MATHEMATIQUES PSI LYCEE ARAGO PARTIE 3

$$\Psi$$

ANALYSE

PROBABILITE

ARITHMETIQUE

LEGENDE

♠ Erreur fatale $\boxed{1+\dfrac{sin\ x}{n}=7}$

$\star$ Niveau de difficulté des exercices.

♡ Exercice/Proposition/Méthode incontournable.

23. Suites et séries de fonctions

Dans tout ce chapitre, on considère des fonctions définies sur un intervalle réel I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Notation Pour toute fonction f bornée, on pose $\|f\|_\infty^I = \sup_{x\in I}|f(x)|$.

I - Suites de fonctions

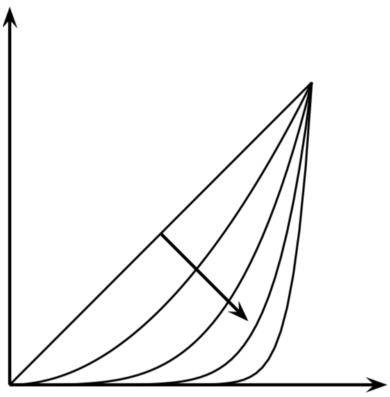
Dans tout ce paragraphe, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions et f est une fonction.

Définition

- On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f si, pour tout $x \in I$ fixé, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
- On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f si $\|f_n - f\|_\infty^I \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

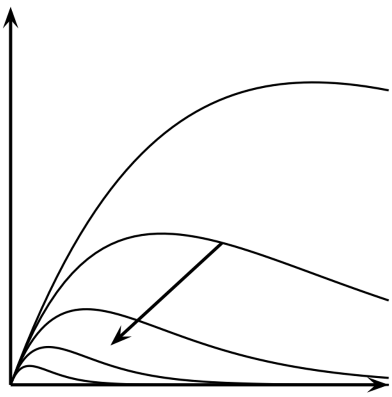
Exemples.

$\forall x \in [0\,;1[,\ f_n(x) = x^n$



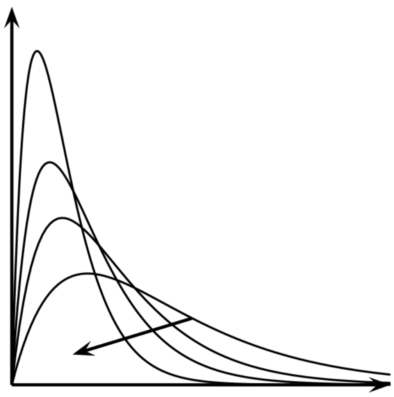
Convergence non uniforme vers 0.

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g_n(x) = xe^{1-nx}$



Convergence uniforme vers 0.

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h_n(x) = n^2xe^{-nx}$



Convergence non uniforme vers 0.

Propriété La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Théorème de continuité de la limite

Si

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I,
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f.

Alors f est continue sur I.

Remarque

La continuité étant une propriété locale, l'hypothèse de convergence uniforme sur I peut être remplacée par une hypothèse de convergence uniforme sur tout segment de I.

Théorème d'interversion limite-intégrale

Si

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a;b]$,
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;b]$ vers f.

Alors $\displaystyle\int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right)$.

Théorème de convergence dominée
Si

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I,
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f,
- la fonction f est continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux, intégrable sur I telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et $\displaystyle\int_I \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_I f_n(t)\mathrm{d}t\right)$.

Théorème de dérivabilité de la limite
Si

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^1 sur I,
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f,
- la suite de fonctions $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers g.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.

Théorème : extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^k sur I,
- pour tout $i \in \{0, ..., k-1\}$, la suite de fonctions $\left(f_n^{(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers g_i,
- la suite de fonctions $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniforément sur tout segment de I vers g_k.

Alors g_0 est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour tout $i \in [\![0;k]\!]$, $g_0^{(i)} = g_i$.

II - Séries de fonctions

Dans tout ce paragraphe, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ est une série de fonctions. On note : $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{N} f_n(x)$.

Définition

- On dit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I si, pour tout $x \in I$ fixé, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge.
- On dit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur I si la suite de fonctions $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I.
- On dit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur I si la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty^I$ converge.

Propriété
La convergence normale entraîne la convergence uniforme, et la convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Remarque Pour démontrer la convergence normale, on ne cherche pas forcément $\|f_n\|_\infty^I$, parfois il suffit de trouver un majorant α_n de $|f_n(x)|$ indépendant de x et tel que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n$ converge.

Notations
Si $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I, alors on note $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ la fonction somme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note également R_N la fonction reste $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x)$.

Propriété
La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si la suite de fonctions $(R_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle c'est à dire ssi $\displaystyle\sup_{x\in I}|R_N(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ c'est à dire ssi $\|R_N\|_\infty^I \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque on démontre la convergence uniforme par cette méthode notamment lorsque l'on a une série altérnée.

Théorème de la double limite

Soit a un élément de I ou une extrémité de I (éventuellement $a=+\infty$ ou $a=-\infty$). Si

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie ℓ_n en a,
- la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur I.

Alors la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \ell_n$ converge, la fonction somme admet une limite en a et $\lim\limits_{x \rightarrow a} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x \rightarrow a} f_n(x)$.

Théorème de continuité de la somme

Si

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I,
- la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la fonction somme est continue sur I.

Théorème d'intégration terme à terme sur un segment

Si

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a ; b]$,
- la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[a ; b]$.

Alors $\displaystyle\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d} t=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(t) \mathrm{d} t\right)$.

Théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque

Si

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur I,
- la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I,
- la fonction somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I,
- la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 0} \displaystyle\int_I\left|f_n\right|$ converge.

Alors la fonction somme est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d} t=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n(t) \mathrm{d} t\right)$.

Remarque Sur certains exercices la 4ème hypothèse n'est pas vérifiée. En général, on doit appliquer le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles associées à la série de fonctions.

Théorème de dérivation terme à terme

Si

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^1 sur I,
- la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I,
- la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n^{\prime}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la fonction somme est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{\prime}=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{\prime}$.

Théorème : extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si

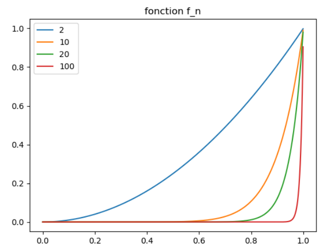
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^k sur I,
- pour tout $i \in\{0, \ldots, k-1\}$, la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n^{(i)}$ converge simplement sur I,
- la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

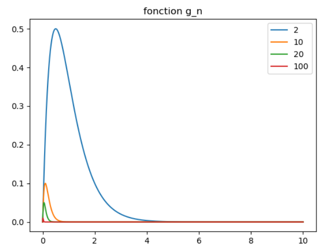
Alors la fonction somme est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour tout $i \in\{0, \ldots, k\}$, $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(i)}=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}$.

Complement de cours chapitre 23 : Suites et séries de fonctions

Exemples/contre-exemples de cours

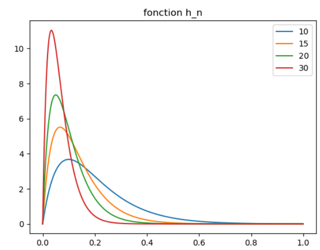
$\boxed{\text{Exemple 1}}$ On pose $f_n(x) = x^n$ pour tout $x \in [0;1]$, tout $n \in \mathbb{N}$.
Etudions la convergence simple sur $[0;1]$. Etudions la convergence uniforme sur $[0;1]$. Etudions la convergence uniforme sur $[0;1[$. Etudions la convergence uniforme sur tous les segments de $[0;1]$. Etudions la convergence uniforme sur tous les segments de $[0;1[$.

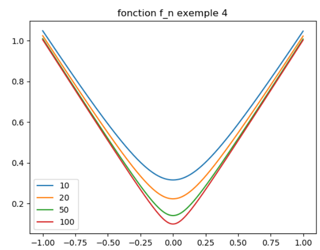




$\boxed{\text{Exemple 2}}$ On pose $g_n(x) = xe^{1-nx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Etudions la convergence simple sur $\mathbb{R}^+$. Etudions la convergence uniforme sur tous les segments de $\mathbb{R}^{+*}$. Etudions la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

$\boxed{\text{Exemple 3}}$ On pose $h_n(x) = n^2xe^{-nx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Etudions la convergence simple sur $\mathbb{R}^+$. Etudions la convergence uniforme sur tous les segments de $\mathbb{R}^{+*}$. Etudions la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.





$\boxed{\text{Exemple 4}}$ On pose $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Etudions la convergence simple sur $\mathbb{R}$. Etudions la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Etudions la convergence uniforme de (f_n') sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Exemple 5}}$ On pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ (fonction zeta de Riemann).

- Donner le domaine de défintion de la fonction ζ.
- Montrer que la fonction ζ est continue sur $]1;+\infty[$.
- Montrer que la fonction ζ est dérivable sur $]1;+\infty[$.

