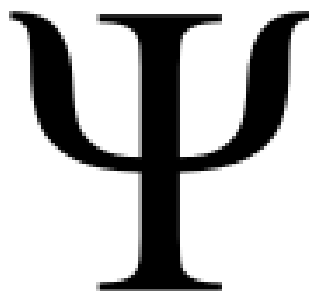


MATHEMATIQUES PSI LYCEE ARAGO PARTIE 2



ALGEBRE

- 12. Espaces préhilbertiens réels
- 13. Automorphismes orthogonaux, Isométries vectorielles.
- 14. Endomorphisme symétrique ou auto-adjoint
- Annexe : Endomorphismes remarquables

TOPOLOGIE

- 15. Espaces vectoriels normés

ANALYSE

- 16. Fonctions usuelles
- 17. Suites numériques
- 18. Analyse asymptotique
- 19. Séries numériques
- 20. Fonctions d'une variable réelle
- 21. Intégration sur un segment
- 22. Intégration sur un intervalle quelconque

LEGENDE

♠ Erreur fatale $1 + \frac{\sin x}{n} = 7$

★ Niveau de difficulté des exercices.

♡ Exercice/Proposition/Méthode incontournable.

12. Espaces préhilbertiens réels

I - Produit scalaire

Dans tout ce paragraphe, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Définition On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive.

Autrement écrit, il s'agit d'une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- $\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \forall x, y_1, y_2 \in E, \varphi(x; \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \mu_1 \varphi(x; y_1) + \mu_2 \varphi(x; y_2)$ (φ linéaire à droite)
- $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2, y \in E, \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2; y) = \lambda_1 \varphi(x_1; y) + \lambda_2 \varphi(x_2; y)$ (φ linéaire à gauche)
- $\forall x, y \in E, \varphi(x; y) = \varphi(y; x)$ (φ symétrique)
- $\forall x \in E, \varphi(x; x) \geq 0$ (φ positive)
- $\forall x \in E, (\varphi(x; x) = 0 \Rightarrow x = 0_E)$ (φ définie)

Remarque

Pour prouver qu'une application est bilinéaire symétrique, il suffit de prouver la symétrie et la linéarité à droite.

Exemples

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ ((x_1; \dots; x_n); (y_1; \dots; y_n)) & \mapsto & \sum_{k=1}^n x_k y_k \end{array} \right)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (X; Y) & \mapsto & X^T Y \end{array} \right)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (A; B) & \mapsto & \text{tr}(A^T B) \end{array} \right)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

De plus on a $(A|B) = \text{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}$ pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Soit $a, b \in \mathbb{R}$. L'application $\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (f; g) & \mapsto & \int_{[a; b]} fg \end{array} \right)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$.

Définition

- On appelle espace préhilbertien réel tout $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
- On appelle espace euclidien tout $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Notation Le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $(x | y)$ ou $x \cdot y$ ou $\langle x, y \rangle$.

II - Norme euclidienne (norme associée à un produit scalaire)

Dans tout ce paragraphe, E est un espace préhilbertien réel.

Définition

Pour tout x de E , on appelle norme euclidienne de x le nombre noté $\|x\|$ et défini par : $\|x\| = \sqrt{(x | x)}$.

Vocabulaire : On dit qu'un vecteur x de E est unitaire si $\|x\| = 1$.

Propriété (identités remarquables et identités de polarisation)

- $\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2 \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x | y) + \|y\|^2$
- $\forall x, y \in E, (x | y) = \frac{1}{2} [\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2] \quad (x | y) = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2]$

Inégalité de Cauchy-Schwarz (et cas d'égalité)

- $\forall x, y \in E, |(x | y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$
- $\forall x, y \in E, |(x | y)| = \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow x$ et y sont colinéaires.

Exemples

- $\forall (x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (y_1; \dots; y_n) \in \mathbb{R}^n, \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$
- $\forall f, g \in C^0([a; b], \mathbb{R}), \left| \int_{[a; b]} fg \right| \leq \sqrt{\int_{[a; b]} f^2} \sqrt{\int_{[a; b]} g^2}$

Vocabulaire

On dit que deux vecteurs x et y sont colinéaires et de même sens s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = \lambda x$.

Inégalité triangulaire (et cas d'égalité)

- $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- $\forall x, y \in E, \|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow x \text{ et } y \text{ sont colinéaires et de même sens}$

Exemples

- $\forall (x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (y_1; \dots; y_n) \in \mathbb{R}^n, \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$
- $\forall f, g \in C^0([a; b], \mathbb{R}), \sqrt{\int_{[a; b]} (f + g)^2} \leq \sqrt{\int_{[a; b]} f^2} + \sqrt{\int_{[a; b]} g^2}$

III - Familles orthogonales et familles orthonormales

Dans tout ce paragraphe, E est un espace préhilbertien réel.

Définition Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux si $(x | y) = 0$.

Définition Soit I un ensemble non vide et soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

- La famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite orthogonale si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire si :

$$\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow (x_i | x_j) = 0$$

- La famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite orthonormale si elle est orthogonale et si ses vecteurs sont tous unitaires, c'est-à-dire si :

$$\forall i, j \in I, (x_i | x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Propriété Toute famille orthogonale de vecteurs **non nuls** de E est libre.

En particulier, toute famille orthonormale de vecteurs de E est libre.

Théorème de Pythagore

- Si deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux, alors : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- Si $(x_1; x_2; \dots; x_p)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E , alors $\left\| \sum_{k=1}^p x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^p \|x_k\|^2$.

Remarque la réciproque est vraie pour deux vecteurs mais fausse dans le cas général.

Propriété Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E .

Soit x et y deux vecteurs de coordonnées respectives $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ et $(y_1; y_2; \dots; y_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Soient enfin X et Y les matrices de x et y dans $\mathcal{B}$. On a alors :

$$(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T Y \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{X^T X}$$

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt On suppose ici que E est un espace euclidien.

À partir de $(b_1; b_2; \dots; b_n)$ une base de E , on construit $(b'_1; b'_2; \dots; b'_n)$ une base orthogonale de E sous la forme :

$$\begin{cases} b'_1 = b_1 \\ b'_2 = \alpha_{1,2}b'_1 + b_2 \\ b'_3 = \alpha_{1,3}b'_1 + \alpha_{2,3}b'_2 + b_3 \\ \dots \\ b'_n = \alpha_{1,n}b'_1 + \dots + \alpha_{n-1,n}b'_{n-1} + b_n \end{cases}$$

où $(\alpha_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une famille de réels à déterminer selon le procédé suivant :

- On commence par déterminer b'_2 en calculant $\alpha_{1,2}$ grâce à la condition $(b'_1 | b'_2) = 0$.
- On détermine ensuite b'_3 en calculant $\alpha_{1,3}$ et $\alpha_{2,3}$ grâce aux conditions $(b'_1 | b'_3) = 0$ et $(b'_2 | b'_3) = 0$.
- On itère le processus jusqu'à b'_n .

Enfin, pour obtenir une base orthonormale de E , il suffit de considérer $\left(\frac{1}{\|b'_1\|}b'_1; \frac{1}{\|b'_2\|}b'_2; \dots; \frac{1}{\|b'_n\|}b'_n \right)$.

Corollaire Dans un espace euclidien non nul, il existe des bases orthonormées.

Corollaire Dans un espace euclidien non nul E , toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormée de E .

IV - Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Dans tout ce paragraphe, F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E .

Définition

On dit que F et G sont orthogonaux si tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G , c'est-à-dire si :

$$\forall x \in F, \forall y \in G, (x | y) = 0$$

Définition

On appelle orthogonal de F , et on note $F^\perp$, l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tout vecteur de F :

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall y \in F, (x | y) = 0$$

Remarque

Plus généralement si X est une partie de E on peut définir l'orthogonal de X par $X^\perp = \{y \in E, \forall x \in X, (x|y) = 0\}$. Même si X n'est pas un sous espace vectoriel de E , on a bien $X^\perp$ qui est un sous espace vectoriel de E .

Exemples

- $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$
- Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ non nul. Si D est la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $ax + by = 0$, alors $D^\perp = \text{Vect}((a, b))$.
- Soit $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ non nul. Si P est le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax + by + cz = 0$, alors $P^\perp = \text{Vect}((a, b, c))$.

Propriétés

- L'ensemble $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .
- Les sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux si et seulement si $G \subset F^\perp$.
- Les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$ sont orthogonaux.
- Si F admet un sous-espace vectoriel supplémentaire orthogonal G , alors celui-ci est unique et $G = F^\perp$.
- $F \subset (F^\perp)^\perp$

Propriétés

- Si F est de dimension finie, alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires orthogonaux : $E = F \oplus F^\perp$.
- Si F est de dimension finie, alors $F = (F^\perp)^\perp$.
- Si E est de dimension finie, alors : $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.

V - Projecteurs orthogonaux, Symétries orthogonales

Dans tout ce paragraphe, F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E .

Définition

- On appelle projecteur orthogonal sur F , et on note p_F , le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.
- On appelle symétrie orthogonale par rapport à F , on note s_F , la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

Méthode

- Un projecteur p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont orthogonaux.
- Une symétrie s est une symétrie orthogonale si et seulement si $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$ sont orthogonaux.

Théorème Si $(f_1; f_2; \dots; f_p)$ est une base orthonormale de F , alors, pour tout x de E , $p_F(x) = \sum_{i=1}^p (f_i | x) f_i$.

Méthode : si $x \in E$, pour déterminer $p_F(x)$ on peut

- déterminer une base orthonormée de F et utiliser le théorème précédent,
- déterminer $p_{F^\perp}(x)$ puis en déduire $p_F(x)$ car $x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$,
- résoudre un système linéaire traduisant $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x)$ orthogonal à une base de F .
- trouver la décomposition de x comme un élément y de F et un élément z de $F^\perp$, on a alors $p_F(x) = y$.

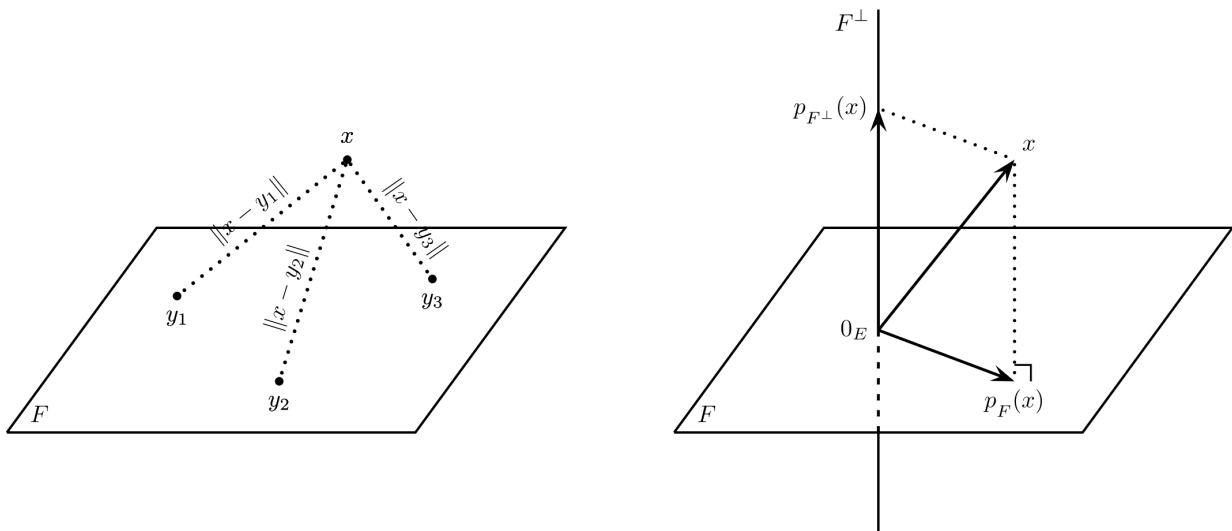
Définition

Pour tout x de E , on appelle distance de x à F le nombre noté $d(x, F)$ et défini par : $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.

Théorème

Pour tout x de E , la borne inférieure définissant $d(x, F)$ est un minimum et il est atteint en $y = p_F(x)$, c'est-à-dire :

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}$$



Exemples

- Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ non nul et soit D la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $ax + by = 0$.
Pour tout $M_0 = (x_0; y_0)$ point de $\mathbb{R}^2$, $d(M_0, D) = \frac{|ax_0 + by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
- Si H est un hyperplan, si $H^\perp = \text{Vect}(a)$ avec $a \in E$, alors $\frac{a}{\|a\|}$ est une base orthonormée de $H^\perp$ et pour tout $x \in E$ on a $d(x, H) = \frac{|(x|a)|}{\|a\|}$. Un tel vecteur a est nommé un vecteur normal à l'hyperplan H .

VI - Représentation d'une forme linéaire à l'aide d'un produit scalaire

Théorème de représentation de Riesz Soit E un espace euclidien.

Pour toute forme linéaire $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, il existe un unique vecteur a de E tel que $f = (a | \cdot)$ (c'est-à-dire $f(x) = (a | x)$, $\forall x \in E$)

Complement de cours chapitre 12 : Espaces préhilbertiens réels

∝ [Démonstrations de cours 1 et 2] : Inégalité (et égalité) triangulaire et de Cauchy-Schwarz.

Classique, à savoir démontrer : Si E euclidien, si $u \in \mathcal{L}(E)$, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E et si M est la matrice de u dans $\mathcal{B}$ alors $M_{i,j} = (e_i | u(e_j))$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Proposition Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces vectoriels de E un espace préhilbertien réel. On suppose $F_1, \dots, F_n$ deux à deux orthogonaux. Alors la somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe.

∝ [Démonstration de cours 3]

∝ [Démonstration de cours 4] : $F^\perp$ est un sous espace vectoriel de E

Méthode : pour trouver $F^\perp$ on peut utiliser une base $e_1, \dots, e_p$ de F avec : $x \in F^\perp \iff (x | e_i) = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, p\}$

∝ [Démonstration de cours 5] : Si F est de dimension finie alors $E = F \oplus F^\perp$ et $F = (F^\perp)^\perp$.

∝ [Démonstration de cours 6] : Théorème de représentation de Riesz.

Compétences

- ★ Savoir montrer que l'on a un produit scalaire. Par exemple $(A|B) = \text{tr}(A^T B)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- ★ Notamment pour le point "défini positif" savoir que l'on utilise souvent :
 - si il y a des polynômes l'argument : P admet plus de racines que son degré donc P est le polynôme nul.
 - si il y a des intégrales l'argument : on a une fonction continue positive d'intégrale nulle donc c'est la fonction nulle.
- ♠ Essayer de montrer que $(x|y) \geq 0$ pour tout $x, y \in E$.
- ♠ Réussir à montrer que $(x|x) > 0$ pour tout $x \in E$ puis continuer avec si $(x|x) = 0$ alors ...
- ★ savoir écrire le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ sous la forme matricielle $X^T Y$.
- ★ Savoir relier la norme Euclidienne et le produit scalaire.
- ★★ Connaître les inégalités triangulaire et de Cauchy Schwarz. Savoir démontrer Cauchy Schwarz.
- ♠ Dire que par inégalité triangulaire on a $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- ★★ Penser à montrer qu'une famille de vecteurs non nuls est orthogonale pour montrer qu'elle est libre.
- ★★ Savoir utiliser Gram-Schmidt
- ★★ Savoir traduire $x \in F^\perp$.
- ★★ Savoir que $E = F \oplus F^\perp$ si F est de dimension finie. Connaître ensuite la définition d'un projecteur orthogonal et d'une symétrie orthogonale.
- ★★ Savoir trouver un projeté orthogonal avec une base orthonormée de F
- ♠ Utiliser la formule $p_F(x) = \sum (x|e_i)e_i$ avec (e_i) une base de E .
- ♠ Utiliser la formule $p_F(x) = \sum (x|e_i)e_i$ avec (e_i) une base de F qui n'est pas orthonormée.
- ★★ Savoir trouver une distance à un sev F : on cherche une bon de F (avec Gram Schmidt), on en déduit $p_F(x)$ puis on a $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$
- ★★★ Savoir trouver une distance à un sev F en utilisant $F^\perp$: $d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|$. A utiliser si $F^\perp$ est de petite dimension, notamment si F est un hyperplan.
- ★★★ Savoir passer d'un énoncé avec un inf à chercher à une distance à un sev F .
 Par exemple $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ae^x - b)^2 dx$ est égal à $d(u, F)^2$ avec $u : x \mapsto x^2$, $F = \text{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto e^x)$ et le produit scalaire $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ sur $C^0([0; 1], \mathbb{R})$.
- ★★ Savoir que pour montrer qu'un projecteur est othogonal on doit montrer que $p^2 = p$ puis que $\text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p)$
- ★★ Savoir que pour montrer qu'une symétrie est othogonale on doit montrer que $s^2 = Id$ puis que $\text{Ker}(s - id) \perp \text{Ker}(s + id)$.

Chapitre 12 : Espaces préhilbertiens réels

1 Produit scalaire

Exercice 12.1.1***

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose $(A|B) = \text{tr}(A^T B)$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.
2. Montrer que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 12.1.2*

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on pose $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 12.1.3***Oral Mines Ponts*

Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts. On pose $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 12.1.4**

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on pose $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx$.

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Calculer $(X^n|X^m)$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$.

Exercice 12.1.5*

Soit E préhilbertien réel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer l'équivalence de $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$ et de $\forall x, y \in E, (x|y) = (f(x)|f(y))$

Exercice 12.1.6***Oral CCP*

Soit E Euclidien de dimension n . Soient $u, v \in E$ non nuls et orthogonaux. On pose $f : x \mapsto x + (x|v)u$.

1. Montrer que $\text{Ker}(f - \text{id})$ est de dimension $n - 1$. Trouver $\text{Im}(f - \text{id})$.

2. Donner le spectre de f . Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \|v\|^2 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 12.1.7*♡

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^T A)$ et $\text{Im}(A^T) = \text{Im}(A^T A)$.

Exercice 12.1.8***

Soit E préhilbertien réel. Soit $n \geq 3$. Soient $x_1, \dots, x_n \in E$. On note $G(x_1, \dots, x_n) = ((x_i|x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer $Y^T G(x_1, \dots, x_n) Y$.
2. Montrer que les colonnes de $G(x_1, \dots, x_n)$ sont liées si et seulement si la famille $x_1, \dots, x_n$ est liée.
3. On note $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$. Montrer que $\det(G(x_1, \dots, x_n)) = (d(x_n, F))^2 \det(G(x_1, \dots, x_{n-1}))$.

Exercice 12.1.9 Oral CCINP ***

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}$.

(a) Donner un lien entre Q, Q' et P .

(b) En posant $f : t \mapsto e^{-t}Q(t)$, montrer que $Q(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. On pose pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $(P|Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} (PQ)^{(k)}(0)$.

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2 Inégalités

Exercice 12.2.1★

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose $(A|B) = \text{tr}(A^T B)$. On définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 12.2.2★

Montrer que pour tout $f \in C^0([0; 1], \mathbb{R})$ on a $\left(\int_0^1 f(t) dt\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(t) dt$.

Exercice 12.2.3★

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 12.2.4★

Déterminer les n -uplets réels $(x_1, \dots, x_n)$ vérifiant $x_1 + \dots + x_n = n$ et $x_1^2 + \dots + x_n^2 = n$.

Exercice 12.2.5★★

Soit $x \in [0; 1]$.

1. En utilisant une loi binomiale montrer que $\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$.
2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz en déduire que $\sum_{k=0}^n \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

3 Familles orthogonales

Exercice 12.3.1★

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on pose pour tous $(x, y, z), (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$:

$$((x, y, z)|(u, v, w)) = (x + y + z)(u + v + w) + (y + z)(v + w) + zw$$

1. Montrer que l'on a ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour ce produit scalaire.

Exercice 12.3.2★

Soient $f, g \in C^0([0; 1], \mathbb{R})$ on pose $(f|g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. On a ainsi un produit scalaire sur $C^0([0; 1], \mathbb{R})$.

Donner une base orthonormée de $\text{Vect}(f_1, f_2)$ avec $f_1 : t \mapsto t$ et $f_2 : t \mapsto e^t$.

Exercice 12.3.3★

Sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ on pose $(P|Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$.

1. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E et former une base orthonormale à partir de la base canonique $(1, X, X^2)$.
2. Donner une autre base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ en utilisant des polynômes de Lagrange.

Exercice 12.3.4★♡

Soit E euclidien. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ que l'on suppose diagonalisable dans une base orthonormée.

Montrer que $Sp(u) \subset \mathbb{R}^+$ si et seulement si : $\forall x \in E, (u(x)|x) \geq 0$.

Exercice 12.3.5★

Soit $E = C^0([0; 2\pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f|g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$.

Montrer que la famille $(x \mapsto \cos(kx))_{1 \leq k \leq n}$ est libre. Cette famille est-elle orthonormale ?

Exercice 12.3.6★★★

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on pose $(P|Q) = \int_0^\pi P(\cos(x))Q(\cos(x))dx$. Cela définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré n vérifiant $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Préciser le coefficient dominant de T_n . *on pourra utiliser la formule de Moivre*
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver la valeur minimale de $\|P\|$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré n et unitaire.

Exercice 12.3.7**

On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Soit $F = Vect((1, 1, \dots, 1))^\perp$. Trouver une base orthonormale de F .

Exercice 12.3.8*Polynômes de Laguerre**

Soit E l'espace des fonctions continues de $[0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t}dt$ existe.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.
2. On pose $(f|g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt$ pour tout $(f, g) \in E^2$. Justifier l'existence.
On admet alors que cela définit un produit scalaire sur E .
3. On pose $f_n : x \mapsto x^n e^{-x}$ et $L_n(x) = \frac{1}{n!} (f_n)^{(n)}(x) e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(L_n|L_m) = \frac{-1}{n!} \int_0^{+\infty} f_n^{(n-1)}(x) L'_m(x) dx$.
 - (b) Justifier que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes deux à deux orthogonaux.
4. Soit $f : t \mapsto e^{-t}$. Calculer $\|f\|^2$ puis $\sum_{n=0}^{+\infty} (f|L_n)^2$. Que constate-t-on ?

Exercice 12.3.9 Oral CCINP 2019 ***

Soient E un espace Euclidien et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Soit $u_1, \dots, u_n$ une famille de vecteurs de E .

1. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels. Montrer que $\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 \right)$.
2. En déduire que si $\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 < 1$ alors la famille $(u_i + e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E .

4 Sous espaces orthogonaux**Exercice 12.4.1***

Soit E euclidien. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(u(x)|x) = 0$ pour tout $x \in E$. Montrer que $Ker u$ et $Im u$ sont supplémentaires orthogonaux dans E .

Exercice 12.4.2*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on pose $(X|Y) = X^T Y$. Montrer que $(Ker A)^\perp = Im(A^T)$.

Exercice 12.4.3*

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(A|B) = tr(A^T B)$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans E .

Exercice 12.4.4**

Soient F, G deux sev d'un espace euclidien E . Montrer que $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$. Montrer aussi que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

Exercice 12.4.5Ecrit Mines PSI**

Soit $n \geq 2$. On se place dans $\mathbb{R}^n$. Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension d . Justifier qu'il existe des réels

$$(\alpha_{i,j}, 1 \leq i \leq n-d, 1 \leq j \leq n) \text{ tels que : } x = (x_1, \dots, x_n) \in F \iff \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n-d,1} & \dots & \alpha_{n-d,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 12.4.6Ecrit E3A PSI** Soit E un espace préhilbertien réel.

