.7.4★★ Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 10.7.5 *Oral Centrale* ★★

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que 1 est la seule valeur propre de M ssi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{tr}(M^k) = n$.

Exercice 10.7.6 *Oral CCINP* ★★

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice canoniquement associée $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g \circ g = f$.

1. Trouver les éléments propres de f . f est-elle diagonalisable?
2. Soit e_1 un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1. Soit e_3 un vecteur propre de f associé à la valeur propre 3.
Montrer que $g(e_1)$ et $g(e_3)$ sont aussi des vecteurs propres de f .
3. Montrer que e_3 est un vecteur propre de g .
4. g est-elle diagonalisable?

8 Application de la réduction

Exercice 10.8.1★

A l'aide d'une réduction calculer $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n$.

Exercice 10.8.2★

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A . Calculer A^n . Trouver l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A . Trouver l'ensemble des matrices $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $N^2 = A$.

Exercice 10.8.3★

On pose $u_0 = -1, v_0 = 2, w_0 = -1$ et $u_{n+1} = 2v_n + 2w_n, v_{n+1} = u_n - v_n - 2w_n, w_{n+1} = -u_n - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une réduction trouver les formules explicites de ces suites en fonction de n .

Exercice 10.8.4★★

On pose $u_0 = -3, u_1 = -9, u_2 = -9, u_3 = 9$ et $u_{n+4} = 6u_{n+3} - 7u_{n+2} - 6u_{n+1} + 8u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une réduction trouver la formule explicite de cette suite en fonction de n .

Exercice 10.8.5★

Résoudre $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 10.8.6★

Trouver le commutant de $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 10.8.7★

On considère (u_n) définie par $u_{n+3} = 2u_n - u_{n+1} - 2u_{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = u_1 = u_2 = 1$. En réduisant une matrice exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 10.8.8★★

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
2. En déduire l'expression de A^n .
3. Donner l'ensemble des matrices qui commutent avec A .
4. Donner la formule explicite de la suite définie par $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 4u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = u_1 = u_2 = 1$.

Exercice 10.8.9★★ Oral CCINP

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A .
2. Résoudre $M^2 + 2M = A$.

Exercice 10.8.10★★

Résoudre $X^2 + X = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10.8.11 Oral CCINP 2019 ★★

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.

11. Projecteurs et symétries

Dans tout ce chapitre, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

I - Projecteurs

Définition.

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1; x_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.

On appelle projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 l'application :

$$\begin{aligned} p_1 : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x_1 \end{aligned}$$

et on appelle projecteur sur F_2 parallèlement à F_1 l'application :

$$\begin{aligned} p_2 : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x_2 \end{aligned}$$

On a en particulier $p_2 = \text{id}_E - p_1$.

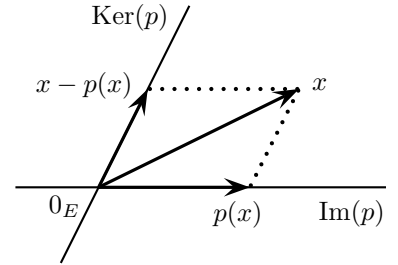
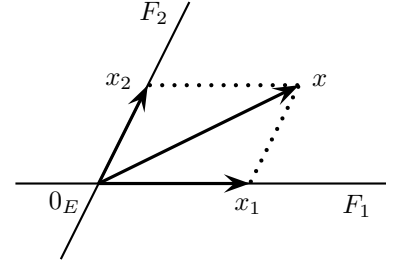
Définition équivalente.

Un projecteur de E est un endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.

Propriété.

Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, alors $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$

et, pour tout $x \in E$, on a : $x = \underbrace{p(x)}_{\in \text{Im}(p)} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \text{Ker}(p)}$.



II - Symétries

Définition.

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1; x_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.

On appelle symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2 l'application :

$$\begin{aligned} s_1 : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Remarque.

Soit p_1 le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2

et soit p_2 le projecteur sur F_2 parallèlement à F_1 .

On a alors : $s_1 = p_1 - p_2 = p_1 - (\text{id}_E - p_1) = 2p_1 - \text{id}_E$.

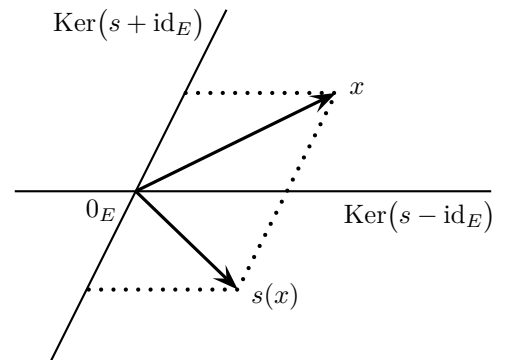
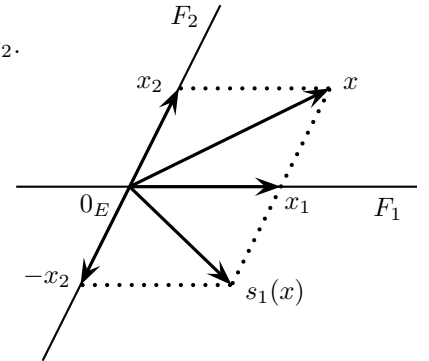
Définition équivalente.

Une symétrie de E est un endomorphisme s de E tel que $s \circ s = \text{id}_E$.

Propriété.

Si $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie, alors $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$

et, pour tout $x \in E$, on a : $x = \underbrace{\frac{1}{2}(x + s(x))}_{\in \text{Ker}(s - \text{id}_E)} + \underbrace{\frac{1}{2}(x - s(x))}_{\in \text{Ker}(s + \text{id}_E)}$.



Remarque.

Une symétrie s est bijective et $s^{-1} = s$.