$\boxed{\text{Exemple 6}}$ On pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

- Justifier que la fonction S existe sur $\mathbb{R}^+$.
- Montrer que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}^+$

$\boxed{\text{Erreurs classiques}}$:

- la convergence uniforme (ou normale) sur chaque segment de I n'implique pas la convergence uniforme (respectivement normale) sur I.
- Conserver " des x " après le calcul de $\| \bullet \|_\infty$.
- Parler de convergence normale pour une suite de fonctions.

Les méthodes

$\boxed{\text{Méthode (SUITE)}}$: si il existe une suite (a_n) d'élements de I telle que $f_n(a_n)$ ne tendent pas vers 0 alors on ne peut pas avoir f_n converge uniformément vers la fonction nulle car $\|f_n\|_\infty \geqslant f_n(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Méthode (SUITE)}}$: si il existe une suite (u_n) qui tend vers 0 telle que $|f_n(x) - f(x)| \leqslant u_n$ pour tout $x \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors f_n converge uniformément vers f car $0 \leqslant \|f_n - f\|_\infty \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Méthode (SUITE)}}$: si f_n converge simplement vers f sur I avec f_n continue sur I pour tout n et f non continue sur I alors f_n ne converge pas uniformément vers f.

$\boxed{\text{Méthode (SERIE)}}$:

- on commence par fixer x et étudier la convergence de $\sum f_n(x)$ (convergence simple).
- On étudie la convergence normale en essayant de majorer (ou de calculer) $\|f_n\|_\infty$. Suivant la question on se place sur un segment de I. On aura convergence normale si la série des $\|f_n\|_\infty$ converge.
- Sinon on étudie la convergence uniforme en essayant de majorer $\|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n\|_\infty$. Un cas simple de cette situation est le cas des séries vérifiant le critère spécial des séries altérnées.
  Dans ce dernier cas on sait que $\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leqslant |f_{N+1}(x)|$ et il ne reste plus qu'à majorer ce terme indépendamment de x par une suite qui tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

Les démonstrations de cours

$\propto$ $\boxed{\text{La convergence uniforme implique la convergence simple}}$ Démonstration de cours 1

$\propto$ $\boxed{\text{Théorème de continuité de la limite}}$ Démonstration de cours 2

$\propto$ $\boxed{\text{Théorème d'interversion limite-intégrale}}$ Démonstration de cours 3

$\propto$ $\boxed{\text{Théorème de dérivabilité de la limite}}$ Démonstration de cours 4

$\propto$ $\boxed{\text{La convergence normale implique la convergence uniforme}}$ Démonstration de cours 5

Les compétences

- ⋆⋆ Avoir compris que l'on peut se placer sur un segment dans les th portant sur des propriétés locales : continuité et dérivabilté.
- ♠ Se placer sur un segment dans les th portant sur les intégrales.
- ⋆ Savoir montrer la convergence simple d'une suite de fonctions : à x fixé on cherche la limite de $f_n(x)$
- ⋆⋆ Savoir montrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions : on montre que $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0.
- ⋆⋆ On trouve $\|f_n - f\|_\infty$ à l'aide d'un tableau de variations.
- ⋆⋆ On peut montrer que $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 à l'aide de majorations (SANS x !)
- ♠ Dire qu'il y a convergence uniforme de f_n vers f car pour tout x, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$.
- ♠ Dire qu'il y a convergence uniforme de f_n vers f car il y a convergence normale (aucun sens sans les séries).
- ⋆⋆ On montre qu'il n'y a pas convergence uniforme en trouvant x_n tel que $fn(x_n) - f(x_n)$ ne tende pas vers 0.
- ⋆⋆ On montre qu'il n'y a pas convergence uniforme en contredisant le th de continuité si chaque f_n est continue alors que f ne l'est pas .
- ⋆⋆ Théorème de CONVERGENCE DOMINEE important. Il ne faut pas, dans la domination, avoir encore du n.
- ♠♠ Dire que la convergence normale (ou uniforme) sur tout segment implique la convergence normale (ou uniforme) sur $\mathbb{R}$.
- ⋆ Savoir montrer la convergence simple de $\sum f_n$ en montrant que pour tout x la série $\sum f_n(x)$ converge.
- ♠♠ Montrer la convergence simple de $\sum f_n$ en montrant que pour tout x, $f_n(x)$ tend vers 0.
- ⋆ Savoir montrer la convergence normale de $\sum f_n$ en montrant que $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.
- ♠ Ajouter le mot simplement ou uniformément ou normalement à la fin de la phrase précédente.
- ⋆ Savoir que CVN implique CVU implique CVS.
- ⋆⋆ Savoir montrer la convergence uniforme en montrant que le reste converge uniformément vers la fonction nulle. En particulier pour les séries altérnées
- ♠ Oublier les cas particuliers dans le th double limite : par exemple si $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$ on n'a pas $lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ si $n = 0$.
- ♠ Oublier les valeurs absolues dans le th d'intégration terme à terme.
- ⋆⋆⋆ Etre capable de reconnaître une série géométrique dans une intégrale pour ensuite utiliser le th d'intégration terme à terme.

Chapitre 23 : Suites et séries de fonctions

1 Suites de fonctions : Convergence simple et uniforme sur I

Exercice 23.1.1$\star$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto nx^2 e^{-nx}$.

1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 23.1.2$\star$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+nx}$.

1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 23.1.3$\star\star$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{n(1+x^n)}$.

1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 23.1.4$\star$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23.1.5$\star\star$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$. *on pourra poser* $x_n = \sqrt{n}$

Exercice 23.1.6$\star$*Oral CCP*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.

1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[2;+\infty[$.
3. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]0;+\infty[$.

Exercice 23.1.7$\star$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-nx}\sin(nx)$.

1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$
3. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur les segments de $]0;+\infty[$.

Exercice 23.1.8$\star$*Oral CCP MP*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = 1/x$ si $|x| > 1/n$ et $f_n(x) = n^2x$ si $|x| \leqslant 1/n$.

1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23.1.9$\star\star\star$
Soit $f_n : [0;\pi/2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin^n(x)\cos(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0;\pi/2]$.
2. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0;\pi/2]$.

Exercice 23.1.10$\star$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{n+2}{n+1}e^{-nx^2}$.

1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]0;+\infty[$.
4. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur les segments de $]0;+\infty[$.

Exercice 23.1.11$\star$CCINP
On pose $f_n(x) = \sin\left(nxe^{-nx^2}\right)$ pour tout $x \in]-1;1[$.

1. Etudier la convergence simple de (f_n) sur $]-1;1[$.
2. Soit $a \in]0;1[$. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[a;1[$.
3. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $]-1;1[$.

Exercice 23.1.12$\star$
Soit $a \in \mathbb{R}^+$. On pose $f_n(x) = \dfrac{nx(x^2+a)}{nx+1}e^{-x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;1]$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0;1]$ vers F à déterminer.
2. Etudier la convergence uniforme sur $[0;1]$ en fonction de a.
3. Etudier la convergence uniforme sur les segments de $]0;1]$.

2 Suites de fonctions : interversion limite-intégrale et théorème de convergence dominée

Exercice 23.2.1$\star$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = \dfrac{n\sin(x/n)}{x(1+4x^2)}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Calculer la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ après avoir justifié l'existece de l'intégrale.

Exercice 23.2.2$\star$*Oral CCP MP*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$.

1. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0;1]$.
2. Trouver la limite de $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ si elle existe.

Exercice 23.2.3⋆

Déterminer la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n+e^x}dx$.

Exercice 23.2.4⋆

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Calculer la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

Exercice 23.2.5⋆*Oral CCP PSI*

Montrer que $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^{n^2} dt$ converge et trouver sa limite sous la forme d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.

Exercice 23.2.6⋆⋆

Déterminer la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{n+2}+1}dx$.

Exercice 23.2.7⋆⋆*Oral CCP PSI*

On pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^n}dx$ et $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx$.

1. Montrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver la limite de (I_n).
2. Montrer que J existe. Montrer que $I_n \sim_{+\infty} \dfrac{J}{n}$.

Exercice 23.2.8⋆⋆*Oral CCP PSI*

Montrer que $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t)dt$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt$.

Exercice 23.2.9⋆⋆*Oral Mines Ponts PSI*

Montrer que $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n e^{n(t+it)/(2n+3)}dt$ converge et trouver sa limite.

Exercice 23.2.10⋆⋆⋆*Oral Mines Ponts PSI*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}\cos(t)}{\sqrt{t}}dt$.

1. Montrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Trouver la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Trouver un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 23.2.11⋆

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt+t^2}dt$.

1. Montrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Trouver la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 23.2.12⋆⋆⋆

1. Calculer la limite pour $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}t^{3n+3}}{1+t^3}dt$.
2. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^3+1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.
3. Trouver a, b, c réels tels que $\dfrac{1}{t^3+1} = \dfrac{a}{t+1} + \dfrac{bt+c}{t^2-t+1}$ pour tout $t \in [0;1[$. En déduire la valeur de la somme de la question 2.