On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ tels que $(P) : \forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2$.

1. Soit $F = Vect(e_1, \dots, e_n)$. Soit $x \in F^\perp$. Calculer $\|x\|^2$. En déduire que E est de dimension finie.
2. Dans cette question on suppose $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \|e_i\| \geq 1$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E .

Exercice 12.4.7*Oral CCP- Oral Mines PSI**

Soit E un espace euclidien. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est antisymétrique lorsque pour tout $(x, y) \in E^2$, $(u(x)|y) = -(x|u(y))$.

1. Montrer que u est antisymétrique ssi la matrice qui lui est associée dans une base orthonormée est antisymétrique.
2. Soit u un endomorphisme bijectif antisymétrique. À l'aide du déterminant, montrer que $rg(u)$ est pair.
3. Montrer que si u est antisymétrique, $Ker(u)$ et $Im(u)$ sont supplémentaires orthogonaux et en déduire que $rg(u)$ est pair. on pourra considérer v l'endomorphisme induit par u sur $Im(u)$ et montrer que v est bijective

Exercice 12.4.8Oral Mines Ponts PSI**

1. Montrer que l'application $(A, B) \mapsto tr(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'ensemble V des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base orthonormée de $V^\perp$.

Exercice 12.4.9Oral Centrale PSI**

Soit $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n^2 \text{ converge}\}$. On pose $(u|v) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k$ pour tous $u, v \in E$.

1. Montrer que l'on a bien un produit scalaire sur E .
2. Soit $u \in E$ avec $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\frac{1}{u} \notin E$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. A-t-on $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \in E$?
4. Soit F l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E de dimension infinie.
5. Que dire de $F + F^\perp$ et de $(F^\perp)^\perp$?

5 Projection/Symétrie orthogonale, distance à un sous espace vectoriel

Exercice 12.5.1*

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.

Donner l'expression de la projection orthogonale (puis de la symétrie orthogonale) sur le plan d'équation $x + y - z = 0$.

Exercice 12.5.2*Oral CCP

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à $\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}$.

Montrer que l'on a un projecteur orthogonal et donner ses éléments caractéristiques.

Exercice 12.5.3*

Soit E euclidien. Soit $a \in E$ non nul. On pose $u(x) = x - 2 \frac{(x|a)}{(a|a)} a$ pour tout $x \in E$.

Montrer que l'on a une symétrie orthogonale et donner ses éléments caractéristiques.

Exercice 12.5.4Oral CCP**

Montrer qu'un projecteur est un projecteur orthogonal ssi $(p(x)|y) = (x|p(y))$ pour tous $x, y \in E$.

Exercice 12.5.5Oral Mines Ponts**

Soit E un espace Euclidien et p un projecteur de E .

1. Montrer que si p est un projecteur orthogonal alors pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.
2. Réciproquement on suppose que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.
Soient $x \in Im\ p$ et $y \in Ker\ p$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ en utilisant $p(x + \lambda y)$ montrer que x est orthogonal à y . Conclure.

Exercice 12.5.6 Oral Mines Telecom *

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.

Soit H le sous-espace vectoriel engendré par $a = e_1 + e_2 + e_3$ et $b = e_1 - e_4$.

1. Construire une base orthogonale de H .
2. Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur H .
3. Calculer $\inf_{x \in H} \|x - e_1\|$.

Exercice 12.5.7**

Calculer $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_{-1}^1 (t^2 - at - b)^2 dt$.

Exercice 12.5.8**

Calculer $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^\pi (\sin(t) - at^2 - bt)^2 dt$.

Exercice 12.5.9**

On se place dans $M_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $(A|B) = \text{tr}(A^T B)$

On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Démontrer que F est un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

Déterminer une base de $F^\perp$. Déterminer la distance de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à F .

Exercice 12.5.10 Oral Mines Ponts **

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique : $(A|B) = \text{tr}(A^T B)$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(M) = 0\}$. Déterminer $F^\perp$. Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur F d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver la distance de M à F .

Exercice 12.5.11 Oral CCP**

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique : $(A|B) = \text{tr}(A^T B)$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer l'orthogonal de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver la distance de M à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Réaliser le calcul pour M définie par $m_{i,j} = i$ pour tous i, j entre 1 et n .

Exercice 12.5.12 Oral CCINP **

Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ on pose $(P, Q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$.

1. Justifier l'existence de (P, Q) pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$.
2. Justifier que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Trouver le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de $(a, b) \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} (t^2 - at - b)^2 dt$.

Exercice 12.5.13* CCINP

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. On pose $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1) Q^{(k)}(1)$.

1. Montrer que l'on a un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit E l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui s'annulent en 1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et en donner sa dimension.
3. Calculer $d(1, E)$.

Exercice 12.5.14 Ecrit CCP**

On considère $M_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique défini pour A et B dans $M_2(\mathbb{R})$ par : $(A|B) = \text{Tr}(A^T B)$.

1. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ sont deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$, que vaut le réel $(A|A')$?
2. On note $T_2(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel formé des matrices triangulaires supérieures de $M_2(\mathbb{R})$.
Donner, pour le produit scalaire canonique, une base orthonormée de $T_2(\mathbb{R})$ et de son orthogonal $T_2(\mathbb{R})^\perp$.
3. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, déterminer le projeté orthogonal de la matrice A sur $T_2(\mathbb{R})$, ainsi que la distance de la matrice A à $T_2(\mathbb{R})$.

Exercice 12.5.15 Oral CCP**

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. On pose : $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k) Q(a_k)$ pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

On pose $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0 \right\}$.

1. Justifier rapidement que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, calculer sa dimension et déterminer son orthogonal.
2. Calculer la distance de X^n à F .

6 Théorème de Riesz

Exercice 12.6.1**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier qu'il existe un unique $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 A(t)P(t)dt = P(0)$.

Montrer que $\deg(A) = n$.

Exercice 12.6.2***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Soit $(L_0, \dots, L_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant : $\forall k, i \in \{0, \dots, n\}$, $L_k(i) = 0$ si $k \neq i$ et $L_k(i) = 1$ si $k = i$.

1. Donner la forme factorisée de L_k et exprimer le coefficient dominant avec des factorielles.
2. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant : $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $P(k) = k^n$. Exprimer P de deux manières différentes.
4. Donner une expression simplifiée de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^n$.
5. Montrer qu'il existe un unique $(n+1)$ -uplet $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\int_0^1 P(t)dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(k)$$

13. Automorphismes orthogonaux, Isométries vectorielles

I - Automorphismes orthogonaux, Isométries vectorielles

Dans tout ce paragraphe, E est un espace euclidien.

Définition Soit u une application de E dans E .

- On dit que u conserve le produit scalaire si : $\forall x, y \in E, (u(x) | u(y)) = (x | y)$
- On dit que u conserve la norme euclidienne si : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$

Propriété Soit u une application linéaire de E dans E .

L'application u conserve le produit scalaire si et seulement si u conserve la norme euclidienne.

Propriété Si u est un endomorphisme de E qui conserve la norme euclidienne, alors u est bijectif.

Définition On appelle isométrie vectorielle de E ou automorphisme orthogonal de E tout endomorphisme de E qui conserve la norme euclidienne ou le produit scalaire.

Notation On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E . L'ensemble $O(E)$ est appelé groupe orthogonal de E .

Propriété Une symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.

Au passage, on nomme réflexion toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Remarque Par contre, un projecteur orthogonal de E n'est pas une isométrie vectorielle en général.

Propriété

- La composée de deux isométries vectorielles est une isométrie vectorielle.
- L'inverse d'une isométrie vectorielle est une isométrie vectorielle.

Propriété L'image d'une base orthonormale par une isométrie vectorielle est une base orthonormale.

Autrement écrit, si $u \in O(E)$ et si $(e_1; e_2; \dots; e_n)$ est une base orthonormale de E , alors la famille $(u(e_1); u(e_2); \dots; u(e_n))$ est une base orthonormale de E .

Propriété Soit u une isométrie vectorielle de E et soit F un sous-espace vectoriel de E .

Si F est stable par u , alors $F^\perp$ est aussi stable par u .

Propriété Soit u une isométrie vectorielle de E . Si λ est une valeur propre de u , alors $|\lambda| = 1$ c-à-d $\lambda = \pm 1$.

II - Matrices orthogonales

Dans tout ce paragraphe, n est un entier naturel non nul.

Définition

On appelle matrice orthogonale de taille n toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^T A = I_n$.

On note $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est appelé groupe orthogonal d'ordre n .

Théorème Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $A \in O_n(\mathbb{R})$;
- $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = A^T$;
- $A^T A = I_n$;
- les n colonnes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$;
- les n lignes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Exemple $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$

Propriété

- Le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale.
- L'inverse d'une matrice orthogonale est une matrice orthogonale.

Propriété Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors

- $\det(A) \in \{\pm 1\}$ (Réciproque Fausse!!!)
- Si λ valeur propre (réelle ou complexe) de A alors $|\lambda| = 1$.

Définition On appelle groupe spécial orthogonal d'ordre n l'ensemble noté $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n)$ et défini par :
 $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}); \det(A) = 1\}$

Théorème Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ (avec $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure canonique d'espace euclidien).

Théorème

Soit E un espace euclidien de dimension n , soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E . On a alors :

$$u \in O(E) \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$$

Corollaire Si u est une isométrie vectorielle d'un espace euclidien, alors $\det(u) \in \{\pm 1\}$.

Définition Si E est un espace euclidien, alors on appelle groupe spécial orthogonal de E l'ensemble noté $SO(E)$ et défini par : $SO(E) = \{u \in O(E); \det(u) = 1\}$.

On appelle rotation vectorielle de E tout élément de $SO(E)$.

Propriété Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales d'un espace euclidien E de dimension n .

La matrice de passage $\mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est une matrice orthogonale : $\mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \in O_n(\mathbb{R})$.

III - Orientation d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

Définition Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n .

- On dit que $\mathcal{B}$ a la même orientation que $\mathcal{B}'$ si $\det(\mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}) > 0$.
- On dit que $\mathcal{B}$ a une orientation opposée à celle de $\mathcal{B}'$ si $\det(\mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}) < 0$.

Remarque Orienter E signifie choisir une base $\mathcal{B}_0$ de E .

Les bases ayant même orientation que $\mathcal{B}_0$ sont des bases dites directes.

Les bases ayant une orientation opposée à celle de $\mathcal{B}_0$ sont des bases dites indirectes.

IV - Classification des isométries vectorielles en dimension deux

Propriété $SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}; \theta \in \mathbb{R} \right\}$ et $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}; \theta \in \mathbb{R} \right\}$

Notation Pour tout réel θ , posons $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}$.

Propriété Pour tous réels θ et θ' , on a :

$$\bullet R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta') = R(\theta')R(\theta) \quad \bullet R(\theta)^{-1} = R(-\theta) \quad \bullet S(\theta)S(\theta') = R(\theta - \theta') \quad \bullet S(\theta)^{-1} = S(\theta)$$

Propriété Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2 et soit $r \in SO(E)$.

Il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π , tel que, pour toute base orthonormale directe $\mathcal{B}$ de E , $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = R(\theta)$.

On dit que r est la rotation (vectorielle) de E d'angle θ .

Propriété Soit E un espace euclidien de dimension 2 et soit $s \in O(E) \setminus SO(E)$.

Pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E , il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = S(\theta)$.

Alors s est une symétrie orthogonale de E par rapport à une droite.

Remarque Les isométries vectorielles d'un plan euclidien sont donc les rotations et les symétries orthogonales par rapport à une droite.

En pratique Pour étudier une matrice orthogonale A :

- Étape 1 : Vérifier que $A \in O_2(\mathbb{R})$ (par exemple en calculant $A^T A$).
- Étape 2 : calculer $\det(A)$.
 - Si $\det(A) > 0$, alors on lit $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sur la matrice, puis on détermine θ .
L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A est la rotation d'angle θ .
 - Si $\det(A) < 0$, alors on détermine la droite $D = \text{Ker}(A - I_2)$.
L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A est la symétrie orthogonale par rapport à D .

V - Rotations en dimension trois

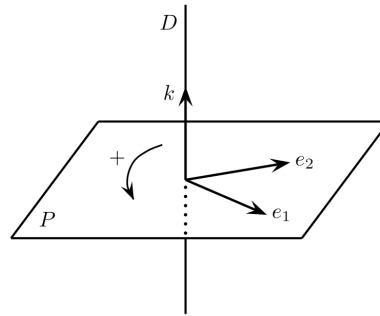
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et soit $r \in SO(E)$ tel que $r \neq \text{id}_E$.

Propriété L'ensemble $\text{Ker}(r - \text{id}_E)$ est une droite. On l'appelle l'axe de la rotation r .

Etude de la rotation r

Soit $D = \text{Ker}(r - \text{id}_E)$, soit k un vecteur unitaire de D (il y a deux choix possibles) et soit $P = D^\perp$.

L'orientation de E et le choix de k fournissent une orientation du plan P . Plus précisément, une base $(e_1; e_2)$ du plan P est directe si la concaténation $(e_1; e_2; k)$ est une base directe de E .



Puisque $D = \text{Vect}(k)$ est stable par r , alors $P = D^\perp$ est aussi stable par r (propriété du paragraphe I). L'endomorphisme induit par r sur le plan P est une rotation : soit θ une mesure de son angle.

Soit (e_1, e_2) une base orthonormale directe de P . La matrice de r dans la base (e_1, e_2, k) est
$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

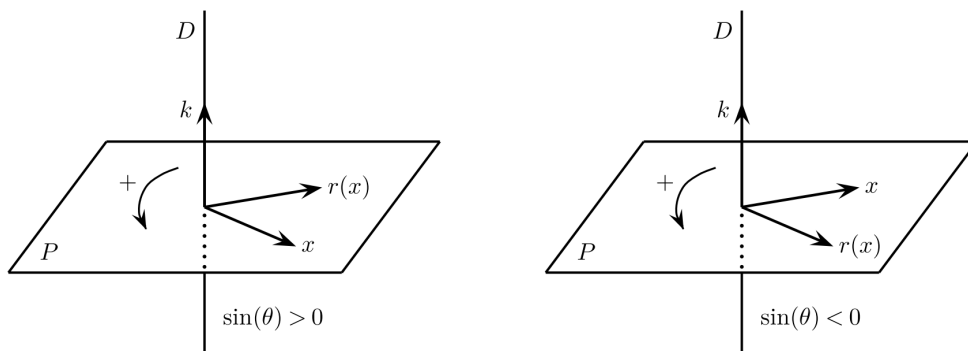
On a en particulier $\boxed{\text{Tr}(r) = 1 + 2\cos(\theta)}$

Propriété Avec les notations précédentes, si $x \in P$ unitaire, si $y \in P$ tel que $\mathcal{C} = (x, y, k)$ soit une base orthonormale directe de E alors

$$\det(\text{Mat}_{\mathcal{C}}(x, r(x), k)) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin(\theta)$$

Remarque On peut montrer que si $x \in P$ non nul (pas forcément unitaire), si $\mathcal{B}$ base orthonormale directe de E ,

$$\text{sgn}(\sin(\theta)) = \text{sgn}(\det_{\mathcal{B}}(x, r(x), k)) \quad (\text{sgn} : \text{signe})$$



En pratique Pour étudier une matrice de rotation A :

- Étape 1 : Vérifier que $A \in SO_3(\mathbb{R})$ (par exemple en calculant $A^T A$ puis $\det(A)$).
- Étape 2 : Déterminer la droite $\text{Ker}(A - I_3)$ et choisir un vecteur directeur k unitaire de cette droite.
- Étape 3 : Calculer la trace de A et en déduire $\cos(\theta)$.
- Étape 4 : A l'aide de $x \in P = D^\perp$, déterminer $\sin(\theta)$ ou le signe de $\sin(\theta)$ et en déduire θ .

Complement de cours chapitre 13 : Automorphismes orthogonaux, Isométries vectorielles

∝ Démonstration de cours 1 Si $u \in \mathcal{L}(E)$, u conserve la norme euclidienne ssi u conserve le produit scalaire.

∝ Démonstration de cours 2 Une symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.

Remarque : construire un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas un automorphisme orthogonal.

Exemple Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par $u(x, y) = \left(ax + ay, \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour quels $a \in \mathbb{R}$ a-t-on u une isométrie vectorielle ?

∝ Démonstration de cours 3 le groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$ est un groupe pour la loi $\circ$.

∝ Démonstration de cours 4 Si $u \in \mathcal{O}(E)$, si F un sev de E qui est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u .

∝ Démonstration de cours 5 : Forme des matrices de $O_2(\mathbb{R})$

Exemple Etude de deux isométries en dimension 3 :

— $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x, y, z) = (y, z, x)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

— Etude de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque notion d'angle entre deux vecteurs non nuls.

Produit mixte et produit vectoriel

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n .

Proposition Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E . Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E .

Alors $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie.

On appelle produit mixte de ces vecteurs le réel $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ avec $\mathcal{B}$ n'importe quelle base orthonormée directe de E . On le note $[x_1, \dots, x_n]$.

Définition Si $n = 3$. Soient x, y des vecteurs de E . L'application $\begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ z \mapsto [x, y, z] \end{cases}$ est une forme linéaire sur E .

D'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur, appelé produit vectoriel de x et y et noté $x \wedge y$, tel que

$$\forall z \in E \quad [x, y, z] = (x \wedge y | z)$$

Proposition Soient $x, y \in E$. Le vecteur $x \wedge y$ est orthogonal à x et y .

Soient $x, y \in E$. $x \wedge y = 0_E$ ssi x et y colinéaires.

Le produit vectoriel est bilinéaire et alternée : soient $x, y \in E$, $y \wedge x = -x \wedge y$.

Soient $x, y \in E$. Si x et y forment une famille orthonormée alors $(x, y, x \wedge y)$ est une base orthonormée directe de E .

Soient $x, y, z \in E$. $|(x, y, z)|$ représente le volume du parallépipède rectangle foré par x, y et z .

Expression dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E : on note (w_1, w_2, w_3) les coordonnées dans $\mathcal{B}$ d'un vecteur w de E

Soient $x, y \in E$, notons $z = x \wedge y$, comme $[x, y, z] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ si on développe par rapport à la dernière colonne on obtient

$$z_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \quad z_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 \quad z_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Chapitre 13 : Automorphismes orthogonaux, Isométries vectorielles

Compétences

- ★ Savoir montrer que u est orthogonal car il conserve les normes.
- ★★ Savoir montrer qu'une symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonal.
- ♠ Croire que si u est orthogonal alors $Mat(u)$ est orthogonale (il faut prendre une base orthonormée).
- ★ Savoir montrer que si λ valeur propre réelle de u et si $u \in O(E)$ alors $|\lambda| = 1$.
- ★ Savoir montrer qu'une matrice est orthogonale en utilisant ses colonnes.
- ★ Savoir montrer que si A, B sont des matrices orthogonales alors AB aussi.
- ★ Savoir montrer que si A orthogonale alors $\det(A) = \pm 1$.
- ♠ Croire que $\det(A) = \pm 1$ implique A orthogonale.
- ★★ Savoir qu'une matrice de passage entre deux bases orthonormées est une matrice orthogonale.
- ★★ Savoir décrire géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice orthogonale de taille 2
- ★★ Savoir décrire géométriquement une rotation en dimension 3

1 Matrices orthogonales et isométries vectorielles

Exercice 13.1.1★ Soit $a \in \mathbb{R}$. La matrice $\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & -a & -a \\ a & -a & -a & a \\ a & -a & a & -a \end{pmatrix}$ est-elle orthogonale ?

Exercice 13.1.2★ Soit $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ unitaire. On pose $M = I_n - 2ZZ^T$.

- Montrer que M est une matrice orthogonale. Soit u canoniquement associé à M .
- Montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de u soit une matrice diagonale avec $n-1$ fois 1 et une fois -1 .

Exercice 13.1.3★★

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (A|B) = \text{tr}(A^T B)$.

On considère $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $f : M \mapsto MP$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On suppose que $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que f est une isométrie vectorielle.
- Réciproquement on suppose que f est une isométrie vectorielle. Montrer que $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. *on partira de $(f(M)|f(N))$*

Exercice 13.1.4★★

Soit E un espace Euclidien et soit u un automorphisme orthogonal. On pose $v = Id_E - u$.

- Montrer que $\text{Ker}(v) = (\text{Im}(v))^\perp$. On note p le projecteur orthogonal sur $\text{Ker}(v)$.
- Montrer que pour tout $x \in E$, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(x)$ tend vers $p(x)$.

Exercice 13.1.5★★Centrale

Soit $f \in O(\mathbb{R}^n)$. On pose $I(f) = \text{Im}(f - id)$ et $K(f) = \text{Ker}(f - id)$.

- Soit F un sev de $\mathbb{R}^n$. Montrer que F est stable par f ssi $F^\perp$ est stable par f .
on pourra travailler matriciellement
- Montrer que $I(f) \oplus K(f) = \mathbb{R}^n$.

Exercice 13.1.6★★Oral CCINP Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\frac{I_n + 2M}{3} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que $(Mx|x) = \|x\|^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
- Que dire de M si on suppose que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
- Montrer que $M = I_n$. *dans cette question on ne suppose plus rien*

Exercice 13.1.7★★Oral Centrale

Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -U^T \\ U & 0_n \end{pmatrix}$ et $M = I_{n+1} + A$.

- Calculer $M^T M$. En déduire que M est inversible. *quel est le rang de UU^T ?*
- Montrer que $M^{-1}M^T$ est une matrice orthogonale.

Exercice 13.1.8***

Soit E un espace Euclidien. On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $\forall x, y \in E, (x|y) = 0 \Rightarrow (u(x)|u(y)) = 0$

1. Montrer que si x et y sont deux vecteurs unitaires de E alors $\|u(x)\| = \|u(y)\|$.
2. En déduire que soit u est l'application nulle soit il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\frac{u}{\lambda}$ soit une isométrie.

Exercice 13.1.9*** Soit E euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $f \in \mathcal{O}(E)$ et $f^2 = -Id_E$. Montrer que $(f(x)|x) = 0$ pour tout $x \in E$.
2. On suppose que $f \in \mathcal{O}(E)$ et $(f(x)|x) = 0$ pour tout $x \in E$. Montrer que $f^2 = -Id_E$.
3. On suppose que $f^2 = -Id_E$ et $(f(x)|x) = 0$ pour tout $x \in E$. Montrer que $f \in \mathcal{O}(E)$.

Dans cet exercice, si $x \in E$, on pourra utiliser le vecteur $x + f(x)$

Exercice 13.1.10*

Soit E euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est une symétrie orthogonal ssi f est une symétrie et f est un automorphisme orthogonal.

Exercice 13.1.11Oral CCP**

Soient $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = M^T$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associé.

1. Trouver un polynôme annulateur de M . Montrer que les valeurs propres réelles de M sont comprises dans $\{0; 1\}$.
2. Montrer que si 0 n'est pas valeur propre de M alors f est une rotation.
3. Montrer que si 0 est valeur propre de M alors M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \{0; 1\}$. Montrer alors que M est diagonalisable et décrire f .

Exercice 13.1.12questions indépendantes**

1. Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $a_{i,j} \in [-1; 1]$ pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$.

2. Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \right| \leq n$ en utilisant le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 13.1.13Oral Centrale**

Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $B_n = I_2 + \frac{1}{n}A$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver un réel α_n tel que $\alpha_n B_n$ soit une matrice de rotation. On note θ_n son angle.
2. Exprimer alors simplement $(\alpha_n B_n)^n$ en fonction de θ_n . En déduire la limite de B_n^n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Si on note B sa limite, caractériser l'application canoniquement associée à B .

Exercice 13.1.14Oral CCINP**

Soient $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = \frac{1}{3}(A + 2B) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On pose $C = A^T B$.

1. Calculer $A^T B + B^T A$. Déterminer un polynôme annulateur de C .
2. Montrer que $\text{Im}(C - I_n)$ et $\text{Ker}(C - I_n)$ sont supplémentaires orthogonaux.
3. Montrer que $A = B$.

2 Isométries en dimensions 2 et 3

Exercice Caractériser l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ (avec $n = 2$ ou $n = 3$) canoniquement associée à

Exercice 13.2.1* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13.2.2* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13.2.3* $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$.

Exercice 13.2.4* $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ -5 & 12 \end{pmatrix}$.

Exercice 13.2.5* $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Donner aussi A^{2020} .

Exercice 13.2.6* $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 13.2.7* $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 13.2.8**

Caractériser l'application linéaire définie par $u(x, y, z) = \left(y, \frac{x+z}{\sqrt{2}}, \frac{x-z}{\sqrt{2}}\right)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 13.2.9*CCINP

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée de E un espace Euclidien.

On pose D la droite dirigée par $e = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 + e_3)$. Soit u la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de la droite D . Donner la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

Exercice 13.2.10*

Donner la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x + y - z = 0$.

Exercice 13.2.11 *CCINP

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$ par deux méthodes. Caractériser géométriquement f .

Exercice 13.2.12*

On se place dans $\mathbb{R}^2$. Soit f une symétrie orthogonale par rapport à une droite D . Soit g une rotation. Caractériser $(f \circ g)^2$, $g \circ f \circ g$ et $f \circ g \circ f$.

Exercice 13.2.13**

On se place dans $\mathbb{R}^3$. Soit u une isométrie vectorielle. Soit f la symétrie orthogonale par rapport à un plan P . Justifier que $u \circ f \circ u^{-1}$ est une symétrie orthogonale et préciser par rapport à quel plan.

Exercice 13.2.14*

1. Caractériser l'application f linéaire de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associée à $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.
2. On considère $\mathcal{C}$ la base $(1, 1), (1, 0)$ de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice de f dans $\mathcal{C}$. Est-elle orthogonale? Est-ce normal?

Exercice 13.2.15 Oral CCINP **

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $M \neq I_3$ et $M^3 = I_3$ et $MM^T = M^T M$.

Montrer que $M \in O_3(\mathbb{R})$ puis que $M \in SO_3(\mathbb{R})$.

Exercice 13.2.16 **Centrale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$. Soit $V_1 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid sp(M) = \{1\}\}$.

1. Donner deux éléments de V_1 . Soit $M \in V_1$, calculer $(M - I_n)^n$.
2. On prend $n = 4$. Trouver $M \in V_1$ telle que $(M - I_4)^2 \neq 0$ et $(M - I_n)^3 = 0_4$.
3. On revient à $n \geq 2$. Trouver $V_1 \cap S_n(\mathbb{R})$.
4. On prend $n = 3$. Trouver $V_1 \cap O_3(\mathbb{R})$.

3 Produit vectoriel

Exercice 13.3.1Mines Ponts**

Soit E Euclidien de dimension 3 orienté. Soit u un vecteur unitaire de E .

Soit $f : x \in E \mapsto (x|u)x + u \wedge x$.

1. Montrer que f est une isométrie et la caractériser.
2. Trouver toutes les isométries g vérifiant $g^2 = f$.

Exercice 13.3.2Mines Ponts**

Soit $(\mathbb{R}^3, (\cdot, \cdot))$ un espace Euclidien. On donne : $\forall a, b, x \in \mathbb{R}^3, a \wedge (b \wedge x) = (a|x)b - (a|b)x$.

Soit $w \in \mathbb{R}^3$ non nul. On pose $f(x) = w \wedge x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

1. Calculer $f^2(x)$ et $f^3(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. En déduire P un polynôme annulateur de f .
2. Donner tous les polynômes $Q \in \mathbb{R}[X]$ non nul, unitaire et qui divise P .
3. Déterminer ceux qui annule f parmi la liste de 2.
4. Déterminer les racines de P . **Prouver** ce que cela implique sur le spectre de f .

14. Endomorphisme symétrique ou auto-adjoint

Dans tout ce chapitre, E est un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique ou auto-adjoint si

$$\forall x, y \in E, \quad (u(x) | y) = (x | u(y))$$

Propriété

- Un projecteur orthogonal est un endomorphisme auto-adjoint.
- Une symétrie orthogonale est un endomorphisme auto-adjoint.

Propriété

Un projecteur de E est un projecteur orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme autoadjoint.

Propriété Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E .

Alors u est un endomorphisme auto-adjoint si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice symétrique.

Propriété Soit u un endomorphisme auto-adjoint de E .

Les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

Théorème spectral Tout endomorphisme auto-adjoint u d'un espace euclidien E est diagonalisable.

De plus, il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u .

Théorème spectral version matricielle Toute matrice symétrique réelle A est diagonalisable.

De plus, il existe P matrice orthogonale (réelle) et D diagonale réelle telles que $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

Définition

- Un endomorphisme auto-adjoint u est positif lorsque : $\forall x \in E, \quad (x|u(x)) \geq 0$.
L'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs de l'espace E est noté $\mathcal{S}^+(E)$.
- Un endomorphisme auto-adjoint u est défini positif lorsque : $\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \quad (x|u(x)) > 0$.
L'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs de l'espace E est noté $\mathcal{S}^{++}(E)$.
- Une matrice symétrique $A \in S_n(\mathbb{R})$ est positive lorsque : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^T A X \geq 0$.
L'ensemble des matrices symétriques positives de taille n est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- Une matrice symétrique $A \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive lorsque : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}, \quad X^T A X > 0$.
L'ensemble des matrices symétriques définies positives de taille n est noté $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Propriété Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E .

u est un endomorphisme auto-adjoint positif (resp. défini positif) ssi sa matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique positive (resp. définie positive).

Propriété Soit $u \in \mathcal{S}(E)$, soit $M \in S_n(\mathbb{R})$,

- | | |
|---|--|
| • $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$ | • $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^+$ |
| • $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$ | • $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^{+*}$ |

Exemples

- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\frac{M + M^T}{2}$ est dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- $\heartsuit$ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $M^T M$ et $M M^T$ sont dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- Un projecteur orthogonal est un endomorphisme auto-adjoint positif.

Complement de cours chapitre 14 : Endomorphisme symétrique ou auto-adjoint

∝ Démonstration de cours 1 cas des symétries et des projections orthogonales.

∝ Démonstration de cours 2 Lien entre endomorphisme auto-adjoint et matrice symétrique.

∝ Démonstration de cours 3 Soit u un endomorphisme auto-adjoint. Les sous espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

ERREUR FATALE Toute matrice symétrique est diagonalisable

Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est de polynôme caractéristique X^2 donc n'est pas diagonalisable sinon elle serait semblable à la matrice nulle donc serait égale à la matrice nulle.

Méthode : nous allons orthodiagonaliser la matrice symétrique réelle suivante $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on pensera à utiliser l'orthogonalité des sous espaces propres.

∝ Démonstration de cours 4 Caractérisation spectrale des endomorphismes auto-adjoints positifs.

Compétences

- ★★ Savoir montrer que u est symétrique avec le produit scalaire.
- ★ Savoir montrer qu'une symétrie orthogonale ou un projecteur orthogonal sont des endomorphismes symétriques.
- ★ Savoir montrer que u est symétrique en montrant que sa matrice dans une base orthonormée est une matrice symétrique.
- ♠ Oublier le mot orthonormée dans la phrase précédente.
- ★★ Savoir que les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux.
- ★★ Connaître le th spectral version endomorphisme.
- ★★ Connaître le th spectral version matricielle.
- ♠ Croire que le th spectral c'est juste "toute matrice symétrique réelle est diagonalisable".
- ♠ Croire que c'est le théorème spectrale.
- ★★ CLASSIQUE : savoir montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $A^T A$ est diagonalisable à spectre inclus dans $\mathbb{R}^+$.
- ★★ CLASSIQUE : savoir montrer que si $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0$ ssi $Sp(A) \subset \mathbb{R}^+$.
- ★★ CLASSIQUE : savoir montrer que si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et si $\lambda_0 = \max Sp(A)$ alors $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \leq \lambda_0 X^T X$

Chapitre 14 : Endomorphisme symétrique ou auto-adjoint

1 Endomorphismes auto-adjoints via la définition

Exercice 14.1.1★

On se place dans $\mathbb{R}_1[X]$ muni d'un produit scalaire tel que $(1, X)$ soit une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.

On considère f définie sur $\mathbb{R}_1[X]$ par $f(aX + b) = (2b + 3a)X + (b + 2a)$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer de deux manières que f est un endomorphisme auto-adjoint.

Exercice 14.1.2★

On se place dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini par $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$.

On considère f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $f(P) = (X^2 - X)P'' + (2X - 1)P'$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

Montrer que f est un endomorphisme auto-adjoint.

Exercice 14.1.3★♡

Soit E euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint.

1. Montrer que $\text{Im}(f) = (\text{Ker } f)^\perp$.
2. Montrer que si F est un sous espace vectoriel de E stable par f alors $F^\perp$ est stable par f .

Exercice 14.1.4★

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $(A|B) = \text{tr}(A^T B)$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

Montrer par la définition que la transposition est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 14.1.5★★

Soit E euclidien. Soient u, v deux endomorphismes auto-adjoints de E .

1. Montrer que $u + v$ est auto-adjoint.
2. Montrer que $u \circ v$ est auto-adjoint si et seulement si u et v commutent.

Exercice 14.1.6★★Oral CCINP

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E un espace Euclidien. On pose $f(x) = \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i$ pour tout $x \in E$.

Montrer que f est un endomorphisme auto-adjoint dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$.

2 Endomorphismes auto-adjoints via le théorème spectral

Exercice 14.2.1★

Soit E euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Soit ρ la plus grande des valeurs propres réelles de f .

1. Montrer que pour tout $x \in E$ on a $(f(x)|x) \leq \rho(x|x)$.
2. Montrer qu'il y a égalité ssi x est dans le sous espace propre associé à ρ .

Exercice 14.2.2★★Oral Mines Ponts 2018

Soit E euclidien. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{tr}(u) = \sum_{k=1}^n (u(e_k)|e_k)$.
2. Soit u un endomorphisme symétrique à spectre positif. Montrer que : $\forall x \in E, (u(x)|x) \geq 0$.
3. Soient u, v deux endomorphismes symétriques à spectres positifs. Montrer que : $\text{tr}(u \circ v) \geq 0$.

Exercice 14.2.3★★Centrale

Soit E euclidien. Soit f un endomorphisme symétrique de E .

On dit que f est une contraction ssi : $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq \|x\|$.

1. Montrer que f est une contraction ssi : $\forall \lambda \in \text{Sp}(f), |\lambda| \leq 1$.
2. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall x \in E, \|P(f)(x)\| \leq (\sup\{|P(\lambda)| \mid \lambda \in \text{Sp}(f)\}) \|x\|$.

Exercice 14.2.4★

Soit E euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique.

On suppose $(f(x)|x) = (x|x)$ pour tout $x \in E$. Montrer que $f = Id_E$.

Exercice 14.2.5★★★

Soit E euclidien non nul. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. On suppose que $tr(u) = 0$.

On va prouver qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u possède une diagonale nulle. On procède par récurrence sur n la dimension de E .

1. Montrer cette propriété pour $n = 1$. Pour la suite on la suppose vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ et on se place dans E de dimension $n + 1$.
2. Énoncer le théorème spectral. Montrer alors qu'il existe $t \in E$, non nul, tel que $(u(t)|t) = 0$. Démontrer alors la propriété au rang $n + 1$.

3 Matrices Symétriques

Exercice 14.3.1

Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique dont l'endomorphisme canoniquement associé n'est pas une symétrie.

Exercice 14.3.2★ Orthodiagonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances de A .

Exercice 14.3.3★★

Soit $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et orthogonale.

1. Montrer que le spectre de A est inclus dans $\{-1; 1\}$
2. Montrer que $n + tr(A)$ est un entier naturel pair puis exprimer $\chi_A(X)$ en fonction de $tr(A)$ et de n .

Exercice 14.3.4★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique vérifiant $A^m = I_n$ pour un $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $A^2 = I_n$.

Exercice 14.3.5★♡

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice avec des 1 partout sauf sur la diagonale où on place des 2.

Justifier que A est diagonalisable et la diagonaliser.

Exercice 14.3.6★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec multiplicités. Montrer que $\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2$.

Exercice 14.3.7 Oral CCINP ★

Soit $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nulles sauf sur les deux diagonales où on place des 1. A est-elle diagonalisable? Donner le spectre de A .

Exercice 14.3.8★♡

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.

Exercice 14.3.9★★ Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ non nul. Soit $A = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de A sans calculer le polynôme caractéristique de A .

Exercice 14.3.10★★Oral CCP

Soit $n \geq 3$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice avec des 1 sur la première ligne, la première colonne et la diagonale et des 0 ailleurs. Justifier que A est diagonalisable puis que 1 est valeur propre de A .

Donner le spectre de A avec la multiplicité de chaque valeur propre.

Exercice 14.3.11★★Oral CCP

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AA^T A = I_n$. Montrer que A est inversible et symétrique. En déduire la valeur de A .

Exercice 14.3.12★★Mines Ponts

Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(tr(M))^2 \leq rg(M)tr(M^2)$ et étudier les cas d'égalité.

Exercice 14.3.13★Mines Telecom

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^T A = A A^T$ et A nilpotente. Montrer que $A^T A = 0_n$ puis que $A = 0_n$.

Exercice 14.3.14★CCINP

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $\mu \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A . Soit $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$ et soient $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de S . Calculer $X^T S X$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\lambda_1 \leq \mu \leq \lambda_n$.

Exercice 14.3.15★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique à valeurs propres positives. Soit $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{tr}(AP) \leq \text{tr}(A)$.

Exercice 14.3.16★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

Soit λ une valeur propre complexe de A et soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

En considérant $\overline{X}^T A X$ montrer que la partie réelle de λ est nulle.

Exercice 14.3.17 Oral CCINP ★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que A et A^T commutent et $A^2 = -I_n$. On pose $S = A^T A$.

1. Montrer que S est diagonalisable et que $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+$. Montrer que $S^2 = I_n$ puis que $S = I_n$.
2. Si $n = 2$ donner toutes les matrices A possibles.

4 Endomorphismes auto-adjoints positifs

Exercice 14.4.1★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que A et A^T commutent. Montrer que A est la matrice nulle.

Exercice 14.4.2★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Ker}(A^T A) = \text{Ker}(A)$ puis $\text{Im}(A^T A) = \text{Im}(A^T)$.

Exercice 14.4.3 Oral Mines Ponts 2019 ★★

Soient $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = SAS$.

Montrer que : $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ssi S est inversible et $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 14.4.4★★

On pose $H = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$. En utilisant $\int_0^1 x^{i+j-2} dx$, montrer que H est définie positive.

Exercice 14.4.5★ ★★ décomposition polaire

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles à valeurs propres strictement positives.

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ montrer qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.
2. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M^T M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
En déduire qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $M = OS$.

Exercice 14.4.6★ ★★ Centrale 2018

On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles à valeurs propres strictement positives.

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = (P(A))^2$.

Exercice 14.4.7★★ Mines Ponts 2018

Soit E euclidien. On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques à spectre positif.

1. Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $u = v^2$.
2. Soient $u, v \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer que $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) = \text{Ker}(u+v)$.

Exercice 14.4.8★ ★★ Centrale

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A + I_n) \geq 1 + \det(A)$ puis que $\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$.

Exercice 14.4.9★★ Mines Ponts

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $V_1, \dots, V_m$ une famille libre de vecteurs propres réels de A .

Soit Q la matrice de colonnes $V_1, \dots, V_m$. Soit $S = QQ^T$.

Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, que $\text{rg}(S) = m$ et que $AS = SA^T$.

Exercice 14.4.10★★ ENS(extrait)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive de rang $k \geq 1$.

Montrer qu'il existe $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = U_1 U_1^T + \dots + U_k U_k^T$.

Annexe : endomorphismes remarquables

11. Projecteurs et symétries

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition

- On appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.
- On appelle symétrie de E tout endomorphisme s de E tel que $s \circ s = \text{id}_E$.

Caractérisations matricielles

Supposons E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit u un endomorphisme de E , soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

- L'endomorphisme u est un projecteur de E si et seulement si $A^2 = A$.
- L'endomorphisme u est une symétrie de E si et seulement si $A^2 = I_n$.

12. Espaces préhilbertiens réels

Soit E un espace préhilbertien réel.

Caractérisations

- Un projecteur p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont orthogonaux.
- Une symétrie s est une symétrie orthogonale si et seulement si $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$ sont orthogonaux.

13. Automorphismes orthogonaux, Isométries vectorielles

Définition Soit E un espace euclidien.

On appelle automorphisme orthogonal de E ou isométrie vectorielle de E tout endomorphisme u de E tel que :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$$

Caractérisation

Un endomorphisme u de E est un automorphisme orthogonal de E si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, (u(x) | u(y)) = (x | y)$$

Caractérisation matricielle

Soit u un endomorphisme de E , soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

L'endomorphisme u est un automorphisme orthogonal de E si et seulement si ${}^tAA = I_n$.

14. Endomorphismes symétriques ou auto-adjoints

Soit E un espace euclidien.

Définition

On appelle endomorphisme auto-adjoint de E tout endomorphisme u de E tel que :

$$\forall x, y \in E, (u(x) | y) = (x | u(y))$$

Caractérisation matricielle

Soit u un endomorphisme de E , soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

L'endomorphisme u est un endomorphisme auto-adjoint de E si et seulement si ${}^tA = A$.

Définition-Propriété Soit u un endomorphisme auto-adjoint de E

- u est un endomorphisme positif ssi pour tout $x \in E$, $(u(x)|x) \geq 0$ ssi $Sp(u) \subset \mathbb{R}^+$
- u est un endomorphisme défini positif ssi pour tout $x \in E$ non nul, $(u(x)|x) > 0$ ssi $Sp(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$

15. Espaces vectoriels normés

Propriété Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui admet une borne supérieure alors : $\forall k \in \mathbb{R}^+, \sup(kA) = k \sup(A)$.

I - Normes

Dans tout ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition On appelle norme sur E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- $\forall x \in E, (N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$
- $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

Définition On appelle espace vectoriel normé tout espace vectoriel muni d'une norme.

Exemples

- L'application qui à un réel x associe sa valeur absolue $|x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$.
- L'application qui à un complexe z associe son module $|z|$ est une norme sur $\mathbb{C}$.
- Si E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\bullet | \bullet)$, alors l'application $x \mapsto \sqrt{(x | x)}$ est une norme sur E . On l'appelle la norme euclidienne associée au produit scalaire $(\bullet | \bullet)$.

Exemples Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout vecteur $x = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad , \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

Les applications $\|\bullet\|_1, \|\bullet\|_2$ et $\|\bullet\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

Exemples Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \quad , \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Les applications $\|\bullet\|_1, \|\bullet\|_2$ et $\|\bullet\|_\infty$ sont des normes sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$.

Propriété : inégalité triangulaire généralisée

Si $\|\bullet\|$ est une norme sur E , alors, pour toute famille de vecteurs $(x_1; x_2; \dots; x_n) \in E^n$, $\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\|$.

Propriété : inégalité triangulaire renversée

Si $\|\bullet\|$ est une norme sur E , alors, pour tous vecteurs x et y de E , $|||x| - |y||| \leq \|x - y\|$.

Définition Soient N_1 et N_2 deux normes sur E .

On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes si il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $\forall x \in E, \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$

Exemple Les normes N_1, N_2 et N_∞ (définies par $N_1(x, y) = |x| + |y|$, $N_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $N_\infty(x, y) = \max(|x|, |y|)$) pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sont équivalentes car : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$N_\infty(x, y) \leq N_1(x, y) \leq 2N_\infty(x, y) \quad \text{et} \quad N_\infty(x, y) \leq N_2(x, y) \leq \sqrt{2}N_\infty(x, y) \quad \text{donc} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}N_2(x, y) \leq N_1(x, y) \leq 2N_2(x, y)$$

Remarque Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, il suffit de trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments non nuls de E telle que $\left(\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $\left(\frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne soit pas bornée.

Théorème Si E est de dimension finie alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Définition Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E .

- Soit A une partie de E .
On dit que A est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x \in A$, $\|x\| \leq M$.
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .
On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leq M$.
- Soit X un ensemble et soit $f : X \rightarrow E$ une application.
On dit que f est bornée sur X s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x \in X$, $\|f(x)\| \leq M$.

Remarque si on a deux normes équivalentes, le caractère borné ne dépend de la norme choisie.

II - Boules et convexité

Dans tout ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

Définition

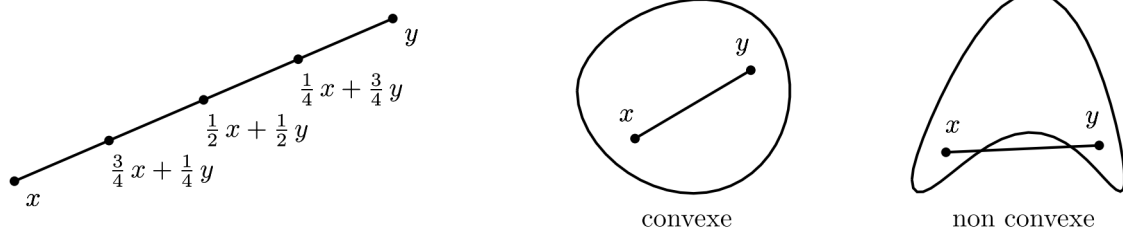
On appelle distance entre deux vecteurs x et y le nombre noté $d(x, y)$ et défini par : $d(x, y) = \|x - y\|$.

Définition Soit a un vecteur de E et soit r un réel positif.

- On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble $\mathcal{B}_o(a, r) = \{x \in E; \|a - x\| < r\}$.
- On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble $\mathcal{B}_f(a, r) = \{x \in E; \|a - x\| \leq r\}$.
- On appelle sphère de centre a et de rayon r l'ensemble $\mathcal{S}(a, r) = \{x \in E; \|a - x\| = r\}$.

Définition

- Soient x et y deux vecteurs de E .
On appelle segment d'extrémités x et y l'ensemble $\{\lambda x + (1 - \lambda)y; \lambda \in [0, 1]\}$.
- Une partie A de E est dite convexe si, pour tous $x, y \in A$, le segment d'extrémités x et y est inclus dans A .
Autrement écrit, A est convexe si : $\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in A$



Propriété Une boule (ouverte ou fermée) est convexe.

III - Suites d'un espace vectoriel normé de dimension finie

Dans tout ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

Définition Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E et soit a un vecteur de E .

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a si $\|u_n - a\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ autrement dit si : $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, \|u_n - a\| \leq \varepsilon$

Propriété

Si on a deux normes équivalentes, la convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas du choix de la norme. C'est en particulier le cas en dimension finie.

Propriété

- Toute suite convergente est bornée.
- Si une suite est convergente alors toute suite extraite est convergente, de même limite.