Exercice 23.2.13⋆

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{nx}{1+n^2x^4}$.

1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0;1]$. On note f la fonction limite.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt$. Qu'en conclure

Exercice 23.2.14⋆⋆*Oral CCP*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0;1[$ on pose $f_n(x) = \dfrac{x^{2n+1}\ln(x)}{x^2-1}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$.

1. Justifier que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer sa limite si elle existe.
2. Montrer, en calculant $I_n - I_{n+1}$, que $I_n = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$. Montrer le de nouveau avec le théorème d'interversion terme à terme.

Exercice 23.2.15⋆⋆⋆

On définit une suite (f_n) de fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par $f_0 : x \mapsto 1$ et $f_{n+1} : x \mapsto 1 + \displaystyle\int_0^x f_n(t/2)dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant f_{n+1}(x) - f_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
2. En déduire la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}^+$. On note f la fonction limite. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a $f'(x) = f(x/2)$.

Exercice 23.2.16⋆⋆Mines Ponts

Donner la limite de $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+2x}}}}}$ (n fois le symbole racine).

3 Séries de fonctions : convergence simple, uniforme et normale

Exercice 23.3.1⋆
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$.

1. Etudier la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23.3.2⋆♡
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{xn^2+n}$.

1. Etudier la convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Etudier la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 23.3.3⋆⋆⋆
Soit $S : x \mapsto \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

1. Donner le domaine de définition de S.
2. Etudier la convergence normale sur $\mathbb{R}^+$.
3. Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 23.3.4⋆⋆
Soit $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$.

1. Donner le domaine de définition de S.
2. Etudier la convergence normale sur $[0;1[$.
3. Etudier la convergence normale sur les segments de $[0;1[$.

Exercice 23.3.5 Oral CCINP ⋆⋆
Pour $x > 0$ et $n \geqslant 2$ on pose $u_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

1. Déterminer le domaine D de convergence de $\sum u_n$.
2. Montrer que la série de $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur D.
3. Montrer que pour $x \in D$ et $n \geqslant 2$, le reste d'ordre n de la série vérifie $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$. Qu'en conlure ?

Exercice 23.3.6 Oral CCINP ⋆⋆
On pose $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$.

1. Etudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et donner sa somme.
3. Soit $a > 0$, montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0;a]$.
4. Montrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformement sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 23.3.7 Oral CCINP ⋆⋆
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0;+\infty[$ on pose $f_n(x) = x^{2n+1}\ln(x)$.

1. Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Etudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]0;1]$.
3. Etudier la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ que $]0;1]$.
4. Etudier la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ que $]0;1]$.

Exercice 23.3.8 Oral Centrale ⋆⋆⋆
Soit (u_n) une suite réelle décroissante et à valeurs positives.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit $f_n : [0;1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto u_n x^n (1-x)$.

1. Etudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $[0;1]$.
2. Etudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0;1]$ *on trouvera une condition nécessaire et suffisante sur* u_n
3. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[0;1]$ si et seulement si la suite (u_n) tend vers 0.

4 Séries de fonctions : double limite, continuité, dérivabilité, classe C^k

Idées :
- si on a convergence uniforme sur tous les segments de I alors on peut utiliser le théorème de continuité de la somme ou le théorème de dérivabilité de la somme sur I.
- Si on me demande un équivalent je peux
  - me ramener à une limite et utiliser le théorème double limite
  - me ramener à une comparaison série intégrale
  - isoler le premier terme de la somme et montrer que la somme des autres termes est négligeable devant le premier terme avec l'une des deux méthodes çi-dessus.
- Dans le th double limite il ne faut pas oublier le premier terme de la somme qui possède souvent une limite différente des autres.

Exercice 23.4.1$\star$

Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

Montrer que S existe et est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 23.4.2$\star$

Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2+1}$.

Montrer que S existe et est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23.4.3 Oral CCINP $\star$

Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$.

Justifier l'existence et la continuité de S sur $]0;+\infty[$.

Donner la limite de S en $+\infty$.

Exercice 23.4.4$\star$

Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx+1}$. Montrer que S existe, est continue et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 23.4.5$\star\star$*Oral Mines Ponts*

Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

1. Trouver le domaine de définition de S.
2. Montrer que S est de classe C^1 sur ce domaine.

Exercice 23.4.6$\star$*Oral CCINP*

Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$.

1. Montrer que S existe et est continue sur $[0;1]$.
2. Montrer que S est dérivable sur $[0;1]$ et trouver $S'(1)$.

Exercice 23.4.7$\star\star\heartsuit$

Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$.

1. Montrer que S existe et est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Donner la limite de S en $+\infty$.
3. Montrer que $S(x) \sim_{+\infty} \frac{\pi^2}{6x^2}$.
4. Montrer que $S(x) \sim_0 \frac{\pi}{2x}$.

Exercice 23.4.8$\star\star\heartsuit$

Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que S existe et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Donner la limite de S en $+\infty$ puis montrer, avec une comparaison série-intégrale, $S(x) \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2x}$.
3. Trouver la limite de $S(x)$ lorsque x tend vers 0. On note ℓ cette limite.
4. Trouver un équivalent de $S(x)-\ell$ en fonction de $\zeta(4)$ et de x^2.

Exercice 23.4.9$\star\star\star$

Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Donner l'ensemble de définition de S.
2. Donner la limite de S en $+\infty$.
3. Donner la monotonie de S et en déduire que $S(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0.
4. Montrer que S est de classe C^∞ sur son domaine de définition et donner une expression de ses dérivées sous la forme de séries.
5. Avec une comparaison série intégrale trouver un équivalent de $S(x)$ au voisinage de 0^+.

Exercice 23.4.10 Oral CCINP $\star\star$

Soient $a, x \in \mathbb{R}$. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n+x}$.

1. Donner le domaine de définition de S en fonction de a.
2. On suppose $|a| < 1$.
   (a) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   (b) Trouver une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$ pour $x > 0$.
   (c) Donner un équivalent de S en 0.
   (d) Limite et équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 23.4.11 Oral CCINP ⋆⋆

On pose $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{n^2+t^2}$ sous reserve d'existence.

1. Donner D le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur D.
3. Donner la limite de f en $+\infty$. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 23.4.12 Oral CCINP ⋆⋆

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)dt$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $I_n \sim \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$ si n tend vers $+\infty$.
3. Montrer alors que $I_n \sim \dfrac{\pi^2}{12n}$.

Exercice 23.4.13⋆

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

1. Donner le domaine de définition de $\sum f_n$.
2. Montrer que $\sum f_n$ est C^1 sur $]-1;1[$ et simplifier sa dérivée. Que peut-on en conclure ?

Exercice 23.4.14 Oral CCINP ⋆⋆

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. Etudier la continuité de f.
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]0;+\infty[$.
3. Déterminer la limite ℓ de f en $+\infty$ puis un équivalent de $f(x)-\ell$.

Exercice 23.4.15⋆⋆

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que F existe et est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Justifier que F est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Simplifier $F(x)+F(x+1)$ pour tout $x>0$.
4. En déduire un équivalent en zéro de $F(x)$.
5. Justifier que $\dfrac{1}{x} \leqslant 2F(x) \leqslant \dfrac{1}{x-1}$ pour tout $x>1$ et en déduire un équivalent de $F(x)$ en $+\infty$.

Exercice 23.4.16 Oral Mines Ponts ⋆⋆

Soit $f_n : x \mapsto \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1-x^{2^k}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1;1[$.

1. Justifier que f_n converge simplement sur $]-1;1[$. On note f sa limite.
2. Montrer que f est continue sur $]-1;1[$.

Exercice 23.4.17⋆⋆

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2x} \sim_{+\infty} e^{-x}$.

Exercice 23.4.18⋆⋆

Soit $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2x}$.

1. Domaine de définition de S ?
2. Montrer que S est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Trouver la limite de S en $+\infty$.
4. Trouver l'équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers 0.
   on utilisera $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 23.4.19⋆⋆⋆

Soit $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx)^2}$.

1. Justifier que S existe et est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que S n'est pas dérivable en 0.
   on cherchera la limite du taux d'accroissement

Exercice 23.4.20 Oral CCINP ⋆⋆

Soit $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$.

1. Justifier que S existe et est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que $S'(x) = S(x) - \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ pour tout $x>0$.
4. Montrer que S est dérivable en 0.

Exercice 23.4.21⋆⋆⋆

Soit $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{arctan(nx)}{n^2}$.

1. Justifier que S existe sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Montrer que S n'est pas dérivable en 0.
   on cherchera la limite de la dérivée

Exercice 23.4.22⋆⋆⋆

Soit $a \in]-1;1[$ fixé. On pose $f_n(x) = \dfrac{a^n \cos(nx)}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme. On admet que $S(0) = -\ln(1-a)$.
2. Justifier que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de S' sans symbole somme.
3. En déduire une expression de S sans symbole somme puis donner la valeur de $\displaystyle\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a\cos(x)+1)dx$.

Exercice 23.4.23 Oral CCINP ⋆⋆

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$. On note f la fonction somme.
2. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que $xf(x) - f(x+1) = \dfrac{1}{e}$ pour tout $x>0$ et en déduire un équivalent de f en 0.

5 Séries de fonctions : intégration terme à terme

Exercice 23.5.1⋆
Démontrer que $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exercice 23.5.2⋆
Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$.

Exercice 23.5.3⋆⋆
Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t-1}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$.

Exercice 23.5.4⋆⋆*Oral CCP PSI*
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}dt = A\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Exercice 23.5.5⋆⋆*Oral ENSAM*
Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Avec le th de convergence dominée, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{e^t-1}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$.

Exercice 23.5.6⋆⋆*Oral Centrale*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}dt = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k n^k}{k!(2k+1)}$.

Exercice 23.5.7⋆⋆
Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 23.5.8⋆⋆CCINP
Soit $f : t \mapsto e^t \ln(t)$.

1. Montrer que f est intégrable sur $]0;1]$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!}$.

Exercice 23.5.9⋆⋆
Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{z-e^{it}}dt = 0$.

Exercice 23.5.10⋆⋆CCINP
Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on pose $\displaystyle J_{p,q} = \int_0^1 x^p(\ln(x))^q dx$.

1. Montrer que $J_{p,q}$ existe pour tous $p, q \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*,\ J_{p,q} = \dfrac{-q}{p+1}J_{p,q-1}$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^n(\ln(x))^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

Exercice 23.5.11⋆⋆⋆

1. Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+e^t}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ existent.
2. Est-il possible d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme pour montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+e^t} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$?
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+e^t} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ en utilisant le théorème de convergence dominée pour la suite des sommes partielles.

Exercice 23.5.12⋆⋆*Oral CCINP*
On considère la fonction f définie par $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que la série de fonctions ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Montrer que $f-1$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty}(f(t)-1)dt$ en fonction de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.
5. Déterminer un équivalent de f en 0^+ en admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 23.5.13$\star\star\star$*Oral Centrale PSI*

On pose $S_n(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{1+k^2t^2}$ et $R_n(t)=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2t^2}$.

1. Justifier que (S_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$. On note S la fonction limite.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2t^2}dt$ existe.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2t^2}dt=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ en utilisant le théorème de convergence dominée pour la suite des restes.

Exercice 23.5.14$\star\star\star$

Soit f_0 une fonction réelle continue sur $[0;2]$. On pose $f_{n+1}(x)=\displaystyle\int_0^x f_n(t)dt$ pour tout $x\in[0;2]$ et tout $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0;2]$. On note S sa somme.
2. Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par S.
3. En déduire l'expression de S en fonction de f_0.

6 Une partie de problème

Exercice 23.6.1$\heartsuit$ $\star$ à $\star\star\star$

Soit $\zeta : x\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ et $\sigma(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$. On donne $\sigma(1)=\ln(2)$.

1. Montrer que ζ existe sur $]1;+\infty[$.
2. En étudiant la limite en 1 montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme de $\displaystyle\sum\frac{1}{n^x}$ sur $]1;+\infty[$.
3. Trouver la limite ℓ de ζ lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer que $\zeta(x)-\ell\sim_{+\infty}2^{-x}$.
4. Montrer que ζ est continue sur $]1;+\infty[$.
5. Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty}(\zeta(x)-1)dx=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2\ln(n)}$.
6. Montrer que ζ est de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}$ sous la forme d'une série.
7. Dresser le tableau de variations de ζ. On donnera la limite en 1.
8. Donner le domaine de définition de σ et calculer la limite de $\sigma(x)$ lorsque x tend vers 1.
9. Trouver un lien entre $\sigma(x)$, 2^x et $\zeta(x)$ pour $x\in]1;+\infty[$. En déduire que σ est C^∞ sur $]1;+\infty[$.
10. Trouver un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1
    (a) en utilisant la relation trouvée avec σ
    (b) à l'aide d'une comparaison série-intégrale.
11. (a) Enoncer le théorème des inégalités des accroissements finis.
    (b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $x>0$. En déduire un encadrement de $\displaystyle\frac{1}{(2n-1)^x}-\frac{1}{(2n)^x}$.
    (c) Montrer que pour tout $x>0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{(2n)^{x+1}}\leqslant\sigma(x)\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{(2n-1)^{x+1}}$.
    (d) En déduire que la limite de $\sigma(x)$ lorsque x tend vers 0 est $\dfrac{1}{2}$.

24. Intégrales à paramètre

Dans tout ce chapitre, I et J sont deux intervalles réels.

Théorème de continuité sous le signe intégrale

On considère une fonction $f : I \times J \to \mathbb{K}$. Si

- pour tout $x \in I$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x;t)$ est continue par morceaux sur J ;
- pour tout $t \in J$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x;t)$ est continue sur I ;
- la fonction f vérifie une hypothèse de domination sur $I \times J$,
  c'est-à-dire il existe une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux, intégrable sur J et telle que

$$\forall (x;t) \in I \times J, |f(x;t)| \leqslant \varphi(t)$$

alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x;t)\mathrm{d}t$ est continue sur I.

Théorème de convergence dominée à paramètre continu

On considère une fonction $f : I \times J \to \mathbb{K}$. Soit a une borne de I. Si

- pour tout $t \in J$ fixé, $f(x;t) \to \ell(t)$ lorsque $x \to a$;
- pour tout $x \in I$ fixé, les fonctions $t \mapsto f(x;t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur J ;
- il existe une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux, intégrable sur J et telle que

$$\forall (x;t) \in I \times J, |f(x;t)| \leqslant \varphi(t)$$

alors la fonction ℓ est intégrable sur J et $\displaystyle\int_J f(x;t)\mathrm{d}t \to \int_J \ell(t)dt$ lorsque $x \to a$.

Théorème de dérivation sous le signe intégrale

On considère une fonction $f : I \times J \to \mathbb{K}$. Si

- pour tout $x \in I$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x;t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ;
- pour tout $t \in J$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x;t)$ est de classe C^1 sur I ;
- pour tout $x \in I$ fixé, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x;t)$ est continue par morceaux sur J ;
- la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ vérifie une hypothèse de domination sur $I \times J$,
  c'est-à-dire il existe une fonction $\psi : J \to \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux, intégrable sur J et telle que

$$\forall (x;t) \in I \times J, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x;t)\right| \leqslant \psi(t)$$

alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x;t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et : $\forall x \in I, g'(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x;t)\mathrm{d}t$

Corollaire On considère une fonction $f : I \times J \to \mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si

- pour tout $x \in I$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x;t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ;
- pour tout $t \in J$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x;t)$ est de classe C^n sur I ;
- pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, pour tout $x \in I$ fixé, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x;t)$ est continue par morceaux sur J ;
- pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, la fonction $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ vérifie une hypothèse de domination sur $I \times J$,
  c'est-à-dire il existe une fonction $\psi_k : J \to \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux, intégrable sur J et telle que

$$\forall (x;t) \in I \times J, \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x;t)\right| \leqslant \psi_k(t)$$

alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x;t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et : $\forall k \in [\![1;n]\!], \forall x \in I, g^{(k)}(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x;t)\mathrm{d}t$

Remarque La continuité sur I et la dérivabilité sur I sont des propriétés locales, donc on peut remplacer les hypothèses de domination sur $I \times J$ par des hypothèses de domination sur $[a;b] \times J$ valables pour tout segment $[a;b]$ de I.

Chapitre 24 : Intégrales à paramètre

Compétences

- $\star\star$ Connaître les 3 hypothèses du th de continuité.
- $\star\star$ Connaître les 4 hypothèses du th de dérivabilité.
- $\star\star\star$ Connaître le corollaire de ce théorème.
- $\star\star$ Savoir que, pour la DOMINATION, on peut se placer sur un segment pour les x si on essaye d'appliquer ces théorèmes à la fonction $x \mapsto f(x) = \displaystyle\int g(x,t)dt$.
- $\star\star$ Conclure alors ainsi : f est C^1 sur tout $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}$ donc f est C^1 sur $\mathbb{R}$.
- ♠ Pour la DOMINATION avoir encore du x dans le majorant.
- ♠ Pour la DOMINATION avoir un majorant qui n'est pas intégrable.
- ♠♠ Pour la DOMINATION avoir un majorant qui est ... négatif ou complexe!!!
- $\star\star$ CLASSIQUE : Fonction Gamma d'Euler $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Existence sur $\mathbb{R}^{+*}$, continuité, dérivabilité, limites, relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (qui permet avec la continuité en 1 d'en déduire un équivalent de $\Gamma(x)$ lorsque x tend vers 0).
- $\star\star$ CLASSIQUE : transformée de Fourier : $h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt$.
- $\star\star$ CLASSIQUE : transformée de Laplace : $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$.