Propriété Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E et soit $\mathcal{B} = (e_1; e_2; \dots; e_p)$ une base de E .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $(u_{n,1}; u_{n,2}; \dots; u_{n,p}) \in \mathbb{K}^p$ les coordonnées de u_n dans la base $\mathcal{B}$: $\underbrace{u_n}_{\in E} = \sum_{k=1}^p \underbrace{u_{n,k}}_{\in \mathbb{K}} \underbrace{e_k}_{\in E}$

Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si les p suites $(u_{n,1})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{n,2})_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (u_{n,p})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

Auquel cas : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sum_{k=1}^p \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n,k} \right) e_k$.

Exemple

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $A_n = \begin{pmatrix} 2^{1/n} & 2 + \frac{1}{n} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$. La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque : la convergence uniforme du chapitre 23 correspond à la convergence pour la norme $\|\bullet\|_\infty$.

IV - Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie

Dans tout ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie et A est une partie de E .

Définition

Un vecteur a de E est appelé point intérieur à A s'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_o(a, r) \subset A$.

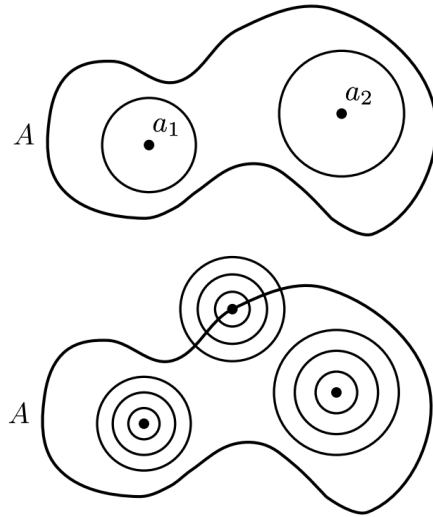
On appelle intérieur de A l'ensemble des points intérieurs à A . Cet ensemble est noté $\overset{\circ}{A}$.

Un vecteur a de E est appelé point adhérent à A si, pour tout $r > 0$, $\mathcal{B}_o(a, r) \cap A \neq \emptyset$.

On appelle adhérence de A l'ensemble des points adhérents à A . Cet ensemble est noté $\bar{A}$.

On appelle frontière de A l'ensemble $\bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Cet ensemble est noté ∂A ou $\text{Fr}(A)$.

On remarque que $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \bar{A}$



Exemple Dans $\mathbb{R}$, si $I =]0; 1]$, alors $\overset{\circ}{I} =]0; 1[$, $\bar{I} = [0; 1]$ et $\text{Fr}(I) = \{0; 1\}$.

Caractérisation séquentielle

$a \in \bar{A}$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de A qui converge vers a .

Exemple

- L'intérieur d'une boule (ouverte ou fermée) est la boule ouverte correspondante.
- L'adhérence d'une boule (ouverte ou fermée) est la boule fermée correspondante.
- La frontière d'une boule (ouverte ou fermée) est la sphère correspondante.

Définition

- On dit que A est un ouvert de E si tous les points de A sont des points intérieurs à A c'est-à-dire $\overset{\circ}{A} = A$. Autrement écrit, A est un ouvert de E si : $\forall a \in A, \exists r > 0, \mathcal{B}_o(a, r) \subset A$
- On dit que A est un fermé de E si tous les points adhérents à A appartiennent à A c'est-à-dire $\bar{A} = A$.

Exemples

- Les ensembles E et $\emptyset$ sont des ouverts de E . Les ensembles E et $\emptyset$ sont aussi des fermés de E .
- Une boule ouverte est un ouvert. Une boule fermée est un fermé. Une sphère est un fermé.

Propriété

- Le complémentaire d'un ouvert est un fermé et le complémentaire d'un fermé est un ouvert.
- Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
- Une intersection quelconque de fermés est un fermé. Une réunion finie de fermés est un fermé.

Propriété : caractérisation séquentielle d'un fermé

L'ensemble A est un fermé si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de A qui converge, la limite appartient à A .

Remarque On a invariance des notions topologiques pour deux normes équivalentes.

Définition On dit que A est une partie dense de E si tout vecteur de E est la limite d'une suite d'éléments de A .

Exemples $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

V- Limite et continuité

Dans tout ce paragraphe, $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie, A est une partie de E et $f : A \rightarrow F$ est une application.

Définition Soit $a \in E$ un point adhérent à A et soit $b \in F$. On dit que f admet b pour limite en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon$$

Auquel cas, on dit aussi que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a et on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Propriété : caractérisation séquentielle d'une limite

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers a , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers b .

Définition

- Soit $a \in A$. On dit que f est continue en a si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.
- On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A .

V-1) Propriétés des fonctions continues

Propriété

- Une combinaison linéaire de fonctions continues est une fonction continue.
- Une composée de fonctions continues est une fonction continue.

Théorème des bornes atteintes

Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur A et si A est une partie non vide fermée bornée, alors f est bornée et atteint ses bornes. La phrase " f atteint ses bornes" signifie qu'il existe x_1 et x_2 dans A tels que $f(x_1) = \inf_{x \in A} f(x)$ et $f(x_2) = \sup_{x \in A} f(x)$.

Propriété

- Si $f : E \rightarrow F$ est continue sur E , alors l'image réciproque d'un ouvert de F est un ouvert de E .
- Si $f : E \rightarrow F$ est continue sur E , alors l'image réciproque d'un fermé de F est un fermé de E .
- Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur E , alors l'ensemble $\{x \in E; f(x) > 0\}$ est un ouvert.
- Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur E , alors les ensembles $\{x \in E; f(x) \geq 0\}$ et $\{x \in E; f(x) = 0\}$ sont des fermés.

V-2) Exemples de fonctions continues

Propriété

Une fonction polynomiale $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}; (x_1; x_2; \dots; x_n) \mapsto \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n \in \{0, \dots, d\}} a_{k_1, k_2, \dots, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ est continue.

Définition

Soit $k \in \mathbb{R}^+$. On dit que $f : A \rightarrow F$ est k -lipschitzienne sur A si, pour tous $x, y \in A$, $\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$.

Propriété Toute fonction lipschitzienne est continue.

Corollaire La fonction $x \mapsto \|x\|_E$ est continue.

Propriété

- En dimension finie, toute application linéaire est continue.
- En dimension finie, toute application multilinéaire (c'est-à-dire linéaire par rapport à chaque variable) est continue.

Exemple

- Le déterminant $M \mapsto \det(M)$ est une application continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (car linéaire par rapport à chaque colonne ou car polynomiale par rapport aux coefficients de M).
- Le produit matriciel est une application continue sur $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ (car $(A, B) \mapsto AB$ est bilinéaire).

Complement de cours chapitre 15 : Espaces vectoriels normés

Remarque : si E espace préhilbertien réel, justifions que $N : x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ est une norme sur E :

- N est bien une application de E dans $\mathbb{R}^+$.
- Si $x \in E$, si $N(x) = 0$ alors $(x|x) = 0$ donc $x = 0_E$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, N(\lambda x) = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2(x|x)} = |\lambda|N(x)$.
- $\forall x, y \in E, N(x+y)^2 = (x+y|x+y) = (x|x) + 2(x|y) + (y|y) = N(x)^2 + N(y)^2 + 2(x|y)$.
Par Cauchy Schwarz $(x|y) \leq N(x)N(y)$ ainsi $N(x+y)^2 \leq (N(x) + N(y))^2$ et donc $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ car les termes sont positifs.

∝ **Démonstration de cours 1** $\|\bullet\|_1$ et $\|\bullet\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$. Dessins des boules unités pour $\|\bullet\|_1, \|\bullet\|_2$ et $\|\bullet\|_\infty$.

∝ **Démonstration de cours 2** Inégalité triangulaire inversée

Remarque : pourquoi supposer que E est de dimension finie pour une partie des notions enseignées ?

- On se place dans $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et on pose $f_n : x \mapsto nx^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Si on considère $\|\bullet\|_1$ alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée car $\|f_n\|_1 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Si on considère $\|\bullet\|_\infty$ alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée car $\|f_n\|_\infty = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Ainsi la notion de suite bornée dépend de la norme choisie !
- Mais si on se place en dimension finie, ce genre de situation est impossible. Cela vient du fait qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes.
- Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, on peut observer que $\forall x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq 2\|x\|_\infty$.
Ainsi si une suite est bornée pour $\|\bullet\|_1$ il est en de même pour la norme $\|\bullet\|_\infty$ et inversement.
- Vous devez aussi savoir justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{2}\|x\|_\infty$

∝ **Démonstration de cours 3** Equivalence de la convergence et de la convergence des coordonnées en dimension finie.

∝ **Démonstration de cours 4** : une boule fermée est convexe et bornée.

∝ **Démonstration de cours 5** : une boule ouverte est un ouvert.

∝ **Démonstration de cours 6** : Si A est un ouvert alors A^c est un fermé.

∝ **Démonstration de cours 7** : $x \in \overline{A}$ ssi il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x

∝ **Démonstration de cours 8** : si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur E alors $\{x \in E \mid f(x) \geq 0\}$ est un fermé.

∝ **Idée de démonstration** : si $f : E \rightarrow F$ est k -lipschitzienne alors f est continue sur E .

Soit $a \in E$. On a, lorsque x tend vers a :

$$\|f(x) - f(a)\|_F \leq k\|x - a\|_E \rightarrow 0$$

Donc $f(x)$ tend vers $f(a)$. Donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, donc f est continue en a .

Comme c'est valable pour tout $a \in E$ on a bien f continue sur E .

∝ **Remarque** $N : x \mapsto \|x\|$ est continue de E dans $\mathbb{R}$ (la norme sur $\mathbb{R}$ est la valeur absolue).

En effet elle est 1 lipschitzienne sur E par l'inégalité triangulaire inversée

$$\forall x, y \in E, |N(x) - N(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| = N(x - y)$$

Chapitre 15 : Espaces vectoriels normés

Compétences

- ★ Savoir montrer que l'on a une norme. Souvent avec les arguments ("somme de termes positifs" et "inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$ ").
- ★★ Savoir montrer que $\|\bullet\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$. Notamment on montre des inégalités sur $\max_{1 \leq i \leq n}$ en montrant à i fixé puis "en passant au maximum".
- ★ Savoir qu'une norme provenant d'un produit scalaire (norme Euclidienne) est une norme.
- ★★ Savoir montrer l'inégalité triangulaire inversée
- ★ Savoir la définition d'une boule (ouverte ou fermée)
- ★★ Savoir montrer qu'un ensemble est convexe (une seule méthode!)
- ♠ Prendre $\lambda \in \mathbb{R}$ et non $\lambda \in [0; 1]$ dans la méthode précédente.
- ★★ Savoir qu'en dimension finie la convergence d'une suite de vecteurs se traduit par la convergence coordonnée par coordonnée (dans n'importe quelle base!)
- ★★ Savoir montrer qu'un ensemble est fermé par caractérisation séquentielle
- ♠ Essayer de montrer que la suite converge dans la caractérisation séquentielle.
- ★★ Savoir montrer qu'un ensemble est ouvert en montrant que son complémentaire est fermé.
- ♠ Penser que si on montre que F est fermé alors F n'est pas ouvert.
- ★★ Savoir montrer qu'un ensemble n'est pas fermé en construisant une suite explicite qui contredit la caractérisation séquentielle.
- ★ Savoir montrer qu'un ensemble est fermé en montrant qu'il s'écrit $\{x \in E | f(x) \geq 0\}$ ou $\{x \in E | f(x) = 0\}$ avec f continue de E dans $\mathbb{R}$. Par exemple l'ensemble des matrices de trace nulle.
- ★★★ Savoir que x est dans l'adhérence de A ssi il existe une suite d'éléments de A dont la limite est x .
- ★ Savoir que si f est continue sur E et si x_n tend vers x alors $f(x_n)$ tend vers $f(x)$.
- ★ Connaître les exemples de référence de fonctions continues (polynomiales, linéaire ou multilinéaire sur E qui est de dimension finie, lipschitzienne) dont $\det$ et $\|\bullet\|$.
- ★★ Savoir qu'une fonction de E dans $\mathbb{R}$ qui est continue sur un fermé borné est bornée et atteint ses bornes.
- ★★ Savoir relier un vecteur x de E non nul à $\{t \in E | \|t\| = 1\}$ (qui est fermé borné) en posant $y = \frac{x}{\|x\|}$
- ★ CLASSIQUE : manipuler le rayon spectral $\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$.
- ★★ CLASSIQUE : savoir montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N(A) = \sup_{X \in \mathbb{R}^n, \|X\|=1} \|AX\|$ alors $N(A)$ existe et N définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (nommée norme subordonnée). On a de plus $\|AX\| \leq N(A)\|X\|$
- ★★★ CLASSIQUE : savoir montrer que toute matrice est limite d'une suite de matrices inversibles (i.e. l'adhérence de $GL_n(\mathbb{K})$ est $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou encore $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

1 Normes

Exercice 15.1.1★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose $N(P) = \sum_{k=0}^n |P(a_k)|$. Montrer que l'on a une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 15.1.2★

Soit $a \in \mathbb{K}$ fixé. Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$ on pose $N(P) = \max(|P^{(k)}(a)|, k \in \{0, \dots, n\})$. Montrer que l'on a une norme sur $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 15.1.3★

Pour tout $f \in C^1([0; 1], \mathbb{R})$, on pose $N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt$. Montrer que l'on a une norme sur $C^1([0; 1], \mathbb{R})$.

Exercice 15.1.4★

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N(P) = |P(2)| + \sup_{t \in [0; 1]} |P'(t)|$. Montrer que l'on a une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 15.1.5★★

Soit $E = C^1([0; 1], \mathbb{R})$. Soit $F = \{f \in E | f(0) = 0\}$. On pose pour tout $f \in F$, $N(f) = \|f'\|_\infty$.

1. Montrer que l'on a une norme sur F .
2. Montrer que N et $\|\bullet\|_\infty^{[0; 1]}$ ne sont pas des normes équivalentes.

Exercice 15.1.6Centrale**

On considère $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$ sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $N(A) = \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $N(AB) \leq N(A)N(B)$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
3. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \|AX\|_\infty \leq N(A)\|X\|_\infty$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que toutes les valeurs propres réelles de A sont de module inférieur ou égal à $N(A)$.

Exercice 15.1.7CCINP**

On se place dans $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$. On pose la norme : $N_0(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$.

On pose $N_1(f) = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| + \int_0^1 |f'(t)| dt$ pour tout $f \in E$.

1. Montrer que N_1 est une norme sur E .
2. Montrer que pour tout $f \in E$, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = \int_0^1 f(t) dt$.
3. Montrer que pour tout $f \in E$, $N_0(f) \leq N_1(f)$. Peut-on avoir égalité ?
4. Montrer que N_0 et N_1 ne sont pas des normes équivalentes.

Exercice 15.1.8**

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\|AB\|_\infty \leq n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.
2. Quelle majoration obtient-on pour $\|A^k\|_\infty$, $k \in \mathbb{N}^*$?
3. Montrer que si A et B sont semblables alors il existe $C > 0$ tel que $\frac{\|B\|_\infty}{C} \leq \|A\|_\infty \leq C\|B\|_\infty$.
4. On suppose que A possède toutes ses valeurs propres de module strictement inférieur à 1 et que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers B . Montrer que $\text{Tr}(B) = 0$ et que $B^2 = B$. Qu'en déduit-on sur B ?

Exercice 15.1.9Mines Ponts**

Soit E l'espace des suites réelles bornées. Si $u \in E$ on pose $N_1(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$ et $N_2(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont bien définis et sont des normes sur E .
2. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $N_2 \leq CN_1$. Montrer qu'il n'existe pas $D \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $N_1 \leq DN_2$.

Exercice 15.1.10**

On pose pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$, $\|A\|_a = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ et $\|A\|_b = \sup_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$.

Montrer que ces normes sont équivalentes et déterminer des relations de comparaisons entre elles.

Exercice 15.1.11*Centrale**

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $(A|B) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}b_{i,j}$ et $\|A\| = \sqrt{(A|A)}$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On admet que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. Soit $F : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto 2M - MAM$.

On pose $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AM_0 = M_0A$ et $M_{p+1} = F(M_p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que F est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Si on suppose que (M_p) converge et que sa limite N est inversible, donner l'expression de N .
3. Montrer que si $\|I_n - AM_0\| < 1$ alors $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers A^{-1} .
On pourra étudier $(M_p A - I_n)_{p \in \mathbb{N}}$

Exercice 15.1.12Mines Ponts**

1. Soit E un espace vectoriel muni de deux normes N_1 et N_2 équivalentes. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge pour N_1 . Montrer que cette suite converge pour N_2 .
2. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Si $a \in \mathbb{R}$, on pose $N_a(P) = |P(a)| + \|P'\|_\infty^{[0;1]}$ pour tout $P \in E$.
 - (a) Montrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.
 - (b) Si $a, b \in [0, 1]$, montrer que N_a et N_b sont équivalentes.
 - (c) A-t-on toujours N_a et N_b équivalentes ? on pourra utiliser la suite $((X/2)^n)_{n \in \mathbb{N}}$

2 Topologie.

E désigne un $\mathbb{K}$ e.v. de dimension finie dans cette section sauf mention contraire.

Exercice 15.2.1★

Montrer, par deux méthodes différentes, que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15.2.2★

Montrer, en utilisant la fonction sinus, que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$.

Exercice 15.2.3★

Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15.2.4★*Ecrit CCP*

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si tous ses coefficients sont dans $[0; 1]$ et si la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est une partie fermée bornée et convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15.2.5★ ★ Centrale

Soit $a \in]0; 1[$. Soit $E = C^0([-a; a], \mathbb{R})$. On pose F l'ensemble des fonctions polynomiales de E .

1. On pose $f_n(x) = 1 + x + \dots + x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-a; a]$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément de E pour la norme $\|\bullet\|_\infty$.
2. Que peut-on en déduire sur F ?
3. Soit $f : [-a; a] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que la suite $(f^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée pour $\|\bullet\|_\infty$. Montrer que f appartient à l'adhérence de F .

Exercice 15.2.6★★

Montrer qu'un sous espace vectoriel F , d'un espace vectoriel normé E , qui contient une boule ouverte de centre 0_E et de rayon $r > 0$ est égal à E . *Autre version de cet exercice : Si F est un sev différent de E alors $\overset{\circ}{F} = \emptyset$*

Exercice 15.2.7★

Montrer qu'un hyperplan d'un espace vectoriel normé de dimension finie est un fermé.

Exercice 15.2.8★

Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15.2.9★

Soit E un espace Euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que $F^\perp$ est un fermé de E .

Exercice 15.2.10★★

Trouver une intersection quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

Exercice 15.2.11★

Montrer que l'ensemble des vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $x_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $x_1 + \dots + x_n = 1$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 15.2.12★

Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 15.2.13★ ★ *Oral MinesPonts PSI*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique telle que la suite (A^k) converge. Montrer que sa limite est nulle.

Exercice 15.2.14★CCINP

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour quel(s) réel(s) a la suite $(a^n A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle vers une limite non nulle?

Exercice 15.2.15★

Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 15.2.16★

Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15.2.17★★

Soient A, B deux partie de E telles que $A \subset B$.

Montrer que l'adhérence de A est inclus dans l'adhérence de B . Même question avec l'intérieur.

Exercice 15.2.18***

Soit A une partie de E . Montrer que $\overline{A^c} = \left(\overset{\circ}{A}\right)^c$

Exercice 15.2.19★

Montrer que l'adhérence d'un sous espace vectoriel de E est un sous espace vectoriel de E .

Exercice 15.2.20★

Montrer que si A est une partie convexe de E alors son adhérence est une partie convexe de E .

Exercice 15.2.21★

Montrer que $T = \{(x, y) \in [0; 1]^2 \mid x + y \geq 1\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15.2.22★★

Soit $F = \{f \in C^0([0; 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 1 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt = 0\}$. Montrer que F est fermé pour $\|\bullet\|_{\infty}^{[0;1]}$.

Exercice 15.2.23★★*Oral Mines Ponts* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est X^n et en déduire la valeur de $\det(A + I_n)$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MA$.
 - (a) Montrer que, si M est inversible, alors $\det(A + M) = \det(M)$.
 - (b) Montrer que si M n'est pas inversible alors $M_k = M - \frac{1}{k}I_n$ est inversible à partir d'un certain rang.
En conclure que $\det(A + M) = \det(M)$.

Exercice 15.2.24★★*Oral Mines Ponts*

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n . Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |Im(z)|^n$.
2. Montrer que si (A_k) est une suite de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $\chi_{A_k}(z)$ qui tend vers $\chi_A(z)$.
3. Montrer que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inclus dans l'ensemble des matrices trigonalisables.
4. Montrer l'inclusion réciproque.

Exercice 15.2.25★★

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
3. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 15.2.26★★

Soit $n \geq 2$. On suppose qu'il existe une norme $\|\bullet\|$ telle que deux matrices semblables possèdent la même norme.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\|AB\| = \|BA\|$.
3. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\|AB\| = \|BA\|$.
4. En déduire une absurdité.

3 Continuité

Exercice 15.3.1★

Soit E un espace Euclidien. Montrer que le produit scalaire est continue sur E^2 .

Exercice 15.3.2★

1. Justifier que $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x^2 + y, y^3 - 2x, x)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier que $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{xy}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Justifier que $f_3 : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P \mapsto P'$ est continue sur $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Justifier que $f_4 : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M \mapsto P^{-1}MP$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 15.3.3★

Montrer que l'application trace est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en montrant qu'elle est lipschitzienne.

Exercice 15.3.4★★*Oral Mines Ponts PSI*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = 2A^2 - \frac{3}{2}A + \frac{1}{2}I_n$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge. Montrer que sa limite B est la matrice d'un projecteur.
3. Exprimer B en fonction de A on pourra utiliser un polynôme de Lagrange.

Exercice 15.3.5★

Pour tout $n \geq 2$ on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/n \\ 0 & 0 & (n-1)/n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A_n est diagonalisable et trouver P indépendante de n telle que $P^{-1}A_nP$ soit diagonale pour tout $n \geq 2$.
2. En déduire la limite explicite de A_n^n .

Exercice 15.3.6★

Soient $(E, N_1), (F, N_2)$ deux espaces vectoriels normés (pas forcément de dimension finie). Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que f est continue sur E ssi f est continue en 0_E .
2. On suppose que pour toute suite (x_n) de E qui tend vers 0_E la suite $(f(x_n))$ est bornée. Montrer que f est continue sur E . on procèdera par l'absurde

Exercice 15.3.7★

On se place dans $\mathbb{K}^p$ que l'on identifie à $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ muni d'une norme N . Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Soit $S = \{x \in \mathbb{K}^p, N(x) = 1\}$. Justifier qu'il existe $x_0 \in S$ tel que $N(Ax) \leq N(Ax_0)$ pour tout $x \in S$.

Exercice 15.3.8★★*Oral Centrale PSI*

On se place dans $E = \mathbb{K}^n$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Soient A une partie fermée bornée non vide de E et $f : A \rightarrow A$ vérifiant pour tous $x, y \in A$ on a $\|f(y) - f(x)\| \leq \frac{3}{4}\|y - x\|$

1. Justifier que $g : x \mapsto \|f(x) - x\|$ admet un minimum sur A .
2. Montrer alors qu'il existe un unique $x \in A$ vérifiant $f(x) = x$.
3. On s'intéresse à la suite définie par $u_{p+1} = f(u_p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $u_0 \in A$. Montrer que (u_p) converge.

Exercice 15.3.9★★♥

On identifie $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On considère N une norme sur $\mathbb{K}^n$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $x \mapsto N(Ax)$ définie sur $\{x \in \mathbb{K}^n \mid N(x) = 1\}$ admet un maximum noté $\|A\|$.
2. Montrer que $\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{N(Ax)}{N(x)}$.
3. Montrer que $N(Ax) \leq \|A\|N(x)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $x \in \mathbb{K}^n$.
4. Montrer que $A \mapsto \|A\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ puis que : $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 15.3.10★★★

On se place dans $\mathbb{R}^p$ muni de sa norme Euclidienne $\|\bullet\|_2$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ diagonalisable. On pose $\rho = \max_{\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(f)} |\lambda|$.

1. Montrer que $N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^p, \|x\|_2=1} \|f(x)\|_2$ existe puis montrer que N définit une norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$.
2. Montrer que si λ valeur propre de f alors $N(f^n) \geq |\lambda|^n$. Montrer que $(N(f^n))^{1/n} \geq \rho$.
3. On se place dans une base de diagonalisation $(e_1, \dots, e_p)$ de f .

Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall x = \sum_{i=1}^p x_i e_i, \|f^n(x)\|_2 \leq M \rho^n \sum_{i=1}^p |x_i|$.

Montrer ensuite qu'il existe $c \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\sum_{i=1}^p |x_i| \leq c \|x\|_2$.

4. En déduire la limite de $(N(f^n))^{1/n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 15.3.11★ On se place dans $\mathbb{R}^p$ muni du produit scalaire canonique.

1. Soit $F = \{X \in \mathbb{R}^p \mid \forall i \in \{1, \dots, p\}, x_i \geq 0\}$ et $G = \{X \in \mathbb{R}^p \mid \|X\| = 1\}$. Soit $H = F \cap G$. Montrer que H est un fermé borné de $\mathbb{R}^p$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On pose $\psi(X) = (MX|X)$ pour tout $X \in \mathbb{R}^p$ (identifié à $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$). Justifier l'existence de $X_0 \in H$ tel que $\psi(X_0) = \sup_{X \in H} \psi(X)$.

Exercice 15.3.12★★ On considère les normes suivantes sur $\mathbb{R}[X]$: $N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$ et $N_2(P) = \|P\|_{\infty}^{[0;1]}$.

Montrer que l'opérateur de dérivation $\psi : P \mapsto P'$ est continue de (E, N_1) dans (E, N_1) .

Montrer que ψ n'est pas continue de (E, N_2) dans (E, N_2) .

Exercice 15.3.13★★

1. Montrer tr est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Justifier l'existence et trouver la valeur de $\sup_{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A \neq 0_n} \frac{|tr(A)|}{\|A\|_{\infty}}$.

Exercice 15.3.14★★★Mines Ponts

Soit $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$ on pose $\varphi(f) : x \in [0; 1] \mapsto \int_0^x tf(t)dt$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

2. Montrer que φ est continue de $(E, \|\bullet\|_{\infty})$ sur $(E, \|\bullet\|_1)$.

3. Trouver le plus petit $\alpha > 0$ tel que : $\forall f \in E, \|\varphi(f)\|_{\infty} \leq \alpha \|f\|_1$.

4. Trouver le plus petit $k > 0$ tel que : $\forall f \in E, \|\varphi(f)\|_{\infty} \leq k \|f\|_{\infty}$.

16. Fonctions usuelles

I - Fonction exponentielle

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{x+y} = e^x e^y$
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

II - Fonction logarithme népérien

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{x}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

III - Fonctions puissances

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$

Théorème de croissances comparées.

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ fixés.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)^\gamma}{x^\beta} = +\infty$

IV - Fonctions ch et sh

- $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh}(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$

V - Fonctions cos et sin

- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) + i \sin(x) = e^{ix}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x)$

Formules d'addition.

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

Formules de duplication.

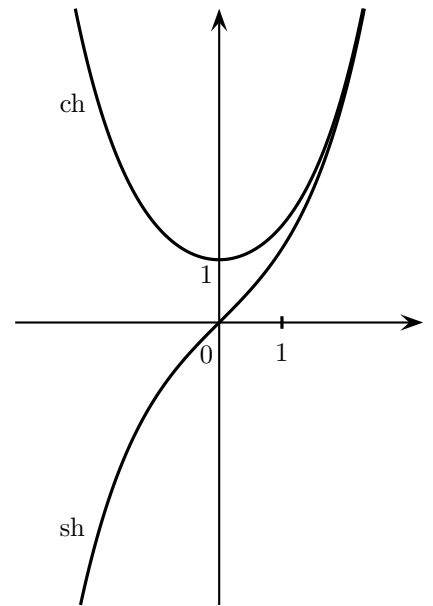
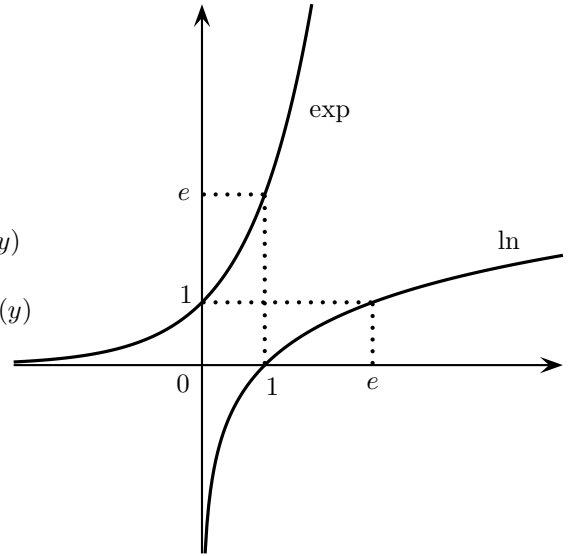
- $\forall a \in \mathbb{R}, \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

Formules de transformation de produit en somme.

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

Formules de transformation de somme en produit.

- $\forall p, q \in \mathbb{R}, \cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\forall p, q \in \mathbb{R}, \cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\forall p, q \in \mathbb{R}, \sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\forall p, q \in \mathbb{R}, \sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

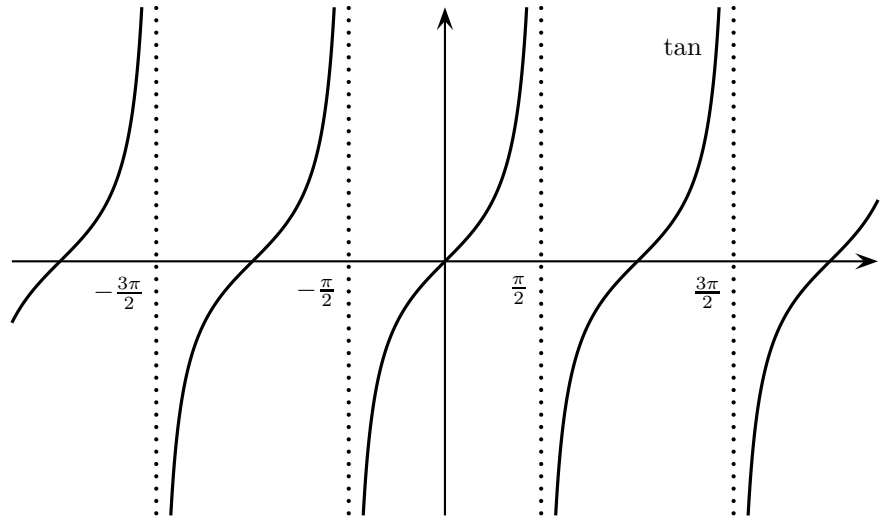


VI - Fonction tan

Soit $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

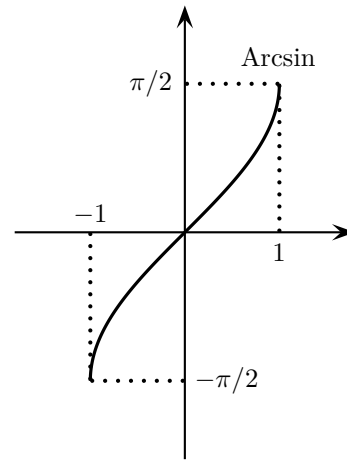
- $\forall x \in D, \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $\forall x \in D, \tan(-x) = -\tan(x)$
- $\forall x \in D, \tan(x + \pi) = \tan(x)$
- $\forall x \in D, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)}$$



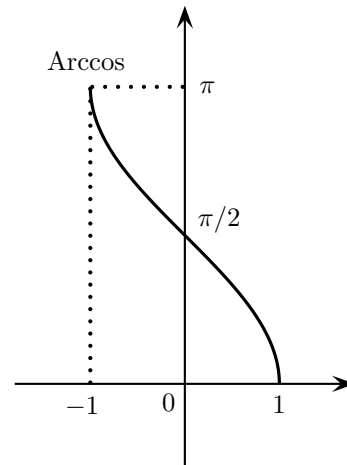
VII - Fonction Arcsin

- bijection réciproque de $\left(\begin{array}{cc} [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] & \rightarrow [-1; 1] \\ x & \mapsto \sin(x) \end{array} \right)$
- $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \text{Arcsin}(\sin(x)) = x$
- $\forall x \in [-1; 1], \sin(\text{Arcsin}(x)) = x$
- $\forall x \in [-1; 1], \cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$
- $\forall x \in [-1; 1], \text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin}(x)$
- $\forall x \in]-1; 1[, \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$



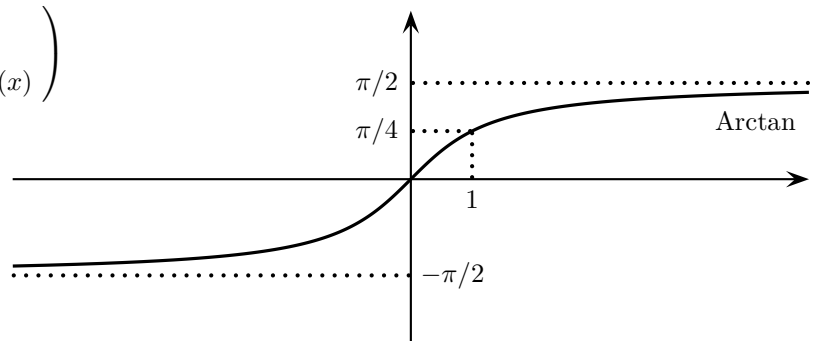
VIII - Fonction Arccos

- bijection réciproque de $\left(\begin{array}{cc} [0; \pi] & \rightarrow [-1; 1] \\ x & \mapsto \cos(x) \end{array} \right)$
- $\forall x \in [0; \pi], \text{Arccos}(\cos(x)) = x$
- $\forall x \in [-1; 1], \cos(\text{Arccos}(x)) = x$
- $\forall x \in [-1; 1], \sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$
- $\forall x \in [-1; 1], \text{Arccos}(x) + \text{Arccos}(-x) = \pi$
- $\forall x \in]-1; 1[, \text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- $\forall x \in [-1; 1], \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$



IX - Fonction Arctan

- bijection réciproque de $\left(\begin{array}{cc}]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \tan(x) \end{array} \right)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\text{Arctan}(x)) = x$
- $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \text{Arctan}(\tan(x)) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arctan}(-x) = -\text{Arctan}(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}^*, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$



17. Suites numériques

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles et on note $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites complexes.

I - Suites majorées, suites minorées, suites bornées

Définition

- Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
- Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite minorée s'il existe un réel m tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$.
- Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Propriété

Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

Remarque Dans le cas complexe, on ne définit pas les notions de suite majorée et de suite minorée car on ne dispose pas de relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{C}$. Par contre, on définit la notion de suite bornée comme dans la propriété ci-dessus.

II - Suites convergentes, suites divergentes

Dans tout ce paragraphe, on considère $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite (réelle ou complexe) et a un nombre (réel ou complexe).

Définition

- On dit que u converge vers a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - a| \leq \varepsilon$$

Auquel cas, on dit aussi que u admet a pour limite et on note $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$.

- On dit qu'une suite diverge s'il n'existe pas de nombre vers lequel elle converge.

Propriété Si une suite u converge vers un nombre a et vers un nombre a' , alors $a = a'$.

Remarque $\left(u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a\right) \Leftrightarrow \left(u_n - a \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0\right) \Leftrightarrow \left(|u_n - a| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0\right)$

Théorème

Une suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si les suites réelles $(\operatorname{Re}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\operatorname{Im}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

Auquel cas : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(u_n)\right) + i \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(u_n)\right)$.

Propriété

- Si u est une suite bornée et si v est une suite convergente vers 0, alors la suite uv converge vers 0.
- Une suite convergente est bornée.

III - Suites qui tendent vers l'infini

Définition

- On dit qu'une suite réelle u tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$$

- On dit qu'une suite réelle u tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq A$$

IV - Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre

Dans tout ce paragraphe, on considère u, v et w des suites réelles.

Propriété de passage à la limite dans une inégalité

On suppose qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

Si u et v sont convergentes, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Remarque Les inégalités strictes deviennent des inégalités larges au passage à la limite.

On a par exemple $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < \frac{1}{n}\right)$ et au passage à la limite on obtient $(0 \leq 0)$.

Théorème d'encadrement

On suppose qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Si u et w sont convergentes de même limite a , alors v est aussi convergente de limite a .

Propriété

On suppose qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

- Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ alors $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.
- Si $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$.

V - Suites monotones

Théorème de la limite monotone

- Si une suite réelle u est croissante et majorée, alors u converge.
- Si une suite réelle u est croissante et non majorée, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.
- Si une suite réelle u est décroissante et minorée, alors u converge.
- Si une suite réelle u est décroissante et non minorée, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$.

VI - Suites adjacentes

Définition

Deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si l'une est croissante, si l'autre est décroissante et si $u_n - v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Théorème

Si u et v sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

VII - Suites extraites

Propriété Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui tend vers $\ell \in \mathbb{C} \cup \{\pm\infty\}$. Toute sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend aussi vers ℓ .

Méthode Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède deux sous-suites ayant des limites différentes alors (u_n) ne possède pas de limite (et donc diverge).

Propriété Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

Si les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et ont même limite ℓ , alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

VIII - Suites récurrentes

Soit I un intervalle réel et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(I) \subset I$ (on dit que I est stable par f). On considère également une suite réelle $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Remarque Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et si la fonction f est continue en ℓ , alors on peut passer à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ et on obtient $\ell = f(\ell)$. Autrement dit, ℓ est un point fixe de f .

Méthode 1 Pour étudier une telle suite, voici un début de démarche possible.

- Dans le cas où la fonction f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, montrer que la suite u est bien définie. Plus précisément, montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que le nombre u_n est bien défini.
- Introduire la fonction f et effectuer une étude rapide (variations et courbe représentative). Tracer aussi la droite d'équation $y = x$ pour conjecturer le nombre de point(s) fixe(s). À l'aide du graphique, conjecturer la monotonie et la nature de la suite u (éventuellement en discutant suivant la valeur de u_0).
- Étudier l'équation $f(x) = x$ (et la résoudre si possible).

Méthode 2 Une autre méthode possible utilise l'inégalité des accroissements finis

- On montre, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ où I est un intervalle sur lequel on a l'existence de $\ell \in I$ un point fixe de f (vérifiant $f(\ell) = \ell$) et l'existence de $k \in [0; 1[$ tel que : $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq k$.
- Par récurrence on montre que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.
- On conclut que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ et on a une majoration de la vitesse de convergence.

IX - Suites arithmético-géométriques

Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$, soit $b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

Méthode

- Déterminer ℓ la solution de l'équation $x = ax + b$ d'inconnue $x \in \mathbb{K}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, introduire $v_n = u_n - \ell$ puis montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a .

X - Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Théorème Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On introduit (EC) l'équation caractéristique $r^2 = ar + b$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$. Soit Δ son discriminant.

- Cas 1 : le cas complexe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)
 - Si $\Delta \neq 0$ alors soit r_1 et r_2 les solutions distinctes de (EC).
Il existe deux complexes λ et μ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
 - Si $\Delta = 0$ alors soit r_0 l'unique solution de (EC).
Il existe deux complexes λ et μ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda n + \mu)r_0^n$.
- Cas 2 : le cas réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
 - Si $\Delta > 0$ alors soit r_1 et r_2 les solutions réelles distinctes de (EC).
Il existe deux réels λ et μ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
 - Si $\Delta = 0$ alors soit r_0 l'unique solution réelle de (EC).
Il existe deux réels λ et μ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda n + \mu)r_0^n$.
 - Si $\Delta < 0$ alors soit $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ les solutions complexes conjuguées de (EC).
Il existe deux réels λ et μ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))\rho^n$.

Complément de cours chapitre 17 : Suites numériques

Démonstration du théorème des suites adjacentes :

- Si (u_n) est croissante et (v_n) décroissante et si $u_n - v_n$ tend vers 0.
- Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $-1 \leq u_n - v_n \leq 1$
- On a donc, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq 1 + v_n \leq 1 + v_0$ et $v_n \geq u_n - 1 \geq u_0 - 1$.
- Par théorème limite monotone, comme (u_n) est croissante majorée (par $1 + v_0$) alors (u_n) converge. Pareil pour (v_n) .
- Comme $u_n - v_n$ tend vers 0 et que (u_n) et (v_n) convergent on peut dire que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Explication sur le théorème des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 dans le cas complexe avec $\Delta \neq 0$

- On note $S_{a,b} = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \forall n \in \mathbb{N}\}$.
- On pose ϕ l'application de $S_{a,b}$ dans $\mathbb{C}^2$ définie par $\phi((u_n)) = (u_0, u_1)$.
- ϕ est une application linéaire injective et surjective. Donc elle est bijective. Donc $\dim(S_{a,b}) = 2$.
- Si r_1 et r_2 sont les solutions distinctes de l'équation caractéristique alors
 - les suites (r_1^n) et (r_2^n) sont dans $S_{a,b}$
 - les suites (r_1^n) et (r_2^n) sont libres.
- Donc $S_{a,b} = \text{Vect}((r_1^n), (r_2^n))$.

Compétences sur les fonctions usuelles

- ★ Les connaître! Les graphes aussi!
- ♠ Dire que $e^{-\ln(x)} = -x$
- ♠ Dire que $a^x b^x = (ab)^{2x}$
- ♠ Dire que $\ln(a+b) = \ln(a) \ln(b)$
- ♠ Dire que $e^{ab} = e^a e^b$ ou $e^{ab} = e^a + e^b$
- ♠ Dire que $\arcsin$ existe sur $[-\pi/2; \pi/2]$
- ♠ Dire que $\ln$ est toujours positive
- ♠ Bref faire des calculs horribles avec $\exp$, $\ln$ et/ou les puissances.
- ★ savoir que " puissances compliquées = $\exp$ et $\ln$ "

Compétences sur les suites numériques

- ♠ Confondre une suite majorée et une suite bornée
- ♠♠ Réussir à majorer des suites complexes (non réelles)!
- ★★ Connaître la définition epsilonlesque de la limite.
- ★ Si on veut montrer que u_n tend vers ℓ on peut essayer de regarder si $u_n - \ell$ tend vers 0 notamment en majorant son module.
- ★ Savoir que les inégalités deviennent larges quand on passe à la limite dans les inégalités.
- ★ Savoir qu'on peut montrer la convergence via le théorème limite monotone.
- ★★ Connaître la définition puis le théorème sur les suites adjacentes.
- ♠ Notamment la convergence des suites est une conclusion pas une hypothèse.
- ★★ Penser à utiliser les sous-suites paires et impaires pour montrer la convergence (même limite finie) ou la divergence (limites différentes ou infinies)
- ★★ Pour les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ il faut relire le plan d'étude (trop long à expliquer ici)
- ★ Connaître les méthodes et les formules des suites arithmético-géométriques et récurrentes linéaires d'ordre 2
- ♠ Placer les quantificateurs n'importe comment dans la rédaction précédente.
- ♠ Confondre les formules des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 avec les formules des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

Chapitre 17 : Suites numériques

1 Savoir reconnaître une suite usuelle

Exercice 17.1.1★ Soient (u_n) et (v_n) vérifiant $u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} + u_n$ et $v_{n+1} = \frac{5}{2}v_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur u_0 et u_1 pour que (u_n) soit bornée. Donner un équivalent de v_n .

Exercice 17.1.2★★

Donner une base de l'ensemble $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2u_n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ en cherchant les suites géométriques qui appartiennent à F .

2 Savoir étudier une suite récurrente

PLAN : on s'intéresse à une suite définie par une formule du type $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- On effectue une rapide étude de la fonction f . On étudie les solutions de $f(x) = x$.
- On trouve un intervalle I contenant u_0 et vérifiant $f(I) \subset I$ (*intervalle stable*)
- On montre par récurrence que u_n existe et $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Parfois on trouve la monotonie en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$ tout simplement (on cherche donc le signe de $f(x) - x$).
- Si f est croissante sur I alors la suite (u_n) sera monotone (croissante OU décroissante) et on peut prouver la monotonie par récurrence en regardant la position de u_0 par rapport à u_1 .
- Si la suite est monotone on utilise le théorème limite monotone pour prouver la convergence ou la divergence de (u_n) en sachant que si u_n converge vers ℓ et si f est continue en ℓ alors on a $f(\ell) = \ell$.
- Si f est décroissante sur I alors on peut passer par les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) qui seront monotones en sachant que si u_{2n} converge vers ℓ et si $f \circ f$ est continue en ℓ alors on a $f \circ f(\ell) = \ell$.
- Si f est dérivable sur I . Si il existe $k \in]0; 1[$ telle que $|f'| < k$ sur I et si $\ell \in I$ est un point fixe de f alors on peut montrer (par récurrence et avec l'inégalité des accroissements finis) que $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc u_n tend vers ℓ .

Exercice 17.2.1★♡

Soit (u_n) définie par $u_0 \geq 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{u_n} \right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$ pour tout $x > 0$.

1. Étudier f et donner le signe de $f(x) - x$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq 1$.
2. Écrire une fonction Python d'arguments $n \in \mathbb{N}$ et $u0 \in [1; +\infty[$ retournant la valeur de u_n .
3. Montrer que (u_n) converge puis trouver sa limite.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - 1|$. Si $u_0 = 5$ donner un rang N à partir duquel $|u_N - 1| \leq 10^{-6}$.

Exercice 17.2.2★ Étudier la nature de la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17.2.3★ On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) converge et trouver sa limite.

Exercice 17.2.4★★ On pose $u_0 \in [0; 1]$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice 17.2.5★★ La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie par $u_0 \in]0; \pi/2[$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que (u_n) est convergente et déterminer la limite de u_n . Déterminer la limite de $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$

2. On admet le th de Cesaro : Si x_n tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k$ tend vers ℓ donner un équivalent de u_n .

Exercice 17.2.6★★

Faites de même avec $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en utilisant cette fois la limite de $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.

Exercice 17.2.7★★★

But : étudier la nature de la suite récurrente définie par $u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = (1 - u_n)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 1]$. Étudier la convergence des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) . Conclusion?

3 Savoir étudier une suite implicite

PLAN : on s'intéresse à une suite définie par u_n est l'unique solution de $f_n(x) = 0$.