1 Mes exemples de cours

Exercice 24.1.1$\star\heartsuit$ Transformée de Fourier. On pose $\psi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}e^{-ixt}dt$.

1. Donner D le domaine de définition de ψ. Montrer que ψ est continue sur D.
2. Montrer que ψ est C^1 sur D. Trouver l'expression de ψ' en fonction de ψ et en déduire l'expression de $\psi(x)$ en fonction de $\psi(0)$.

Exercice 24.1.2$\star\star\heartsuit$ Transformée de Laplace. On pose $\psi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt$.

1. Montrer que ψ existe sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que ψ est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$. Simplifier l'expression de ψ', en déduire l'expression de $\psi(x)$.

2 Théorème de continuité

Exercice 24.2.1$\star\star\heartsuit$

On pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

1. Donner le domaine de définition de Γ.
2. Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$. En déduire un équivalent de Γ en 0.

Exercice 24.2.2$\star$

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(t^2+1)(t^2+x^2)}dt$.

1. Justifier que f est continue sur $[0;+\infty[$.
2. Donner la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 24.2.3$\star$

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt$. Montrer que f est continue sur $]0;+\infty[$.

Exercice 24.2.4$\star$

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+xt}}dt$.

1. Justifier que $f(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Quelle est la limite de $f(x)$ en $+\infty$.

Exercice 24.2.5$\star\star$*Oral ENSAM*

On pose $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}dt$.

1. Montrer que f est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Simplifier $f(x+1) + f(x)$ pour tout $x > 0$.
3. Donner la limite de f en 0 et un équivalent.
4. Donner la limite de f en $+\infty$ et un équivalent *on utilisera la monotonie.*

3 Théorème de dérivabilité

Exercice 24.3.1⋆⋆♡
On pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

1. Montrer que Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 24.3.2⋆⋆ CCINP
Soit $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt$.

1. Vérifier que φ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Exprimer φ' et φ avec des fonctions usuelles.

Exercice 24.3.3⋆⋆ *Oral CCINP*
On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\cos(xt)dt$.

1. Justifier que $f(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. On donne $f(0) = \ln(2)$ donner la formule explicite de $f(x)$ en fonction de x.

Exercice 24.3.4⋆⋆*Oral Mines Telecom*
On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin(xt)}{t}dt$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et en déduire une forme simplifiée de f.

Exercice 24.3.5⋆⋆*Oral CCINP*
Soit $S = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que F et G sont C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner leurs dérivées.
2. Montrer que $G+F^2$ est une constante et la calculer.
3. Calculer les limites de G et de F lorsque x tend vers $+\infty$. Calculer S.

Exercice 24.3.6⋆
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $x^n f(x) \to 0$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
On pose $\psi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt$.
Montrer que ψ existe et est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24.3.7⋆⋆*Oral CCINP PSI*
On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est de classe C^0 sur $\mathbb{R}^+$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que f est de classe C^k sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Donner la limite de f en 0 puis en $+\infty$.

Exercice 24.3.8⋆⋆
On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}-1}{t}e^{-t}dt$.
Montrer que f existe et est C^1 sur $\mathbb{R}$. Simplifier f' puis f.

Exercice 24.3.9⋆⋆*Oral Mines Ponts PSI*
On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}t^x dt$.

1. Justifier que $f(x)$ existe pour tout $x \in]-1;+\infty[$.
2. Trouver la limite de $f(x)$ en $+\infty$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1;+\infty[$. En déduire la formule de $f(x)$ en fonction de x.

Exercice 24.3.10⋆⋆*Oral CCINP-Centrale PSI*
On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{arctan(tx)}{t(1+t^2)}dt$.

1. Justifier que $f(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Trouver a, b en fonction de x tels que $\dfrac{1}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} = \dfrac{a}{1+t^2} + \dfrac{b}{1+t^2x^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.
4. En déduire une formule simplifiée de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 24.3.11⋆⋆*Oral CCINP*
On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{sh(t)}{t}dt$.

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Etudier la dérivabilité de F sur D et calculer $F'(x)$ sur D.
3. Déterminer une expression de $F(x)$ sans le signe intégrale.

Exercice 24.3.12$\star\star\star$ *Oral Centrale*
Soit $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}dt$. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt=\frac{\pi}{2}$.

1. Justifier que $f(x)$ existe pour tout $x\in\mathbb{R}$. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x>0$, $f'(x)=\displaystyle\frac{2}{x}\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt$.
3. Montrer alors que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $f''(x)=-\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt$ pour tout $x>0$.
4. Montrer que $f''(x)-f(x)=-\dfrac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donner alors la formule de $f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$.

Exercice 24.3.13$\star\star$*Oral CCINP*
Soit $f:x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}dt$.

1. Justifier l'existence de f sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. En déduire l'expression de f sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$.

Exercice 24.3.14$\star\star$*Oral CCINP*
On pose $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(tx)e^{-t^2}dt$. On donne $f(0)=\sqrt{\pi}/2$.
Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. A l'aide d'une équation différentielle, donner l'expression simplifiée de f.

Exercice 24.3.15$\star\star$
On pose $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{itx}e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}/2$.

1. Justifier que $f(x)$ existe pour tout $x\in\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. Donner une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f et en déduire la formule de $f(x)$ en fonction de x.
4. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2(1+x^2)^{1/4}}\cos\left(\frac{\arctan(x)}{2}\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 24.3.16$\star\star\star$*Oral Mines Ponts*
On pose $f(x)=\displaystyle\int_0^1\cos\left(\frac{t\pi}{x+t}\right)dt$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Donner $f(0)$ puis la limite de f en $+\infty$.
3. Poser $u=x+t$ puis $v=\dfrac{x\pi}{u}$ et montrer que f est dérivable en 0.

Exercice 24.3.17$\star\star\star$*Oral Centrale*
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^x\sqrt{t}(1+t)}$ si il y a convergence.

1. Donner le domaine de définition de f, noté D_f.
2. Montrer que f est paire.
3. On admet que f est C^2 et se dérive sous le signe intégral sur D_f. Montrer que : $\forall x\in D_f$, $f(x)\geqslant\pi$.
4. Montrer que : $\forall x\in D_f\cap\mathbb{R}^+$, $\left|\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{t^x\sqrt{t}(1+t)}-\frac{1}{\frac{1}{2}-x}\right|\leqslant 1$.
5. En déduire que $f(x)\sim\dfrac{1}{\frac{1}{2}-x}$ lorsque x tend vers $(1/2)^-$

25. Séries entières

I - Rayon de convergence

Définition
On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum\limits_{n\geqslant 0}[z\mapsto a_nz^n]$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels ou complexes. Une telle série est notée abusivement $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nz^n$.

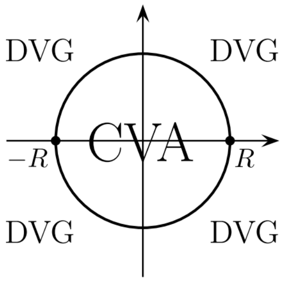
Lemme d'Abel Soit $z_0\in\mathbb{C}$.
Si $(a_nz_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors pour tout $z\in\mathbb{C}$ vérifiant $|z|<|z_0|$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nz^n$ converge absolument.

Définition Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nz^n$ une série entière.

- On appelle rayon de convergence le nombre

  $\boxed{R=\sup\left\{\rho\in\mathbb{R}_+ \mid \left(a_n\rho^n\right)_{n\geqslant 0} \text{ est bornée }\right\}}$

  On peut avoir $R=+\infty$.
- On appelle disque ouvert de convergence l'ensemble $\boxed{D=\{z\in\mathbb{C}; |z|<R\}}$
- On appelle intervalle ouvert de convergence l'ensemble $\boxed{]-R;R[}$



Théorème Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence R.

- Si $|z|<R$ alors la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nz^n$ converge absolument.
- Si $|z|>R$ alors la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nz^n$ diverge grossièrement.
- Si $|z|=R$, alors on ne peut rien dire.

II - Calcul et opérations sur le rayon de convergence

Propriété Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nz^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_nz^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b.

- Si $|a_n|\leqslant|b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_a\geqslant R_b$.
- Si $|a_n|=O(|b_n|)$ ou $|a_n|=o(|b_n|)$, alors $R_a\geqslant R_b$.
- Si $|a_n|\sim|b_n|$, alors $R_a=R_b$.

Méthode On peut parfois utiliser la règle de D'Alembert pour trouver le rayon de convergence :
Si $a_n\neq 0$ à partir d'un certain ranget si $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ tend vers ℓ alors $R=\dfrac{1}{\ell}$.

Propriété La série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^\alpha x^n$ est de rayon de convergence 1 pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$.

Propriété Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nz^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_nz^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

- (Addition) Le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}(a_n+b_n)z^n$ vérifie $R\geqslant\min(R_a,R_b)$.