- On effectue une rapide étude de la fonction f_n pour appliquer le théorème de la bijection et justifier l'existence.
- Si possible on en profite pour trouver un encadrement de u_n en évaluant le signe de $f_n(\bullet)$ avec $\bullet$ bien choisi.
- On trouve la monotonie en évaluant $f_{n+1}(u_n)$ et en cherchant son signe *on peut aussi évaluer $f_n(u_{n+1})$* .
- On montre la convergence ou la divergence (souvent on trouve la limite en procédant par l'absurde).
- On trouve les termes d'un développement asymptotique de u_n en partant d'une équation de la forme $u_n = g(n, u_n)$ et en remplaçant "le u_n de droite" avec le développement déjà trouvé.

Exercice 17.3.1 Oral CCINP ★★

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^5 + nx - 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution réelle. On la note u_n .
2. Montrer que $u_n \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Convergence de u_n ? Montrer aussi que la suite (u_n) est monotone.
3. Trouver un équivalent v_n de u_n puis donner a et b réels tels que $u_n = v_n + \frac{a}{n^6} + \frac{b}{n^{11}} + o\left(\frac{1}{n^{11}}\right)$.

Exercice 17.3.2 Oral CCINP ★★

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrez que l'équation $nx^3 + n^2x - 2 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note u_n cette solution.
2. Montrer que u_n converge vers 0. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature de $\sum u_n^\alpha$?

Exercice 17.3.3 Oral Mines Ponts ★★

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $(E_n) : x^n \ln(x) = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^{+*}$. On note α_n cette solution. Monotonie de cette suite? Convergence de cette suite? Montrer que la limite de α_n est 1 (on pourra procéder par l'absurde).

Exercice 17.3.4 Oral Mines Ponts ★★ On pose $f_n(x) = x^{3n} - 3nx + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [1; 2]$.

1. Montrer que f_n admet une unique racine dans $]1; 2[$. On la note x_n .
2. Trouver a puis b réels tels que $x_n = 1 + a \frac{\ln(n)}{n} + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ si n tend vers $+\infty$.

Exercice 17.3.5 Oral Centrale ★★ Soit $c > 0$. On considère (E) l'équation $x \sin(x) - c \cos(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$.

1. Montrer que (E) possède une unique solution x_n dans chaque intervalle $I_n =]n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
2. Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n .

4 Autres

Exercice 17.4.1★

Montrer que la suite (u_n) , définie par $u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est divergente.

Exercice 17.4.2★

On suppose que les sous suites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice 17.4.3★

Soit $a \in]0; 1[$. Sachant que $1 + x \leq e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ montrer que (u_n) converge avec : $u_n = \prod_{k=1}^n (1 + a^k)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 17.4.4★♡

Montrer qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 17.4.5★★

Démontrer le théorème de Cesàro : Si (x_n) est une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k$ tend vers ℓ .

Exercice 17.4.6 Oral IMT ★

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{n!}$. Déterminer une relation entre d_{n+1} et d_n . Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n \leq 2$. Montrer que la suite (d_n) est convergente. Déterminer sa limite.

Exercice 17.4.7 Oral Mines Ponts ★★ ★

Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs convergeant vers une limite $r > 0$.

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $a_0 = b_0 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{2}$ et $b_{n+1} = r_n(4a_n + b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que a_n et b_n tendent vers $+\infty$.
On pose $q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ et on suppose dorénavant que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone à partir d'un certain rang.
2. Etablir que : $q_{n+1} = 1 + r_n + \frac{r_n}{q_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que (q_n) est convergente. En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $b_n \sim ka_n$ et donner la valeur de k en fonction de r .

18. Analyse asymptotique

I - Relations de comparaison pour les suites et les fonctions

Dans tout ce paragraphe, on considère $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $u' = (u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v' = (v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites (réelles ou complexes) qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

Définition

- On dit que u est dominée par v , et on note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$, si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.
- On dit que u est négligeable devant v , et on note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, si $\frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.
- On dit que u est équivalente à v , et on note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, si $\frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Erreur classique

Ne jamais écrire un équivalent à zéro car seule la suite nulle à partir d'un certain rang est équivalente à zéro...

Cas particuliers

- $u_n = O(1)$ si et seulement si u est bornée.
- $u_n = o(1)$ si et seulement si $u_n \longrightarrow 0$.
- Pour tout nombre ℓ non nul : $u_n \sim \ell$ si et seulement si $u_n \longrightarrow \ell$.

Propriété

- Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$.
- $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n = v_n + o(v_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$ et si $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
- Si $u_n \sim v_n$ et si $v_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$ alors $u_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$.
- Si $u_n \sim v_n$ et si $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$ et $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$ et $\frac{u_n}{u'_n} \sim \frac{v_n}{v'_n}$.
- Si $u_n \sim v_n$ et si $u_n > 0$ alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

Erreur classique pour cette dernière propriété, le réel α ne doit pas dépendre de n .

Contre exemple classique (en passant à "exp de ln") on a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim e$ et non $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim 1^n$.

Formule de Stirling $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}$

Croissances comparées supplémentaire Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\frac{a^n}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Définition Soit I un intervalle réel et soit a un élément de I ou une extrémité de I (éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a). On généralise tout ce qui précède en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x)) \text{ si la fonction } \frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a \\ \bullet f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)) \text{ si } \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0 \\ \bullet f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \text{ si } \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 1 \end{array} \right.$$

Équivalents usuels en 0

- | | | | |
|--|---|---|---|
| • $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ | • $\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ | • $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ | • $\operatorname{Arccos}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi}{2}$ |
| • $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ | • $\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ | • $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ | • $\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ |
| • $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ | • $\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ | • $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ | • $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ |
| • $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$ | • $\operatorname{th}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ | • $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ | |

Équivalents usuels en $+\infty$

$$\bullet \operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2} \quad \bullet \operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2} \quad \bullet \operatorname{th}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \quad \bullet \operatorname{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

III - Développement limités

Soit I un intervalle réel, soit $a \in I$, soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, soit $g : I \rightarrow \mathbb{K}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

Notation On abrègera "développement limité à l'ordre n en a " en $DL_n(a)$.

Définition On dit que f admet un $DL_n(a)$ s'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} P_n(x-a) + o((x-a)^n)$$

Le polynôme P_n est appelé "partie régulière" du $DL_n(a)$ de f .

Unicité d'un développement limité Si f admet un $DL_n(a)$, alors celui-ci est unique.

Formule de Taylor-Young Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , alors f admet un $DL_n(a)$ et :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Remarque

En pratique, si $a \neq 0$, alors on se ramène presque toujours à un $DL_n(0)$ en introduisant la fonction $h : x \mapsto f(x+a)$.

Propriété

On suppose que f et g admettent un $DL_n(0)$. Soit P_n et Q_n les parties régulières respectives de ces $DL_n(0)$.

- Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un $DL_n(0)$ et la partie régulière de ce $DL_n(0)$ est $\lambda P_n + \mu Q_n$.
- La fonction $f \times g$ admet un $DL_n(0)$ et la partie régulière de ce $DL_n(0)$ s'obtient en formant le polynôme $P_n \times Q_n$ et en ne retenant que les termes de degré inférieur ou égal à n .
- *composition* Supposons $f(0) = 0$. Alors la fonction $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$ et la partie régulière de ce $DL_n(0)$ s'obtient en formant le polynôme $Q_n \circ P_n$ et en ne retenant que les termes de degré inférieur ou égal à n .
- *primitivation* Toute primitive F de f sur I admet un $DL_{n+1}(0)$.

De plus, si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$, alors $F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$.

Développements limités usuels en 0

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$ et $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$ et $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\operatorname{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$ et $\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$ et $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha-k)}{n!} x^n + o(x^n)$ (avec α réel quelconque)

Chapitre 18 : Analyse asymptotique

Compétences

- ★ Savoir ce que veut dire $u_n \sim v_n$ et $u_n = o(v_n)$ en termes de limites.
- ★ Savoir que $u_n = o(1)$ veut dire que u_n tend vers 0.
- ★★ Savoir que $u_n \sim v_n$ est équivalent à $u_n = v_n + o(v_n)$.
- ★♠♠ Savoir qu'on peut multiplier et diviser les équivalents MAIS qu'on ne peut pas les additionner et les soustraire.
- ★ Savoir qu'on peut appliquer une puissance fixée à un équivalent
- ♠♠ MAIS qu'on ne peut pas appliquer une puissance dépendant de la variable (on utilise exp et ln et des DL).
- ★ Connaître Stirling.
- ★ Connaître les DL usuels et être capable d'en déduire des équivalents (par exemple $\sin(x) - x \sim_{x \rightarrow 0} -x^3/6$)
- ★★ Savoir qu'on peut les primitiver termes à termes (avec la constante d'intégration) MAIS pas les dériver.
- ★★★ Savoir que si f est C^n au voisinage de 0 alors la formule de Taylor-Young donne le $DL_n(0)$.
- ♠ Croire qu'un DL permet de trouver un signe sur tout l'intervalle et non au voisinage du point étudié.
- ♠ Ne pas conserver l'erreur la plus importante dans les calculs de DL.
Par exemple $(1 + o(1)) \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$
- ♠♠ Faire des COMPOSITIONS d'équivalents. Par exemple $e^{n+1} \sim e^n$.
- ♠♠ Croire que les constantes disparaissent. Par exemple : $3n^2 + 4n - 5 \sim n^2$.
- ♠♠ Ecrire le symbole $\sim$ et garder des o . Ou écrire des symboles $=_{x \rightarrow 0}$ et enlever les o .
- ★ Avec Python (module `sympy`) on note `x=symbols('x')` puis `series(f(x),x,a,n)`

Exercice Montrer que avec $n \rightarrow +\infty$ et $x \rightarrow 0$:

- | | | | |
|---------------|--|---------------|---|
| 18.1★ | $\ln(n+1) \sim \ln(n)$ | 18.6★ | $\frac{\sqrt{1+2x}}{\cos x} = 1 + x - x^2/2 + x^3/2 - 5x^4/8 + o(x^4).$ |
| 18.2★ | $\ln(\sin(t)) \sim \ln(t)$ | 18.7★ | $\frac{\cos x}{\sqrt{1-x}} = 1 + x/2 - x^2/8 + x^3/16 + O(x^4).$ |
| 18.3★♥ | $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \sim e^x$ et $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$ | 18.8★ | $\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\text{ch}(x)} = \sqrt{2} - \sqrt{2}x^2/8 + \sqrt{2}x^4/384 + o(x^4).$ |
| 18.4★ | $\frac{\arctan(n)}{n} \sim \frac{\pi}{2n}$ | 18.9★ | $\frac{1}{2 + \ln(1+x)} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{19x^3}{48} + o(x^3).$ |
| 18.5★ | $\frac{1}{3-x^2} = 1/3 + x^2/9 + x^4/27 + o(x^5)$ | 18.10★ | $\int_0^x \sin(t^2) dt = x^3/3 - x^7/42 + o(x^7).$ |

Exercice 18.11★ Montrer que, au voisinage de 1, on a $\frac{\ln(x)}{x^2} = (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 + o(x-1)^3$

Exercice 18.12★ Donner le développement asymptotique en $+\infty$ à la précision $1/x^2$ de $\arctan x$.

Exercice 18.13★★ Trouver a réel non nul tel que la courbe de $f : x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\cos x + \sin x}$ traverse sa tangente en zéro.

Exercice 18.14★

On pose $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$. Montrer que f se prolonge par continuité en 0.

Montrer que ce prolongement est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (on donnera $f'(0)$).

Exercice 18.15★★

On pose $f(x) = \frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{x}$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est continue sur $[-1; 1]$. f est-elle dérivable en 0? Si oui, étudier la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de 0.

Exercice 18.16★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f(x) = (e^x - 1)^n$.

- Donner le $DL_n(0)$ de f en utilisant le $DL_1(0)$ de $\exp$.
- Donner le $DL_n(0)$ de f en utilisant le binôme de Newton et le $DL_n(0)$ de $\exp$.
- En déduire que $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^i = 0$ si $0 \leq i < n$. Donner $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n$.

19. Séries numériques

I - Généralités

Définition Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série numérique et, pour tout $N \in \mathbb{N}$, soit $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ (somme partielle).

On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si la suite des sommes partielles $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge.

Auquel cas, la limite $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n$ est appelée la somme de la série et est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On dit qu'une série numérique diverge si elle ne converge pas.

Remarque La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

Propriété Si une série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Définition On dit qu'une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est grossièrement divergente si son terme général u_n ne tend pas vers 0.

Propriété Soit $r \in \mathbb{C}$ fixé. La série géométrique $\sum_{n \geq 0} r^n$ converge si et seulement si $|r| < 1$.

Auquel cas, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$: $\sum_{n=n_0}^{+\infty} r^n = r^{n_0} \times \frac{1}{1-r}$.

Propriété La série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

De plus, grâce à une comparaison série-intégrale, on montre que : $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(N)$.

Propriété : série télescopique Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes.

La série $\sum_{n \geq 0} (a_{n+1} - a_n)$ converge si et seulement si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Idée de la démonstration Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^N (a_{n+1} - a_n) = a_{N+1} - a_0$.

Propriété : linéarité

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ fixés. Si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ convergent, alors la série $\sum_{n \geq 0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge aussi.

Auquel cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) + \mu \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$.

Propriété Une série complexe $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$ convergent.

Auquel cas : $\operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_n)$ et $\operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_n)$

Définition Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série convergente, soit $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et, pour tout $N \in \mathbb{N}$, soit $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$.

On appelle reste d'ordre N le nombre noté R_N et défini par : $R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$.

Propriété Avec les mêmes notations, $R_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

II - Séries de nombres réels positifs

Théorème Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Idée de la démonstration la suite des sommes partielles est une suite croissante dans ce cas.

Théorèmes de comparaison Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ séries à termes positifs (ou à partir d'un certain rang).

- Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ et si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature.

Propriété : séries de Riemann Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Application : règle du " $n^\alpha u_n$ " Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes positifs.

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ alors $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$ et donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Théorème : règle de d'Alembert

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

- Si $\ell < 1$ alors la série converge.
- Si $\ell > 1$ alors la série diverge grossièrement.
- Si $\ell = 1$ alors on ne peut rien dire.

III - Séries absolument convergentes

Définition On dit qu'une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.

Théorème Si une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument, alors elle converge et $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Exemple et définition Avec D'Alembert, on peut montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument donc

converge. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ fixé, on pose : $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Définition On dit qu'une série est semi-convergente si elle est convergente mais non absolument convergente.

Théorème produit de Cauchy

Si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ convergent absolument, alors la série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right)$ converge absolument.

Auquel cas : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right)$.

Exemple Par produit de Cauchy on montre que $\exp(z + z') = \exp(z) \times \exp(z')$ pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$.

IV - Séries alternées

Définition Une série de nombres réels $\sum_{n \geq 0} u_n$ est dite alternée si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+1} \leq 0$.

Théorème critère spécial des séries alternées

Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle positive, décroissante et convergente vers 0, alors la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge.

Exemple La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.

Théorème : majoration du reste d'une série alternée

Soit $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ une série satisfaisant le critère spécial des séries alternées.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, posons $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ le reste d'ordre N .

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a $|R_N| \leq a_{N+1}$ et R_N est du signe de $(-1)^{N+1} a_{N+1}$.

Exemple Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \right| \leq \frac{1}{N+1}$.

V - comparaison série-intégrale

Méthode de comparaison série-intégrale

Si $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue par morceaux, positive et décroissante.

On peut montrer que la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge ssi l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Remarque

Ce théorème est notamment utile pour les séries $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ avec $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Ces séries convergent ssi $\beta > 1$.

Exemple équivalent du reste de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$.

On introduit la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^3}$. Elle est décroissante sur $]0; +\infty[$ donc

$$\forall n \geq 2, \quad \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt$$

On a alors, pour tous entiers N et N' tels que $2 \leq N < N'$:

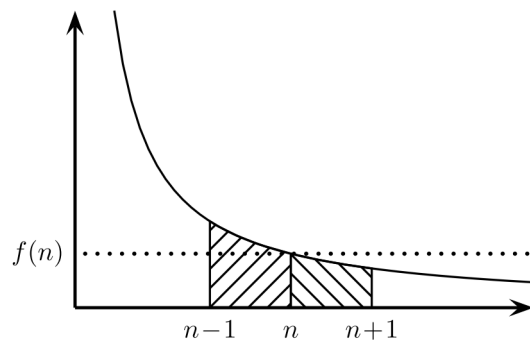
$$\sum_{n=N+1}^{N'} \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{n=N+1}^{N'} f(n) \leq \sum_{n=N+1}^{N'} \int_{n-1}^n f(t) dt$$

Grâce à la relation de Chasles, on a ensuite : $\int_{N+1}^{N'+1} f(t) dt \leq \sum_{n=N+1}^{N'} \frac{1}{n^3} \leq \int_N^{N'} f(t) dt$

On connaît une primitive de f , d'où : $-\frac{1}{2(N'+1)^2} + \frac{1}{2(N+1)^2} \leq \sum_{n=N+1}^{N'} \frac{1}{n^3} \leq -\frac{1}{2N'^2} + \frac{1}{2N^2}$

On fait tendre N' vers $+\infty$ et on obtient : $\frac{1}{2(N+1)^2} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{2N^2}$.

On en déduit que si $N \rightarrow +\infty$ on a : $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{2N^2}$.



Complément de cours chapitre 19 : Séries numériques

∝ Démonstration de cours 1 : si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

∝ Démonstration de cours 2 : séries géométriques

Remarques sur les th de comparaisons : Le signe est PRIMORDIAL

- On a $\frac{-1}{n} \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge mais $\sum \frac{-1}{n}$ diverge.
- Si on a des séries à termes négatifs on peut se ramener au cas positifs en considérant leurs opposées.

∝ Démonstration de cours 3 : le théorème de d'Alembert.

∝ Démonstration de cours 4 : montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

∝ Démonstration de cours 5 : critère spécial des séries alternées.

Compétences

- ★ connaître les séries de références (Riemann, géométrique, exponentielle)
- ★ Savoir reconnaître une série géométrique (par exemple $\sum e^{-n/2}$). Savoir calculer sa somme même si l'indice de départ n'est pas 0.
- ★ Savoir montrer qu'une série diverge grossièrement.
- ♠♠ Ne pas dire que u_n tend vers 0 donc la série converge.
- ★ Savoir reconnaître et calculer une série télescopique.
- ★★ En passant par la somme partielle, savoir effectuer une opération type transformation d'Abel sur $\sum a_k(b_{k+1} - b_k)$
- ★ Savoir utiliser la méthode du n^α pour les séries à termes positifs (STP).
- ★ Savoir utiliser l'équivalent pour les séries à termes positifs (STP).
- ★ Savoir utiliser la méthode de D'Alembert pour les STP ou en mettant des valeurs absolues.
- ♠ Ecrire dans sa rédaction de d'Alembert des équivalences ou des "ssi"
- ♠ Ecrire sa rédaction de d'Alembert et oublier de faire la limite du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$
- ★ Savoir que l'absolue convergence implique la convergence
- ★★ Savoir utiliser une comparaison série-intégrale et en déduire des équivalents de sommes partielles ou de restes.
- ★★ Savoir rédiger et calculer un produit de Cauchy. Y compris lorsque l'une des sommes a un indice ne débutant pas à 0.
- ★ Savoir montrer qu'une série alternée converge en utilisant le critère spécial (SANS oublier 2/3 des hypothèses...)
- ★★ Savoir majorer le reste d'une série alternée vérifiant le critère spécial.
- ♠ Trouver que $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n}$ et conclure que $\sum u_n$ converge.
- ★★ Savoir utiliser la méthode d'éclatement.
- ♠ Utiliser l'équivalent pour trouver la monotonie pour le CSSA.
- ★★ Savoir montrer qu'une suite (u_n) converge en montrant que la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge (à l'aide d'un équivalent en général). Par exemple $\left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente.

Chapitre 19 : Séries numériques

1 Convergence/divergence d'une série

Exercice Etudier la nature de la série de terme général (avec $\alpha \in \mathbb{R}$ sauf avis contraire)

19.1.1★	$\frac{n^3}{5^n}$	19.1.10★	$n^{1/n^2} - 1$	19.1.19★	$\frac{n^2}{(1+i)^n}$
19.1.2★	$sh(1/n) + \ln(1 - 1/n)$	19.1.11★★	$\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(\ln(n))}}$	19.1.20★	$\frac{(n!)^2}{2^{(n^2)}}$
19.1.3★	$\frac{(1 + e^{i\theta})^n}{2^n}, \theta \in]0; 2\pi[$	19.1.12★★	$(ch(1/n) - 1)^{sh(1/n)} - 1$	19.1.21★	$\frac{2^n}{3^{n(n+1)/2}}$
19.1.4★★	$\binom{2n}{n} \alpha^n, \alpha \in \mathbb{R}^+$	19.1.13★	$1 - \cos(1/n)$	19.1.22★	$\frac{1}{n^\alpha} ((n+1)^{1/3} - n^{1/3})$
19.1.5★♥	$\frac{1}{\ln(n)}$	19.1.14★	$(-1)^n e^{n^2}$	19.1.23★	$\left(\frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \right)^\alpha$
19.1.6★	$\frac{ch(n)}{ch(2n)}$	19.1.15★	$2 \ln(n^3 + 1) - 3 \ln(n^2 + 1)$	19.1.24★	$\frac{(n!)^3}{n^n (2n)!}$
19.1.7★♥	e^{-n^α}	19.1.16★★	$\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$	19.1.25★	$\frac{1}{n^{\ln(n)}}$
19.1.8★♥	$e^{-\sqrt{\ln(n)}}$	19.1.17★	$\left(\frac{1}{n} \right)^{1 + \frac{1}{n}}$	19.1.26★	$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2k} \right)$
19.1.9★	$\ln \left(1 + \frac{1}{n^\alpha} \right)$	19.1.18★	$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$		

Exercice 19.1.27★ *Oral CCINP PSI*

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur α réel pour que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} - \frac{2}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha}$ converge.

Exercice 19.1.28★ *Oral Centrale PSI*

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b réels pour que la série $\sum_{n \geq 0} \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$ converge.

Exercice 19.1.29★

Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Montrer que $\sum u_n^2$ est une série convergente.

Exercice 19.1.30 *Oral CCINP 2019 ★★*

Soient $0 < a < b$ et une suite (u_n) strictement positive vérifiant $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner un équivalent de $\ln \left(\frac{n+a}{n+b} \right)$. En déduire que (u_n) converge vers 0.

2. On pose $\alpha = b - a$, $v_0 = u_0$ et $v_n = n^\alpha u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que la série $\sum \ln \left(\frac{v_{n+1}}{v_n} \right)$ converge. En déduire un équivalent de u_n puis la nature de $\sum u_n$.

Exercice 19.1.31 *Oral Mines Ponts 2019 ★★*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On pose $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$. Déterminer la nature de la série $\sum a_n$. En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$.

Exercice 19.1.32 *Oral Mines Ponts 2019 ★★★*

Soit $a > 0$. Déterminer, en fonction du réel $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n^\alpha}{\prod_{k=1}^n (1 + a^k)}$.

2 Calcul de somme

Exercice 19.2.1★ *oral IMT PSI*

- Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$.
- Donner un équivalent du reste d'ordre n .

Exercice 19.2.2★

1. Convergence et somme de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$.
2. Donner un équivalent du reste d'ordre n .

Exercice 19.2.3★

1. Convergence et somme de la série $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$.
2. Donner un équivalent du reste d'ordre n .

Exercice 19.2.4★

Convergence et somme de $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(n\theta)}{n!}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 19.2.5★

Convergence et somme de $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 4n - 5}{n!}$.

Exercice 19.2.6★♡

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ en sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 19.2.7★★

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $c(n)$ le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n . Ainsi $c(34) = 2$ et $c(4567) = 4$.
Montrer la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{c(n)}{n(n+1)}$. Calculer la somme de cette série.

Exercice 19.2.8 Oral Mines Ponts ★★★

Soit $\theta \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$. Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \ln(\cos \frac{\theta}{2^n})$.

Exercice 19.2.9 Oral CCINP 2019 ★★

On pose $a_n = \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$ et $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.
2. Montrer, à l'aide d'une comparaison série intégrale, que $H_{2n+1} - H_n$ converge vers $\ln(2)$.
3. Trouver a, b, c réels tels que $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

3 Transformation D'Abel

On utilisera cette idée dans les exercices suivants :
si on a une série de la forme $\sum (a_{k+1} - a_k)b_k$ on peut souvent se ramener (avec les sommes partielles)
à une série de la forme $\sum a_k(b_{k-1} - b_k)$

Exercice 19.3.1★★Oral CCP PSI

Montrer que $\lfloor x \rfloor \sim_{+\infty} x$. Montrer alors la convergence de $\sum_{k \geq 1} \frac{\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{k} \rfloor}{k}$

Exercice 19.3.2★★Oral CCINP

Soit (u_n) une suite réelle positive décroissante telle que la série $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que la série $\sum v_n$ converge avec $v_n = n(u_n - u_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. on cherchera à majorer la somme partielle
2. Montrer que nu_n tend vers 0 et que $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

Exercice 19.3.3★★★ *Ecrit centrale PC* On fixe $\theta \in]0; 2\pi[$.

1. Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée avec $T_n = \sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $T_0 = 0$.
2. En écrivant $e^{ik\theta}$ en fonction de T_k et T_{k-1} établir la convergence de $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$.
3. Donner la valeur de la somme de $\sum_{k \geq 1} \frac{i^k}{k}$ sachant que $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}/k$ converge vers $\ln 2$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1}/(2k+1)$ vers $\pi/4$.

4 Comparaison Série Intégrale

Exercice 19.4.1★♥ Etudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$.

Exercice 19.4.2★ Justifier la convergence de la série $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^2}$. Equivalent de son reste?

Exercice 19.4.3★★ Etudier la convergence de $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n!)}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 19.4.4★★ *Oral CCP PSI*

Soit $\alpha > 1$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Trouver un équivalent de R_n et en déduire la nature de $\sum \frac{R_n}{S_n}$.

Exercice 19.4.5★★

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt - \frac{1}{n}$ est convergente.
2. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ puis que $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln(2) + o(1)$.
3. Justifier que $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge et trouver sa somme en calculant sa somme partielle d'ordre $2n$.

5 Lien suite-Série

Exercice 19.5.1★

Montrer que la suite $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$ est convergente.

Exercice 19.5.2★

Nature de la suite $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

Exercice 19.5.3★

Nature de la suite $u_n = -n + \sum_{k=n+1}^{2n} e^{1/k}$.

Exercice 19.5.4★★

On pose $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $u_0 \in]0; \pi/2[$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge et trouver sa limite.
2. En utilisant $u_{n+1} - u_n$ montrer que la série $\sum u_n^3$ converge.
3. En utilisant $\ln(u_{n+1}/u_n)$ donner la nature de la série $\sum u_n^2$.

Exercice 19.5.5★★

Soit (a_n) une suite de réels positifs. On pose $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.

6 Série alternée

Exercice 19.6.1★

Nature et somme de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$?

Exercice 19.6.2★Oral CCP PSI

Montrer que $\sum \ln(2n + (-1)^n) - \ln(2n)$ est convergente mais pas absolument convergente.

Exercice 19.6.3 Oral Mines Ponts ★

Soit $\alpha > 0$. Nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$?

Exercice 19.6.4★

Nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n}$?

Exercice 19.6.5★★

Nature de la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{n^a}{(n+1)^b}$ en fonction de $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 19.6.6 Oral Mines Ponts ★★

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \cos \left(n^2 \pi \ln \left(\frac{n-1}{n} \right) \right)$.

Exercice 19.6.7★ Nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$? Nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$?

Exercice 19.6.8★★

1. Nature de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$? On note $u_n = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ pour tout $n \geq 1$.
2. On note $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ pour tout $n \geq 1$. Soit $n \geq 1$, simplifier S_{2n} (on fera apparaître $((2n+1)!)^2$). Donner $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

Exercice 19.6.9★★

1. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que $R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$ puis en déduire que $2R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
3. Donner la nature de la série de terme général R_n .

Exercice 19.6.10 Oral CCINP ★★

Soit (a_n) une suite de réels vérifiant $a_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.

1. Étudier la convergence de la suite (a_n) .
2. Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n a_n$.
3. Déterminer la nature de la série $\sum a_n^2$.

7 Produit de Cauchy

Exercice 19.7.1★

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ absolument convergentes. Effectuer les produits de Cauchy suivants

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \quad S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=2}^{+\infty} v_n$$

Exercice 19.7.2★

Convergence et somme de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ avec $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(n-k)!}$.

Exercice 19.7.3★

Convergence et somme de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ avec $u_n = \frac{(-1)^n}{5^n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Exercice 19.7.4★

Convergence et somme de la série $\sum_{n \geq 0} (n+1)5^{-n}$.

Exercice 19.7.5★

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Convergence et somme de la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ avec $v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n 2^k u_k$.

Exercice 19.7.6★

Soient $a, b \in]-1; 1[$ avec $a \neq b$. Donner la formule obtenue en effectuant le produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 0} a^n$ par $\sum_{n \geq 0} b^n$.

Exercice 19.7.7★

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n z^n}{n!}$.

8 Autres

Exercice 19.8.1★★

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes telles que $u_n \sim v_n$.
Montrer que les restes d'ordre n de ces deux séries sont équivalents lorsque n tend vers $+\infty$.
On montrera que la différence est négligeable devant l'un des deux restes

Exercice 19.8.2★★

En utilisant la formule de Taylor à $\ln(1+x)$ montrer que $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}/k$ converge vers $\ln 2$.

Exercice 19.8.3★★★

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

On montrera que $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{8}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^$ (avec S_n la somme partielle)*

Exercice 19.8.4 Oral CCINP ★★

Soit (a_n) une suite de réels positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{a_n}{(1+a_1)\dots(1+a_n)}$.

Calculer $u_1 + u_2$. Généraliser. Montrer que la série $\sum u_n$ converge. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ pour $a_n = 1/\sqrt{n}$.

Exercice 19.8.5 Oral Mines Ponts ★★

On admet qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sigma(3n) = 4n$, $\sigma(3n+1) = 4n+2$ et $\sigma(3n+2) = 2n+1$.

1. Montrer que σ est bijective.
2. On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = u_{\sigma(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum u_n$ converge et donner sa somme.
3. Montrer que $\sum v_n$ converge et comparer sa somme à la valeur précédente.

Exercice 19.8.6 Oral Centrale ★★

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n : x \mapsto nx^3 + n^2x - 2$.

1. Montrer que f_n s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$. On note a_n ce réel. Montrer que (a_n) est décroissante et convergente.
2. Trouver un équivalent de a_n . Quelle est la nature de la série $\sum a_n$?
3. Quelle est la nature, en fonction de α , de la série $\sum n^\alpha \left(a_n - \frac{2}{n^2} \right)$?
4. Donner un développement asymptotique à deux termes de a_n .

20. Fonctions d'une variable réelle

I - Fonctions majorées, fonctions minorées, fonctions bornées

Définition-Propriété Soit I un intervalle réel.

- Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$.
- Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite minorée s'il existe un réel m tel que, pour tout $x \in I$, $m \leq f(x)$.
- Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée.
- Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel M tel que, pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leq M$.

Remarque Dans le cas d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, on ne définit pas les notions de fonction majorée et de fonction minorée car on ne dispose pas de relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{C}$. Par contre, on définit la notion de fonction bornée avec la dernière ligne ci-dessus.

II - Notion de limite

Définition Soit I un intervalle réel et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Soit a un élément de I ou une extrémité de I et soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f admet b pour limite en a si :

- Cas où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - b| \leq \varepsilon$
- Cas où $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$: $\forall B \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq B$
- Cas où $a \in \mathbb{R}$ et $b = -\infty$: $\forall B \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq B$
- Cas où $a = +\infty$ et $b \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq A \Rightarrow |f(x) - b| \leq \varepsilon$
- Cas où $a = +\infty$ et $b = +\infty$: $\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq A \Rightarrow f(x) \geq B$
- Cas où $a = +\infty$ et $b = -\infty$: $\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq A \Rightarrow f(x) \leq B$
- Cas où $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq A \Rightarrow |f(x) - b| \leq \varepsilon$
- Cas où $a = -\infty$ et $b = +\infty$: $\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq A \Rightarrow f(x) \geq B$
- Cas où $a = -\infty$ et $b = -\infty$: $\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq A \Rightarrow f(x) \leq B$

III - Fonctions monotones

Théorème de la limite monotone Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, soit $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et soit $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est croissante alors f admet une limite (finie ou infinie) en a et f admet une limite (finie ou infinie) en b .
- Si f est décroissante alors f admet une limite (finie ou infinie) en a et f admet une limite (finie ou infinie) en b .

IV - Fonctions continues

Définition Soit I un intervalle réel, soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in I$.

- On dit que f est continue en a si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.
- On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I .

Théorème de la bijection Soit I un intervalle réel et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est continue et strictement monotone sur I , alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Rappel

Une application f est bijective si tout élément de son ensemble d'arrivée admet un unique antécédent par f .

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit I un intervalle réel, soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $a, b \in I$.

Si f est continue sur I , alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in I$ tel que $y = f(c)$.

Théorème des bornes atteintes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit, si f est continue sur le segment $[a; b]$ alors il existe $c, d \in [a, b]$ tels que

$$f(c) = \max_{x \in [a, b]} f(x) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{et} \quad f(d) = \min_{x \in [a, b]} f(x) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$

V - Fonctions dérivables

Définition Soit I un intervalle réel, soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in I$.

- On dit que f est dérivable en a si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a par valeurs distinctes.

Auquel cas, on pose :
$$f'(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I .

Théorème de Rolle

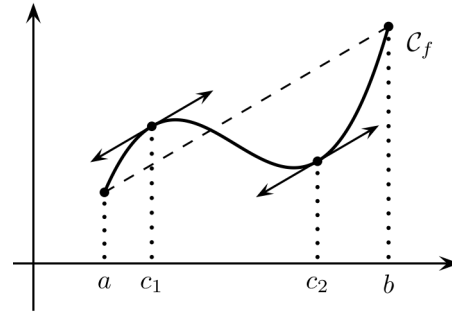
Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$.

Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème : égalité des accroissements finis

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$.

Il existe $c \in]a; b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.



Théorème : inégalité des accroissements finis

Soit I un intervalle réel et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I .

On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$.

Alors, pour tous $x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

Exemple $\heartsuit \heartsuit \forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$

Théorème : dérivée de la bijection réciproque

Soit I un intervalle réel. Soit f une bijection dérivable de I sur $J = f(I)$.

Alors f^{-1} est dérivable en tout point $b \in J$ tel que $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. De plus $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Théorème de prolongement de classe C^1 Soit I un intervalle réel, soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in I$.

On suppose que f est continue sur I , f est de classe C^1 sur $I \setminus \{a\}$ et qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

- Si ℓ est un nombre réel, alors f est de classe C^1 sur I et $f'(a) = \ell$.
- Si $\ell = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a .

Théorème de prolongement de classe C^n Soit I un intervalle réel, soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, soit $a \in I$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f est continue sur I et que f est de classe C^n sur $I \setminus \{a\}$.

On suppose aussi que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, il existe $\ell_k \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(k)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_k$.

Alors f est de classe C^n sur I et, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on a $f^{(k)}(a) = \ell_k$.

Théorème de Leibniz Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient f, g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I .

Alors $f \times g$ est n fois dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad (f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

V - Fonctions Convexes

Rappel Soient $a < b$ des réels. On a $[a; b] = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid \lambda \in [0; 1]\}$

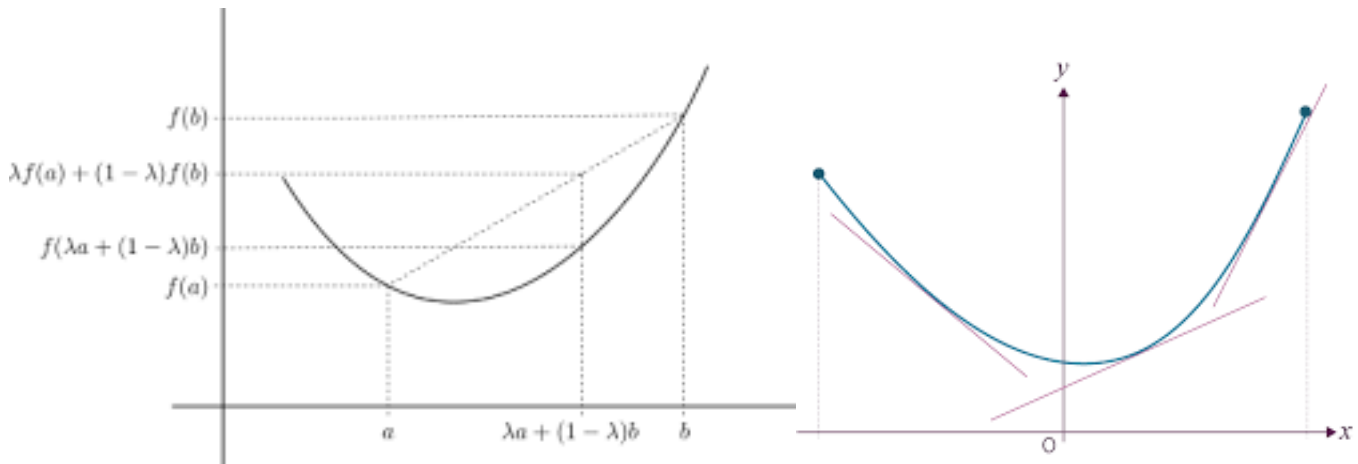
Définition Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$.

- on dit que f est convexe si son graphe est situé en-dessous de toutes ses cordes :

$$\forall a, b \in I, \forall \lambda \in [0; 1], \quad f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

- on dit que f est concave si son graphe est situé au-dessus de toutes ses cordes :

$$\forall a, b \in I, \forall \lambda \in [0; 1], \quad f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$



Remarque Avec les mêmes notations

- la fonction f est concave ssi $-f$ est convexe
- la fonction f est convexe sur I ssi l'ensemble $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in I, b \geq f(a)\}$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$

Théorème Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose f deux fois dérivables sur I . Alors

- f est convexe sur I si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.
- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I .
- f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I .
- f est convexe sur I si et seulement si le graphe de f est au-dessus de toutes ses tangentes.

Exemples : Les fonctions $\exp$ et $x \mapsto x^2$ sont convexes sur $\mathbb{R}$. La fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ainsi on a $e^x \geq x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ car la tangente en 0 de $\exp$ est d'équation $y = x + 1$.

Définition Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit que f possède un point d'inflexion en $a \in I$ si f est convexe avant a et concave après (ou l'inverse).

Généralisation et exemple classique :

- **Inégalité de Jensen** Si on dispose de f convexe sur I , si on dispose de $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0; 1]$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, si on a $x_1, \dots, x_n \in I$ alors (preuve par récurrence sur n)

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

- En utilisant la concavité de $\ln$ et $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, on peut montrer que (inégalité arithmético-géométrique)

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

21. Intégration sur un segment

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, a et b désignent deux réels tels que $a < b$ et I désigne un intervalle réel possédant au moins deux points.

I - Premières propriétés

Dans tout ce paragraphe, on considère $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ et $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur $[a; b]$.

Linéarité de l'intégration Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$.

Positivité de l'intégration. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si f est positive sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Croissance de l'intégration Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Inégalité triangulaire $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$

Relation de Chasles Pour tout $c \in]a; b[$, $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$

Propriété Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si f est continue et positive sur $[a; b]$ et si $\int_a^b f(t) dt = 0$ alors la fonction f est nulle sur $[a; b]$.

II - Calcul d'une intégrale

Théorème fondamental de l'intégration

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur I et soit $x_0 \in I$.

La fonction $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

En particulier F est une primitive de f sur I .

Corollaire Si F est une primitive de f sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ noté $[F(t)]_a^b$.

Intégration par parties

Soit $u : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ et $v : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$. On a :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

Changement de variable Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur I .

Soit $\varphi : [a; b] \rightarrow I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$. On a : $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u) du$

III - Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I , alors, pour tous $x, a \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

IV - Sommes de Riemann

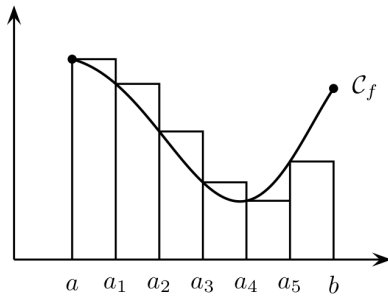
Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$, soit n un entier naturel non nul.

On considère $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ la subdivision régulière de $[a; b]$ de pas $\frac{b-a}{n}$, c'est-à-dire : $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, a_k = a + k \frac{b-a}{n}$.

Méthode des rectangles à gauche

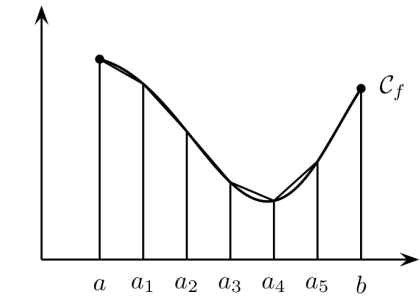
Méthode des rectangles à droite

Méthode des trapèzes



$$\begin{aligned} R_n(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(a_k) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+1}) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} T_n(f) &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2} \\ &= \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a_k) \right) \end{aligned}$$

Propriété Les suites $(R_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(T_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent et ont pour limite $\int_a^b f(t) dt$.

Remarque

On rencontre souvent le cas $a = 0$ et $b = 1$. On a alors $R_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

V - Extension aux fonctions continues par morceaux

Définition On appelle subdivision du segment $[a; b]$ toute famille finie $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ d'éléments de $[a; b]$ telle que :

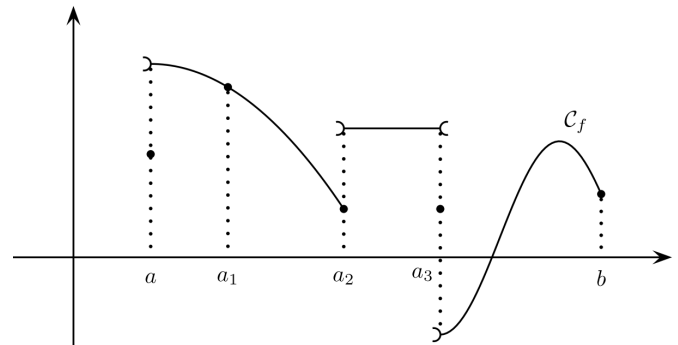
$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

Définition

Une fonction $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux sur $[a; b]$ s'il existe une subdivision $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $[a; b]$ telle que, pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$:

- f est continue sur l'intervalle $]a_k; a_{k+1}[$
- f admet une limite finie à droite en a_k
- f admet une limite finie à gauche en a_{k+1}

Auquel cas, on dit que la subdivision $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ est adaptée (ou subordonnée) à f .



Remarque Si une fonction est continue sur $[a; b]$, alors elle est continue par morceaux sur $[a; b]$.

Propriété et Définition

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a; b]$. Soit $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ une subdivision de $[a; b]$ adaptée à f . Pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, soit f_k le prolongement par continuité à $[a_k; a_{k+1}]$ de la restriction de f au départ à $]a_k; a_{k+1}[$.

Le nombre $\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(t) dt$ est indépendant du choix de la subdivision de $[a; b]$ adaptée à f .

On appelle cet invariant l'intégrale de f sur $[a; b]$ et on le note $\int_a^b f(t) dt$.

Remarque Pour des fonctions continues par morceaux, les propriétés du paragraphe I sont encore valables, sauf la dernière propriété. Le théorème fondamental de l'intégration n'est plus valable.

Complement de cours chapitre 21 : Intégration sur un segment

Convergence de la somme de Reimann dans le cas où f est de classe C^1

Soit f une fonction de classe C^1 sur un segment $[a; b]$. On pose $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On remarque que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ on a $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k) dt = \frac{b-a}{n} f(a_k)$.

On utilise alors la relation de Chasles :

$$R_n - \int_a^b f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(a_k) - f(t)) dt$$

Comme f' est continue sur le segment $[a, b]$ elle est bornée par une constante $M \geq 0$.

Par l'inégalité des accroissements finis, dont les hypothèses sont bien vérifiées, f est alors M -Lipschitzienne.

Ainsi, avec l'inégalité triangulaire,

$$\left| R_n - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(a_k) - f(t)| dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} M |a_k - t| dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} M(t - a_k) dt$$

Donc

$$\left| R_n - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left[M \frac{(t - a_k)^2}{2} \right]_{a_k}^{a_{k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} M \frac{(b-a)^2}{2n^2} = \frac{M(b-a)^2}{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Compétences

- ★ Savoir reconnaître les formes $\frac{u'}{u}$ et $u'u^\alpha$ dans les intégrales
- ★★ Savoir utiliser les complexes pour les intégrales du type $\int \sin(..) e^{..} dt$.
- ★ Savoir faire une intégration par parties en posant des fonctions C^1 .
- ★★ Parfois dans les calculs on retrouve l'intégrale de départ, savoir en déduire la formule de l'intégrale.
- ★ Savoir trouver des inégalités sur l'intégrande pour en déduire des inégalités sur l'intégrale par croissance de l'intégrale.
- ★★ Penser à utiliser la méthode précédente pour trouver des limites d'intégrales (sans faire le th de convergence dominée). Par exemple $\left| \int_0^1 \frac{1}{n+t} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n}$.
- ★★ Savoir utiliser l'inégalité triangulaire pour majorer une intégrale.
- ★★ Savoir que intégrale nulle implique l'intégrande est nulle est FAUX si on ne parle pas de la positivité de la fonction et de la CONTINUÏTE de la fonction.
- ★★ Savoir dériver une fonction avec du x dans les bornes avec le théorème fondamental de l'analyse. Par exemple si $f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$ alors f est C^1 sur $\mathbb{R}$ car $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- ★★ Savoir dériver une fonction avec du x dans les bornes. Par exemple si $f(x) = \int_{x^2}^x e^{-t^2} dt$ alors comme $h : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que si on en note H une primitive on a H de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f(x) = H(x) - H(x^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc par somme et composée f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = h(x) - 2xh(x) = e^{-x^2} - 2xe^{-x^4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- ★★★ Connaître la formule de Taylor avec reste intégral.
- ★★★ Savoir reconnaître une somme de Riemann en faisant apparaître une expression du type $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ puis en vérifiant que f est CONTINUE sur $[0; 1]$ et enfin en disant que la limite est $\int_0^1 f(t) dt$.
- ★ Savoir utiliser la relation de Chasles pour les intégrales de fonctions continues par morceaux.
- ★★ CLASSIQUE : intégrale de Wallis $\int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$. Sens de variation, limite, relation entre W_{n+2} et W_n , formules de W_{2n} et W_{2n+1} .