  De plus, si $R_a\neq R_b$, alors $R=\min(R_a,R_b)$.
- (Produit de Cauchy) Le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}\right)z^n$ vérifie $R\geqslant\min(R_a,R_b)$.

III - Opérations analytiques

Dans tout ce paragraphe sauf la proposition, on considère une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ où la variable x est réelle.

Lemme Une série entière converge normalement sur tout segment de son intervalle ouvert de convergence $]-R;R[$.

Théorème de dérivation terme à terme

- Les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$ ont même rayon de convergence R.
- La fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est dérivable sur $]-R;R[$ et, pour tout $x \in]-R;R[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

Corollaire La fonction somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence.

Proposition (admise) La fonction somme d'une série entière d'une variable complexe est continue sur son disque ouvert de convergence.

Théorème de primitivation terme à terme

- Les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ont même rayon de convergence R.
- Soit $F :]-R;R[\to \mathbb{K}$ une fonction dérivable.
  Si, pour tout $x \in]-R;R[$, $F'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors, pour tout $x \in]-R;R[$, $F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

IV - Développements en série entière

Définition

On dit qu'une fonction $f :]-r;r[\to \mathbb{C}$ est développable en série entière (DSE) sur l'intervalle $]-r;r[$ s'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que, pour tout $x \in]-r;r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Propriété d'unicité

Si une fonction est développable en série entière, alors son développement en série entière est unique.
De plus, la série entière correspondante est $\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. On l'appelle la série de Taylor de f.

Développements usuels

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$: $\boxed{\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n}$ et $\boxed{\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n}$
- Pour tout $x \in]-1;1[$: $\boxed{\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}}$ et $\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}}$
- Pour tout $x \in]-1;1[$: $\boxed{\mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}}$
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$ et $\boxed{\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}$ et $\boxed{\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$
- Pour tout $x \in]-1;1[$: $\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) \right) x^n}$ (avec α réel quelconque)

Complement de cours chapitre 25 : Séries entières

1 Rayon de convergence

$\propto$ Démonstration de cours 1 : démonstration du lemme d'Abel et du théorème qui suit.

Remarques :
- la définition théorique du rayon peut s'utiliser : par exemple pour la série géométrique il est facile de voir que le rayon de convergence est 1 : la suite (ρ^n) est bornée ssi $\rho \in [0;1]$.
- Cependant on va voir que nous utiliserons beaucoup plus d'autres méthodes (D'Alembert notamment mais pas seulement).
- Cela serait une erreur de ne pas l'apprendre pour autant, aux concours elle est souvent demandée (la définition).

Méthode :
- Si $\sum a_n z_0^n$ converge alors $R \geqslant |z_0|$ et si $\sum a_n z_0^n$ diverge alors $R \leqslant |z_0|$.
- Si $(a_n z_0^n)$ bornée alors $R \geqslant |z_0|$ et si $(a_n z_0^n)$ non bornée alors $R \leqslant |z_0|$.

Exemples :
- Si (a_n) est bornée alors $R \geqslant 1$. Par exemple $\sum \cos(n) z^n$ est de rayon $R \geqslant 1$.
- Pour $\sum \frac{z^n}{n}$ on voit qu'en $z = 1$ on a divergence donc $R \leqslant 1$ et en $z = -1$ on a convergence (série alternée) donc $R \geqslant 1$.

2 Calcul du rayon de convergence. Opérations algébriques

$\propto$ Démonstration de cours 2 et 3 : comparaison et addition

Remarque : Attention il n'y a pas d'équivalence dans la règle de D'Alembert : ce n'est pas parce que le rayon est R que $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tend vers $\frac{1}{R}$. Il est fort possible que cette limite n'existe pas !

Exemple : prenons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_n = 1$ si n est impair et $a_n = 2^n$ sinon.

Il est assez facile de voir que le quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ n'a pas de limite : prendre la limite des sous suites $\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}$ et $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}$.
Cependant pour n pair on a $(a_n \rho^n) = ((2\rho)^n)$ qui est une suite bornée ssi $\rho \leqslant \frac{1}{2}$.
Et pour n impair on a $(a_n \rho^n) = (\rho^n)$ qui est une suite bornée ssi $\rho \leqslant 1$.
Donc le rayon de convergence est $1/2$.
Mieux on peut en faire le calcul explicite (on peut séparer ainsi car les deux séries convergent) : $\forall x \in]-1/2; 1/2[$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (4x^2)^n + x \sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = \frac{1}{1-4x^2} + \frac{x}{1-x^2}$$

3 Opérations analytiques et Développement en série entière

$\propto$ Démonstration de cours 4 : théorèmes de dérivation et d'intégration terme à terme.

Remarque : une application de l'unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière est que si $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est une fonction paire alors $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (si elle est impaire on a $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

$\boxed{\text{Remarque}}$: si $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est une série entière de rayon $R>0$ alors par application successive du théorème de dérivation terme à terme on a f qui est C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence $]-R;R[$ et

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \forall x\in]-R;R[\qquad f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{(n-k)!}a_n x^{n-k}$$

Ainsi $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}=a_k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Remarque (suite)}}$: inversement on pourrait penser que toutes les fonctions f qui sont C^∞ sur un intervalle du type $]-a;a[$ sont développable en série entière et que

$$\forall x\in]-a;a[\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

C'est FAUX ! Par exemple arctan est C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais n'est développable en série entière que sur $]-1;1[$.
Autre exemple : la fonction $f: x\mapsto e^{-1/x^2}$ prolongée par continuité en 0 est de classe C^∞ avec $f^{(n)}(0)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ (bon exercice d'utilisation du théorème de prolongement de classe C^∞). f n'est pas développable en série entière (sinon f serait la fonction nulle sur $]-r;r[$ ce qui n'est pas le cas).

$\boxed{\text{Remarque}}$ La formule de Taylor avec reste intégral permet, sur certains exercices plus difficiles, de montrer qu'une fonction est développable en série entière. On doit montrer que le reste integral tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ dans la formule

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x\frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!}dt$$

Compétences

- ⋆ Connaître les DSE usuels (avec les rayons !)
- ⋆ Savoir trouver le rayon de convergence avec d'Alembert. (ne pas oublier d'écrire : soit $x\neq 0$)
- ♠ Ecrire des équivalences ou des inégalités strictes dans la rédaction précédente. Notamment écrire : .... donc $R>1$ puis .... donc $R<1$ .... et donc au final $R=1$.
- ⋆⋆ Savoir que si $|a_n|\leqslant|b_n|$ pour tout n alors $R_a\geqslant R_b$.
- ⋆ Savoir que si $|a_n|\sim|b_n|$ pour tout n alors $R_a=R_b$.
- ⋆ Savoir faire une somme de deux séries entières et savoir que le rayon vérifie $R\geqslant min(R_a,R_b)$ avec égalité si $R_a\neq R_b$.
- ⋆ Savoir rédiger qu'une série entière est C^∞ et se dérive terme à terme sur son INTERVALLE OUVERT DE CONVERGENCE.
- ⋆ Ne pas oublier de décaler les indices lorsque l'on dérive ($f'(x)=\sum_{n=\underline{\underline{1}}}^{+\infty}na_nx^{n-1}$ par exemple).
- ⋆ Savoir que f et f' ont même rayon de convergence.
- ⋆⋆ Savoir qu'une série entière se primitive terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence (et ne pas oublier la constante)
- ⋆⋆ Connaître la formule de la série de Taylor.
- ⋆ Savoir rédiger que l'on a unicité des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif.
- ⋆⋆ Savoir faire un produit de Cauchy de deux séries entières et savoir que le rayon vérifie $R\geqslant min(R_a,R_b)$.
- ⋆⋆ Savoir DSE la fonction $x\mapsto\sqrt{1+x}$ par exemple
- ⋆⋆ Savoir DSE la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{3+x^2}$ par exemple
- ♠♠ S'arranger avec les DSE en sortant les n de la somme pour que cela devienne un DSE usuel.
- ♠ Parler de série entière et utiliser ces méthodes alors qu'il y a autre chose que des puissances de x (par exemple $\sum n^2(ln(x)/x)^n$)

Chapitre 25 : Séries entières

1 Rayon de convergence

Exercice ($\star$ sauf 25.1.16 $\star\star$) Trouver le rayon de convergence des séries entières suivantes

Exercice 25.1.1 $\sum_{n\geqslant 0} e^{-n^2} z^n$.

Exercice 25.1.2 $\sum_{n\geqslant 0} e^{\sqrt{n}} z^n$.

Exercice 25.1.3 $\sum_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n} z^n$

Exercice 25.1.4 $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\binom{2n}{n}}{n4^n} z^n$.

Exercice 25.1.5 $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{n^n} z^n$.

Exercice 25.1.6 $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n} z^n$.

Exercice 25.1.7 $\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^n}{n^2} z^{2n}$.