Chapitre 21 : Intégration sur un segment

1 Calculs

Remarque sur les changements de variable :

- Si on a une fraction en $\text{sh}(x)$, $\text{ch}(x)$ on peut essayer de poser $u = e^x$.
- Si on a une intégrale avec le terme $\sqrt{1-x^2}$ on peut essayer de poser $x = \cos(t)$ ou $x = \sin(t)$.
- Si on a une fraction F en $\cos(x)$, $\sin(x)$ on peut (Bioche)
 - si $F(\sin(x), \cos(x))dx$ est invariant par $x \mapsto -x$ on peut essayer de poser $t = \cos(x)$.
 - si $F(\sin(x), \cos(x))dx$ est invariant par $x \mapsto \pi - x$ on peut essayer de poser $t = \sin(x)$.
 - si $F(\sin(x), \cos(x))dx$ est invariant par $x \mapsto \pi + x$ on peut essayer de poser $t = \tan(x)$.
 - sinon on peut poser $t = \tan(x/2)$ avec les relations à connaître

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Exercice 21.1.1★

En utilisant les complexes ou à l'aide d'intégrations par parties calculer $\int_0^{2\pi} \sin(x)e^x dx$.

Exercice 21.1.2★

Calculer $\int_0^1 \frac{3x+1}{x^2+4} dx$ et $\int_0^1 \frac{3x+1}{x^2-4} dx$.

Exercice 21.1.3★

Calculer $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$.

Exercice 21.1.4★★♥

Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Calculer $I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

Exercice 21.1.5★

Calculer $\int_1^2 e^{\sqrt{x}} dx$.

Exercice 21.1.6★

Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Exercice 21.1.7★

Calculer $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \frac{1}{\sin(x)} dx$.

Exercice 21.1.8★

Soit $t > 0$ fixé. Calculer $\int_1^2 t^x dx$ puis $\int_1^2 x^t dx$.

Exercice 21.1.9★

Calculer $\int_0^\pi \cos^3(x) dx$.

Exercice 21.1.10★★Oral CCP

Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{5\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt$ en posant $u = \tan(t)$. En déduire $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(t)}{5\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt$.

Exercice 21.1.11★★

Soient $I = \int_0^\pi \frac{x}{1+\sin(x)} dx$ et $J = \int_0^\pi \frac{1}{1+\sin(x)} dx$. Avec un changement de variable trouver un lien entre I et J . En posant $u = \tan(x/2)$, calculer J et en déduire I .

Exercice 21.1.12★★

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{1+t^2} dt$.

Démontrer que I_n converge vers 0. Avec une intégration par parties montrer que $I_n \sim \frac{1}{4n}$.

Exercice 21.1.13★★♥♥Intégrale de Wallis

Soit $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que (I_n) est une suite décroissante. Montrer aussi que $I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ pour tout $n \geq 0$. En déduire une formule explicite de I_{2n} en fonction de n .
3. Montrer que la suite $((n+1)I_{n+1}I_n)$ est une suite constante.
4. A l'aide d'un encadrement montrer que $I_n \sim I_{n+1}$ et en déduire que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 21.1.14★★ Ecrit E3A MP

Soient $I_x = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} dt$ et $J_x = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Montrer que $I(x) - J(x)$ est négligeable devant $J(x)$ lorsque x tend vers 0^+ .
2. Dériver $t \mapsto \ln(t + \sqrt{t^2+1})$ et en déduire une expression simplifiée de $J(x)$.
3. Donner un équivalent simple de $I(x)$ lorsque x tend vers 0^+ .

Exercice 21.1.15* Centrale**

Soient $u, v \in C^0([0; 1], \mathbb{R}^{+*})$. On pose $I_n = \int_0^1 u(t)^n v(t) dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1}^2 \leq I_n I_{n+2}$.
2. En déduire que la suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite ℓ vérifie $0 < \ell \leq \|u\|_\infty$.
3. On admet que si une suite (x_n) tend vers γ alors $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k$ tend vers γ . Montrer que $I_n^{1/n}$ tend vers ℓ .
4. Minorer $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et montrer que $\ell = \|u\|_\infty$.

Exercice 21.1.16 Centrale**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

1. Montrer que : $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $e^{-1} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k)!} e^{-t} (1-t)^{n-k} dt$.
2. On pose $S_m = \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j}{j!}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{S_{n-k}}{k!}$.
Montrer que $T_n = e^{-1} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) + \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n e^{-t} dt$.
3. On pose $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$. Trouver un lien entre I_n et I_{n-1} et démontrer que $T_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Apparence plus théorique**Exercice 21.2.1★♥ Lemme de Lebesgue**

Soit f une fonction de classe C^1 de $[0; 1]$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que $\int_0^1 f(t) e^{int} dt$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 21.2.2★

Soit f une fonction continue de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = 1/2$. Montrer que f admet au-moins un point fixe dans $[0; 1]$.

Exercice 21.2.3 Oral CCINP ★

On considère $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$.

Trouver la limite de I_n lorsque f est une fonction continue de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Trouver la limite de nI_n lorsque f est une fonction de classe C^1 de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 21.2.4★

Soient f, g deux fonctions continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose f strictement positive.

Montrer qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que $\int_0^1 f(t)g(t)dt = g(c) \int_0^1 f(t)dt$.

Exercice 21.2.5**

Montrer, avec Taylor Lagrange, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$.

3 Théorème fondamental de l'analyse**Exercice 21.3.1★♥**

Soit f fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose f T -périodique. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$.

Exercice 21.3.2 Oral CCINP ★

Trouver les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $f'(x) = e^{-x} + \int_0^x f(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Exercice 21.3.3**

Etudier $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$. (domaine de définition, parité, tableau de variations et limites)

Exercice 21.3.4★★♡

Pour $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0; 1\}$ on pose $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ et $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}$.

1. Justifier que f et g existent sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0; 1\}$.
2. Calculer $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0; 1\}$.
3. Montrer alors que f se prolonge par continuité en 0 et en 1. On note encore f le prolongement.
4. Montrer alors que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$. Etudier les variations de f . On donnera la limite de f en $+\infty$.

Exercice 21.3.5★*Oral CCP PC*

Trouver les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telles que, si $F(x, y) = \int_x^y f(t)dt$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on ait $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 21.3.6★★*Oral CCP PSI*

Trouver les fonctions de classe C^0 sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telles que $\int_0^x \cos(x-t)f(t)dt = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 21.3.7★★*Oral Mines Ponts*

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, f(xy) = f(x) + f(y)$.

1. Comparer $f(x)$ et $f(1/x)$ pour tout $x > 0$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $f(x) = \frac{1}{x} \int_x^{2x} f(t)dt - \int_1^2 f(t)dt$.
3. En déduire l'expression explicite de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 21.3.8★★★*Oral CCINP*

Soit $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$. On pose $\varphi : f \in E \mapsto \varphi(f)$ où $\varphi(f)$ est la fonction définie par $\varphi(f)(x) = f(0)$ si $x = 0$ et $\varphi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$ si $x \in]0; 1]$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
2. Montrer que φ est injective.
3. (5/2) Montrer que 1 appartient au spectre de φ et donner son sous-espace propre associé.
4. (5/2) Donner les autres éléments propres de φ .

4 Sommes de Riemann

Exercice 21.4.1★

Soit $\alpha \geq 0$. A l'aide des sommes de Riemann, montrer que : $\sum_{k=1}^n k^\alpha \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Exercice 21.4.2★★*Oral CCP PSI*

Trouver un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 21.4.3★

Comportement asymptotique de $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2}$, de $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$.

Exercice 21.4.4★

Comportement asymptotique de $v_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$.

Exercice 21.4.5★

Soit $x \neq 0$. Comportement asymptotique de $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{x^2 k^2 + n^2}$.

Exercice 21.4.6 *Oral Mines Ponts* ★★★

1. Factoriser $X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer pour $a > 1$, $\int_0^\pi \ln |a^2 - 2a \cos(x) + 1| dx$ à l'aide d'une somme de Riemann.

22. Intégration sur un intervalle quelconque

Définition Soit I un intervalle réel.

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux sur I si f est continue par morceaux sur tout segment de I .

I - Intégrales généralisées

I - 1) Définition et exemples de référence

Définition Soit $f : [a; b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a; b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

On dit que l'intégrale généralisée (ou intégrale impropre) $\int_a^b f(t)dt$ converge si $\int_a^x f(t)dt$ possède une limite finie lorsque x tend vers b . Auquel cas, on pose :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \int_a^x f(t)dt$$

On dit qu'une intégrale généralisée diverge si elle ne converge pas.

Chercher la nature d'une intégrale consiste à chercher si l'intégrale est convergente ou divergente.

Remarque la définition est analogue pour une fonction $f :]a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Intégrales de référence

- $\int_0^1 \ln(t)dt$ converge
- $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$
- $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$
- $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$
- $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$

Propriété (intégrale faussement impropre)

Soit $f : [a; b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a; b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Si f est prolongeable par continuité en b , alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Définition (intégrale généralisée aux deux bornes)

Soit $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]a; b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

On dit que $\int_a^b f(t)dt$ converge s'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent.

Auquel cas, on pose : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

On dit que $\int_a^b f(t)dt$ diverge s'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\int_a^c f(t)dt$ diverge ou $\int_c^b f(t)dt$ diverge.

I - 2) Premières propriétés

Soit $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{K}$ et $g :]a; b[\rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues par morceaux avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Propriété (linéarité) Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ fixés.

Si les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent, alors l'intégrale $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt$ converge aussi.

Auquel cas : $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$.

Propriété Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si les intégrales $\int_a^b \operatorname{Re}(f(t))dt$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(f(t))dt$ convergent.

Auquel cas :

$$\operatorname{Re} \left(\int_a^b f(t)dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t))dt \text{ et } \operatorname{Im} \left(\int_a^b f(t)dt \right) = \int_a^b \operatorname{Im}(f(t))dt$$

Propriété Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Si f est continue et positive sur $]a; b[$ et si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge et vaut 0 alors f est nulle sur $]a; b[$.

I - 3) Calcul d'une intégrale généralisée

Propriété : changement de variable Soit $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.

Si $\varphi :]\alpha; \beta[\rightarrow]a; b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$,

alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ sont de même nature et lorsqu'elles convergent :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

Remarque on dispose du même théorème pour une bijection strictement décroissante de classe $\mathcal{C}^1$.

Propriété : intégration par parties

Soient $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{K}$ et $g :]a; b[\rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a; b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)g(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x)g(x)$ existent et sont finies, alors $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ et $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ sont de même nature et lorsqu'elles convergent :

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = \left[f(t)g(t) \right]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt \quad \text{avec} \quad \left[f(t)g(t) \right]_a^b = \lim_{\substack{t \rightarrow b \\ t < b}} f(t)g(t) - \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} f(t)g(t)$$

II - Intégrales généralisées de fonctions à valeurs positives

Propriété Soit $f : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et positive avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Alors $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est majorée sur $[a, b[$.

Théorème de comparaison

Soit $f : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues par morceaux et positives avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- Si $f \leq g$ au voisinage de b et si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.
- Si $f(t) \underset{\substack{t \rightarrow b \\ t < b}}{=} O(g(t))$ ou $o(g(t))$ et si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.
- Si $f(t) \underset{\substack{t \rightarrow b \\ t < b}}{\sim} g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Application règle du " $x^\alpha f(x)$ " en $+\infty$

Soit $c \in \mathbb{R}$ et soit $f : [c; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et positive.

S'il existe $\alpha > 1$ tel que $x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ et donc $\int_c^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ converge.

Application règle du " $x^\alpha f(x)$ " en 0^+

Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $f :]0; c] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et positive.

S'il existe $\alpha < 1$ tel que $x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ et donc $\int_0^c f(x) dx$ converge.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 (\ln(x))^n dx$ converge.

III - Intégrales généralisées absolument convergentes

Soit $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $]a; b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Théorème de comparaison

Soient $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues par morceaux avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- Si $f(t) \underset{\substack{t \rightarrow b \\ t < b}}{=} O(g(t))$ ou $o(g(t))$ et si g est intégrable en b alors f est intégrable en b .
- Si $f(t) \underset{\substack{t \rightarrow b \\ t < b}}{\sim} g(t)$ alors f est intégrable en b si et seulement si g est intégrable en b .

Définition

On dit que $\int_a^b f(t) dt$ converge absolument ou encore que f est intégrable sur $]a; b[$ si $\int_a^b |f(t)| dt$ converge.

On note $L^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ qui sont intégrables sur I .

Remarque Lorsque f est continue par morceaux sur $[a; b[$ et que $\int_a^b |f(t)| dt$ converge on dit parfois que f est intégrable en b^- plutôt qu'intégrable sur $[a; b[$.

Théorème (Inégalité triangulaire)

Si f est intégrable sur $]a; b[$ alors : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$.

Définition

On dit qu'une intégrale généralisée est semi-convergente si elle est convergente mais non absolument convergente.

Exemple Intégrale de Dirichlet

On peut montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est semi-convergente.

Complément de cours chapitre 22 : Intégration sur un intervalle quelconque

Remarque : si f est continue ou continue par morceaux sur $[a, b]$ (avec a et b finis) alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge.

∝ Démonstration de cours 1 : **Intégrales de référence**

∝ Idée de démonstration Si $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur $[a, b[$ et se prolonge par continuité en b

- Notons g la fonction f prolongée par continuité en b . g est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ donc g est bornée : il existe $M \geq 0$ tel que $|g(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$.
- $\int_a^b g(t)dt$ existe et pour tout $x \in [a, b[$: $\left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^b g(t)dt \right| = \left| - \int_x^b g(t)dt \right| \leq \int_x^b |g(t)|dt \leq M(b-x)$
- Ainsi $\int_a^x f(t)dt$ possède une limite finie lorsque x tend vers b et cette limite est $\int_a^b g(t)dt$.

∝ Démonstration de cours 2 **Théorème de comparaison**

∝ Démonstration de cours 3 l'absolue convergence implique la convergence.

Erreurs de référence :

- L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ n'est pas convergente (peu importe α).
- L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$ diverge car $\int_0^{+\infty} t dt$ est une intégrale divergente.
On a cependant $\int_{-A}^A t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-A}^A = 0 \rightarrow 0$ lorsque A tend vers $+\infty$.
Conclusion : il faut gérer "les problèmes" d'une intégrale généralisée les uns après les autres.
- soit $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[1; +\infty[$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.
♠ ERREUR : f se prolonge par continuité en $+\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ converge.

Compétences

- ★ Connaître les exemples de référence : $\int_0^1 \ln(t)dt$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ avec $\alpha > 0$, Riemann en $+\infty$ ou en 0.
- ♠ Dire que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.
- ★ Savoir montrer qu'une intégrale converge en faisant un prolongement par continuité.
- ♠ Faire la méthode précédente en $+\infty$.
- ★ Savoir utiliser l'équivalent pour des fonctions positives.
- ★ Savoir utiliser la méthode du t^α pour des fonctions positives.
- ★ Savoir faire un changement de variable en disant que cela conserve la nature (donc pas besoin de poser des bornes) et en écrivant TOUTES les hypothèses : par exemple, $u \mapsto 1/u$ est une bijection de classe C^1 strictement décroissante de $[1; +\infty[$ sur $]0; 1]$.
- ★ Savoir faire une intégration par parties (en écrivant fonctions C^1) en posant des bornes puis en faisant une limite.
Par exemple vous devez savoir trouver la formule explicite de $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ ou vous devez savoir montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.
- ★ Savoir que l'absolue convergence implique la convergence.
- ★★ Savoir majorer avec l'inégalité triangulaire en vérifiant que les deux intégrales convergent.
- ★★ CLASSIQUE : L'intégrale de Gauss $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.
Savoir montrer leur convergence, les valeurs seront données ou retrouvées dans le problème.

Chapitre 22 : Intégration sur un intervalle quelconque

1 Calculs (primitive, IPP, changement de variable)

Exercice 22.1.1★

Convergence et valeur de $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^2(t)}$.

Exercice 22.1.2★

Convergence et valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$.

Exercice 22.1.3★

Convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t} dt$.

Exercice 22.1.4★

Convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^2} dt$.

Exercice 22.1.5★

Convergence et valeur de $\int_0^1 \ln^2(t) dt$.

Exercice 22.1.6 Oral CCINP ★

Convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{t^2}\right) dt$.

Exercice 22.1.7 Oral Mines Ponts ★★

Convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(\sqrt{x})} dx$.

Exercice 22.1.8★

Convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}}$
on pourra changer de variable en posant $u = \sqrt{e^t+1}$.

Exercice 22.1.9★ Mines Telecom

Convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+4} dt$
on pourra changer de variable en posant $t = 4/x$.

Exercice 22.1.10 Oral CCINP ★★

Convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 22.1.11★

Convergence et valeur de $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\cos^2(t)}$ ($u = \tan(t)$)

Exercice 22.1.12★★

Montrer que $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1+\cos(\alpha)\cos(t)} = \frac{2\pi}{\sin(\alpha)}$
pour tout $\alpha \in]0; \pi/2[$.

Exercice 22.1.13★♡

On pose $I_n(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt$ pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Justifier que $I_n(x)$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$. Montrer que $I_n(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$.

Exercice 22.1.14 Oral CCINP ★★

On pose $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x)) dx$, $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x)) dx$ et $K = \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(x)) dx$.

1. Justifier que I converge.
2. Montrer que J et K convergent et que $I = J = K$. En déduire la valeur de I .

Exercice 22.1.15★

On pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier que I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Trouver la forme explicite de I_n en fonction de n .

Exercice 22.1.16★★ CCINP

On pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^4)^n} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que cette suite est bien définie.
2. (5/2) Montrer que cette suite converge et donner sa limite.
3. Trouver une relation entre I_n et I_{n+1} et donner une seconde méthode pour trouver la limite de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 22.1.17★♡♡

On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Donner l'ensemble de définition D de la fonction Γ .
Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x \in D$. En déduire $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 22.1.18★★*Oral CCINP*

1. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.
2. Soit f continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2} dx$ convergent et sont égaux.
3. En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$ (avec $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 22.1.19★★*Oral Mines Ponts* Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}^{+*}$ distincts avec $n \geq 1$. On pose : $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $P_i(X) = \prod_{0 \leq k \leq n, k \neq i} (X + a_k)$.

1. Montrer que $P_0, \dots, P_n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Donner les coordonnées d'un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.
2. Montrer la convergence et calculer $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+a_0)\dots(t+a_n)} dt$.

2 Convergence. Intégrabilité.

Exercice 22.2.1★

Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt$, $\forall P \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 22.2.2★

Déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4-1}}$.

Exercice 22.2.3★

Déterminer la nature de $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{\sin(t)} dt$.

Exercice 22.2.4★

Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{t}} dt$.

Exercice 22.2.5★♡

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la nature de $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^\alpha} dt$.

Exercice 22.2.6★★♡

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{t^2 \ln(t)}{1+t^\alpha} dt$.

Exercice 22.2.7★

Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{ch(t)}$.

Exercice 22.2.8 *Oral Mines ponts* ★

Justifier que $I = \int_0^1 \frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)} dt$ converge.

Exercice 22.2.9★

Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2+1} dt$.

Exercice 22.2.18★♡

1. Justifier que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.
2. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\sin(t)| \geq \sin^2(t)$. Exprimer $\sin^2(t)$ en fonction de $\cos(2t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ n'est pas absolument convergente. Autrement dit $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 22.2.10★

Déterminer la nature de $\int_0^1 \frac{t \ln(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

Exercice 22.2.11★

Déterminer la nature de $\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t(4-t)}}$.

Exercice 22.2.12★

Déterminer la nature de $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(t)} dt$. ($u = \sqrt{\tan(t)}$)

Exercice 22.2.13★★

Montrer la convergence de $\int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt$.

Exercice 22.2.14★

Déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \sin(1/x) dx$.
on pourra effectuer un changement de variable

Exercice 22.2.15★★

Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$.

Exercice 22.2.16 *Oral Mines Ponts* ★★

Justifier que $f(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-xt} dt$ existe pour tout $x > 0$.

Exercice 22.2.17★★

Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{it} - 1}{t^{3/2}} dt$.

Exercice 22.2.18.bis**

On pose $u_n = \int_{n\pi+\pi/4}^{n\pi+3\pi/4} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Justifier que la série $\sum u_n$ est divergente. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ n'est pas absolument convergente.

Exercice 22.2.19*♡

Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ et de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et trouver une relation entre ces deux termes.

Exercice 22.2.20 Oral Centrale ***

On considère la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ définie par $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

1. On pose $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$ et $v_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n+1)$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que ces deux suites convergent vers la même limite.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right) I_n$.
3. Montrer qu'il existe des réels α et β tels que $\ln(I_n) = \alpha \ln(n) + \beta + o(1)$.
4. Donner la nature de la série $\sum_{n \geq 1} I_n$.

Exercice 22.2.21 Oral Centrale ***

1. Montrer la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$. Justifier l'existence et calculer l'intégrale $I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(at) - \cos(bt)}{t} dt$.

Exercice 22.2.22 Oral CCP PSI Oral Mines Ponts PSI** Soient $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ avec $a < b$.

1. Justifier l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$.
2. Déterminer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt$ puis la limite lorsque ε tend vers 0^+ de $\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt$.
3. En déduire la valeur de I .

Exercice 22.2.23 Oral CCP PSI**

Déterminer la limite lorsque x tend vers 0 de $\int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt$.

Exercice 22.2.24 Oral CCINP **

Soit $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t)t^x} dt$.

1. Donner le domaine de définition de f . Calculer $f(1)$. Donner la monotonie de f .
2. Simplifier $f(x) + f(x+1)$ pour tout $x > 0$. Donner l'équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 22.2.25 Mines Ponts**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Montrer que pour n assez grand, l'intégrale $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} dt$ existe.
2. Trouver une relation entre u_{n+1} et u_n .
3. Etudier la nature de $\sum (-1)^n u_n$. si besoin on admettra que u_n tend vers 0

Exercice 22.2.26**

Soit f une fonction continue admettant une limite finie en $+\infty$.

Montrer que pour tout $a > 0$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t+a) - f(t) dt$ converge et trouver sa valeur.

Exercice 22.2.27 Mines Ponts**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et π périodique.

On pose $u_n = \int_0^\pi f(t) e^{-t/n} dt$ et $v_n = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-t/n} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que u_n et v_n existent puis que $v_n = \frac{u_n}{1 - e^{-\pi/n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 22.2.28 Oral CCINP ★★

1. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} dt$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-t+t^2} dt$ existent.
2. Calculer J .
3. A l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{x}$ montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3} dx$ et en déduire que $2I = J$.

3 Autres**Exercice 22.3.1**★★

Soit f une fonction continue de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Justifier que $\left(\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \right)^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f^2(t) dt$.

Exercice 22.3.2★♥

Soient f et g sont continues sur I de carrés f^2 et g^2 intégrables sur I . Montrer que fg est intégrable sur I .

Exercice 22.3.3 Oral CCINP ★★

On pose $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.

1. Donner le domaine de définition de F et calculer sa dérivée.
2. Montrer que l'on a, au voisinage de $+\infty$, $F(x) = \frac{\cos(x)}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
3. Montrer que $g : t \mapsto \frac{\sin(t) - t}{t^2}$ est prolongeable par continuité sur $[0; 1]$.
4. Déterminer un équivalent simple de F en 0.
5. Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 22.3.4 Oral Centrale ★★★

On pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.

1. Montrer que f existe sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer que f est C^1 sur $[0; +\infty[$ et donner une expression de f' .
3. Montrer que $\int_0^x f(t) dt = 1 - x \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge et que $\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \right) dx = 1$.