Exercice 25.1.8 $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 25.1.9 $\sum_{n\geqslant 0} \sin(1/n) z^n$.

Exercice 25.1.10 $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\ln(n)}{n} z^n$.

Exercice 25.1.11 $\sum_{n\geqslant 0} \arctan(n) z^n$.

Exercice 25.1.12 $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)^n}{n^n} z^n$.

Exercice 25.1.13 $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2} z^n$.

Exercice 25.1.14 $\sum_{n\geqslant 0} n! z^{n^2}$.

Exercice 25.1.15 $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^n}{2^{n^2}} z^n$.

Exercice 25.1.16$\star$
Trouver le rayon de convergence de la série entière suivante $\sum_{n\geqslant 0} \left(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}\right) z^n$.

Exercice 25.1.17$\star$
En encadrant $n!$ donner le rayon de convergence de $\sum \ln(n!) z^n$.

Exercice 25.1.18$\star\star$
Soit $\sum a_n$ une série réelle convergente. Montrer que $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence infini.

Exercice 25.1.18$\star\star$
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^{+*}$.
Trouver le rayon de convergence de $\sum a_n^2 x^n$ puis celui de $\sum a_n x^{2n}$.

Exercice 25.1.19$\star$Centrale (extrait)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée.

1. Montrer que $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence $+\infty$. On note $f(x)$ sa somme.
2. Montrer que $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $\geqslant 1$. On note $S(x)$ sa somme.
3. Trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
   (a) $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence égal à 2.
   (b) $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence égal à 1 et $\sum a_n$ diverge. Faites pareil avec $\sum a_n$ converge.

2 Somme d'une série entière

Séries entières de référence

Exercice 25.2.1$\star$
Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum_{n\geqslant 0} e^{-n} x^{2n}$.

Exercice 25.2.2$\star$*Oral CCINP*
Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{ch}(n) x^{3n+1}$.

Exercice 25.2.3$\star$
Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n^2+n+1)}{n!} x^n$.

Exercice 25.2.4$\star$*Oral Mines Telecom*
Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) x^n$.

Exercice 25.2.5$\star\star$
Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum_{n\geqslant 0} 2^{n(-1)^n} x^n$.

Exercice 25.2.6$\star$
Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{(2n)!}$.

Exercice 25.2.7$\star\star$ Centrale
Soit $T\in\mathbb{N}^*$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle T-périodique à partir d'un certaine rang c'est-à-dire qu'il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n\geqslant m,\ a_{n+T}=a_n$.

1. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En déduire R le rayon de convergence de $\sum a_nx^n$.
2. Montrer qu'il existe $P,Q\in\mathbb{R}[X]$ tels que : $\forall x\in]-R;R[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Produit de Cauchy

Exercice 25.2.8$\star$
Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-3)^n\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)x^n$.

Exercice 25.2.9$\star$
Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)x^n$.

Exercice 25.2.9.bis$\star$
Simplifier de deux manières $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ vérifiant $|x|<1$.

Exercice 25.2.9.ter$\star$
On pose $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. On admet que $a_n\sim\ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Donner le lien entre a_n et a_{n-1}.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n=\frac{\ln(1-x)}{x-1}$ pour tout $x\in]-1;1[$.

Exercice 25.2.10$\star\star\star$*Oral Mines Ponts*
On pose $a_0=1$ et $a_{n+1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
A l'aide d'une série entière, donner une expression explicite de a_n.

Utilisation de la régularité

Exercice 25.2.11$\star$
Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}n(-1)^nx^n$.

Exercice 25.2.12$\star\heartsuit$
Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}n^2x^n$.

Exercice 25.2.13$\star$
On suppose inconnu le développement en série entière de la fonction ch. On pose $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Simplifier $f'+f$ puis en déduire que $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Exercice 25.2.14$\star$
Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{2^nx^{2n+2}}{(n+1)!}$.

Exercice 25.2.15$\star\star\heartsuit$
Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Exercice 25.2.16$\star\star$
Exprimer, pour $x\in]0;1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}$ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 25.2.17⋆⋆⋆CCINP

On cherche à calculer $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n(3n+2)}$.

1. Déterminer les réels a, b, c tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\dfrac{x}{x^3-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$.
2. Déterminer les primitives de $x \mapsto \dfrac{x}{x^3-1}$.
3. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$.
4. En déduire la valeur de S.

Exercice 25.2.18⋆⋆

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{4n+2}$. Justifier que f existe et est continue sur $[-1;1]$.
Donner une expression simplifiée de f sur $[-1;1]$.

Formule de récurrence sur les coefficients

Exercice 25.2.19⋆⋆

On considère la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner la formule explicite de u_n en fonction de n.
2. Donner le rayon et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$.
3. Reprendre la question 2 sans utiliser la formule trouvée en question 1

Exercice 25.2.20⋆⋆

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \leqslant 1$.

On s'intéresse au rayon de convergence R' de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} S_n z^n$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En utilisant le lien entre S_{n+1} et S_n trouver une relation entre R et R'.

Exercice 25.2.21⋆⋆

On considère la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $|u_n| \leqslant 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Donner la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ sur son intervalle ouvert de convergence.

Exercice 25.2.22⋆⋆*CCINP*

On pose $a_0 = -4$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ et $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ et on note R le rayon de convergence de cette série entière.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant 2^{n+2}$.
2. Qu'en déduire sur S ?
3. On pose $\rho = min(1, R)$. Montrer que : $\forall x \in]-\rho; \rho[$, $S(x) = \dfrac{-4+6x+6x^2}{(x-1)^2(x+1)}$.
4. On donne la décomposition : $\forall \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, $\dfrac{-4+6x+6x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{7}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{4}{(x-1)^2}$.
   Donner la valeur de a_n en fonction de n.

Exercice 25.2.23⋆⋆*Oral CCINP*

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ et $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ pour tout $n \geqslant 2$.

1. Exprimer a_n en fonction de n.
2. On propose une autre méthode.
   (a) Montrer que $|a_n| \leqslant 4^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire une inégalité sur le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{2x^2-3x+1}$.
   (c) En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

3 Développement en série entière

Exercice 25.3.1$\star$
Donner le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{x}{x+4}$.

Exercice 25.3.2$\star$
Donner le développement en série entière de $x \mapsto \ln(x+4)$.

Exercice 25.3.3$\star$
Donner le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

Exercice 25.3.4$\star$
Donner le DSE de $x \mapsto \dfrac{1}{(1-2x)(1-3x)}$.

Exercice 25.3.5$\star$
Donner le DSE de $x \mapsto (1+x)\ln(1+x)$.

Exercice 25.3.6$\star\star$
Donner le DSE de $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^2}dt$.

Exercice 25.3.7$\star$CCINP
Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)(2-x)}$.

1. f est-elle DSE au voisinage de 0. Si oui donner son DSE et son domaine de validité.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner la valeur de $f^{(n)}(0)$ par deux méthodes différentes.

Exercice 25.3.8$\star\star$
Soit $\theta \in]0;\pi[$. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-2x\cos(\theta)+x^2}$.

Exercice 25.3.9$\star$
Donner le développement en série entière de $x \mapsto \cos^2(x)$.

Exercice 25.3.10$\star$
Donner le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Exercice 25.3.11$\star\star\star$
Donner le développement en série entière de $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(tx)dt$.

On montrera que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2k+1}e^{-t^2}dt = \frac{k!}{2}$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.
Remarque : une autre idée consiste à trouver une équation différentielle vérifiée par f.

Exercice 25.3.12$\star\star\star$

1. Donner le développement en série entière de $f : x \mapsto e^{x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$ en trouvant une équation différentielle vérifiée par f.
2. Donner le développement en série entière de $x \mapsto e^{x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$ à l'aide d'un produit de Cauchy. Qu'en conclure ?

Exercice 25.3.13$\star\star$ *CCINP*

1. Montrer que $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$ pour x à préciser.
2. Donner le DSE de arctan sur $]-1;1[$.
3. Montrer que $\dfrac{\pi}{8} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1}$.

Exercice 25.3.14$\star\star\star$ *Oral Centrale*
On pose $F(0)=0$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer que F existe sur $\mathbb{R}$. Montrer que F est développable en série entière et donner son développement.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $Re\left(\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-xe^{-it}}dt\right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)\times(2k+1)!}$.
3. Déterminer la limite de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-xe^{-it}}dt$ lorsque x tend vers $+\infty$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$.

Exercice 25.3.15$\star\star$ *Oral CCINP*
Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a|<1$. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sin(a^n x)$.

1. Montrer que f est définie et est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{1-|a|}$.
3. Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

4 Equation différentielle

Exercice 25.4.1⋆⋆
Trouver toutes les solutions développables en série entière de l'équation différentielle : $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.
On exprimera ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 25.4.2⋆⋆
Trouver toutes les solutions développables en série entière de l'équation différentielle : $x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=1$.
On exprimera ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 25.4.3⋆⋆
Trouver toutes les solutions développables en série entière de l'équation différentielle : $y''+xy'+y=1$ avec $y(0)=y'(0)=0$.
On exprimera ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 25.4.4⋆⋆CCINP
Soit (E) : $x^2(1-x)y''-x(x+1)y'+y=0$. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon $r>0$.

1. Montrer que $x^2(1-x)f''(x)-x(x+1)f'(x)+f(x)=a_0+\sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n-a_{n-1})x^n$ pour tout $x\in]-r;r[$ où $(b_n)_{n\geqslant 2}$ est à déterminer.
2. En déduire, si f est solution de (E), la valeur de a_0 et une relation de récurrence sur a_n.
3. En déduire une solution de (E) sous une forme traditionnelle.

Exercice 25.4.5⋆⋆*Oral CCINP*

1. Recherche une solution développable en série entière vérifiant $y(0)=1$ de l'équation $2xy''+y'-y=0$
2. Préciser le rayon de convergence de la solution trouvée et exprimer cette solution à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 25.4.6⋆⋆
Trouver toutes les solutions développables en série entière de l'équation différentielle : $xy''+2y'+xy=0$.
on ne cherchera pas à exprimer la série entière trouvée à l'aide de fonctions usuelles

Exercice 25.4.7⋆⋆*Oral CCP*
Trouver la solution g développable en série entière sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle : $2xy'+y=3x\cos(x^{3/2})$.
Résoudre $2xy'+y=3x\cos(x^{3/2})$ sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire une simplification de g.

Exercice 25.4.8⋆⋆
Trouver toutes les solutions développables en série entière de l'équation différentielle : $2x(1-x)y'+(1-x)y=1$.
on ne cherchera pas à exprimer la série entière trouvée à l'aide de fonctions usuelles

Exercice 25.4.9⋆⋆*Oral CCINP*
On considère la fonction f définie par $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n$ avec x réel.

1. Donner le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Montrer que $(1-4x)f'(x)=2f(x)$ sur $]-R;R[$.
3. En déduire la formule de $f(x)$ en fonction de x pour tout $x\in]-R;R[$.

Exercice 25.4.10⋆⋆*Ecrit CCP*
Trouver la solution développable en série entière (en précisant son rayon de convergence) de : $x^2y''+xy'+x^2y=0$ et $y(0)=1$.
on ne cherchera pas à exprimer la série entière trouvée à l'aide de fonctions usuelles

Exercice 25.4.11⋆⋆CCINP
Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+p}{p}x^n$.

1. Donner le rayon de convergence de f.
2. Montrer que f solution de $(1-x)y'(x)=(p+1)y(x)$ sur son intervalle ouvert de convergence.
3. Donner l'expression explicite de f.

Exercice 25.4.12$\star\star\star$

Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = \displaystyle\int_0^x (t-2x)f(t)dt - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 25.4.13$\star\star\star$*Oral Centrale PSI*

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1;1[$ on pose $\theta_n(x) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(1 - x^{(2^k)}\right)$.

1. Etablir la convergence sur $]-1;1[$ de la suite (θ_n) vers une fonction θ ; montrer que θ est continue sur $]-1;1[$, vérifie $\theta(x) = (1-x)\theta(x^2)$ pour tout $x \in]-1;1[$ et ne s'annule pas sur $]-1;1[$.
2. Trouver toutes les fonctions f continues de $]-1;1[$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient : $\forall x \in]-1;1[$, $f(x) = (1-x)f(x^2)$.
3. On admet que θ est développable en série entière sur $]-1;1[$: $\theta(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. Donner a_0 et montrer que $a_{2n} = a_n$ et $a_{2n+1} = -a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5 Autres

Exercice 25.5.1$\star$

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est prolongeable en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 25.5.2$\star$

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ est prolongeable en une fonction C^∞ sur $]-1;+\infty[$.

Exercice 25.5.3$\star$

Montrer que la fonction f, définie par $f(x) = ch\sqrt{x}$ si $x \geqslant 0$ et $f(x) = \cos(\sqrt{-x})$ si $x < 0$, est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 25.5.4$\star$

Montrer que pour tout $x \in [0;1[$ on a $\ln(1-x) \leqslant -x$ à l'aide d'une série entière.

Exercice 25.5.5$\star\star$*Th de Liouville*

Soit $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $+\infty$.

1. Soit $r \in \mathbb{R}^+$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt = 2\pi a_n r^n$.
2. En déduire que si il existe $A, B, C \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $|f(z)| \leqslant A + B|z|^C$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ alors f est un polynôme.

Exercice 25.5.6$\star\star$

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)dt$ converge et est égale à $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.

Exercice 25.5.7$\star\star$

Montrer que $\dfrac{1}{(1-z)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < 1$.

1) Par un produit de Cauchy 2) en posant $f(t) = \dfrac{1}{1-tz}$

Exercice 25.5.8$\star\star$

Soit $z \in \mathbb{C}$. En utilisant $f : t \mapsto e^{tz}$ définie sur $[0;1]$ et la formule de Taylor avec reste intégral montrer que $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

on ne pourra pas utiliser la série exponentielle vu que c'est l'objectif de l'exercice...

26. Dérivation d'une fonction vectorielle

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle réel et n est un entier naturel non nul.

On considère ici des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$: $\quad f : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto (f_1(t); f_2(t); \ldots; f_n(t)) \end{cases}$

Définition

- On dit que f est dérivable en un réel t_0 de I si $\dfrac{1}{t-t_0}\left(f(t) - f(t_0)\right)$ admet une limite lorsque t tend vers t_0.
  Auquel cas, on pose : $f'(t_0) = \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \dfrac{1}{t-t_0}\left(f(t) - f(t_0)\right)$. Le vecteur $f'(t_0)$ se nomme le vecteur vitesse en cinématique.
- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.

Propriété Soient $t_0 \in I$ et $b \in \mathbb{R}^n$ alors f est dérivable en t_0 et $f'(t_0) = b$ ssi

$$f(t) = f(t_0) + b(t-t_0) + (t-t_0)\varepsilon(t) \quad avec \quad \varepsilon(t) \to 0 \quad si\ t \to t_0$$

On note $(t-t_0)\varepsilon(t) = o(t-t_0)$.

Propriété Soit $t_0 \in I$ et soit $f = (f_1; f_2; \ldots; f_n)$ une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
La fonction f est dérivable en t_0 si et seulement si les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont dérivables en t_0, auquel cas :

$$f'(t_0) = \left(f_1'(t_0); f_2'(t_0); \ldots; f_n'(t_0)\right)$$

Propriété

- Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$, soit $g : I \to \mathbb{R}^n$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  Si f et g sont dérivables sur I, alors $\lambda f + \mu g$ est aussi dérivable sur I et :
  $$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$$
- Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ et soit $\varphi : J \to I$ avec J un intervalle réel.
  Si f est dérivable sur I et si φ est dérivable sur J, alors $f \circ \varphi$ est aussi dérivable sur J et :
  $$\forall t \in J, (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \cdot f'(\varphi(t))$$
- Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ et soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire.
  Si f est dérivable sur I, alors $L \circ f$ est aussi dérivable sur I et :
  $$(L \circ f)' = L \circ f'$$
- Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$, soit $g : I \to \mathbb{R}^p$ et soit $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une application bilinéaire.
  Si f et g sont dérivables sur I, alors $B(f,g)$ est aussi dérivable sur I et :
  $$(B(f,g))' = B(f', g) + B(f, g')$$
- Soient, pour tout $k \in \{1,..,p\}$, f_k une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}^{n_k}$, soit $M : \mathbb{R}^{n_1} \times ... \times \mathbb{R}^{n_p} \to \mathbb{R}^q$ une application p-linéaire. Alors $M(f_1, ..., f_p)$ est aussi dérivable sur I et :
  $$(M(f_1,...,f_p))' = M(f_1', f_2, ..., f_p) + M(f_1, f_2', ..., f_p) + ... + M(f_1, f_2, ..., f_p')$$

Corollaire

- Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$, soit $g : I \to \mathbb{R}^2$ et soit $(\cdot \mid \cdot)$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
  Si f et g sont dérivables sur I, alors la fonction $(f \mid g) : t \mapsto (f(t) \mid g(t))$ est aussi dérivable sur I et :
  $$\forall t \in I, \quad (f \mid g)'(t) = (f'(t) \mid g(t)) + (f(t) \mid g'(t))$$
- Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$, soit $g : I \to \mathbb{R}^2$ et soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^2$.
  Si f et g sont dérivables sur I, alors la fonction $\det_{\mathcal{B}}(f,g) : t \mapsto \det_{\mathcal{B}}(f(t), g(t))$ est aussi dérivable sur I et :
  $$\forall t \in I, \left(\det_{\mathcal{B}}(f,g)\right)'(t) = \det_{\mathcal{B}}\left(f'(t), g(t)\right) + \det_{\mathcal{B}}\left(f(t), g'(t)\right)$$
  cela se généralise au determinant de p fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^p$

Courbes paramétrées

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

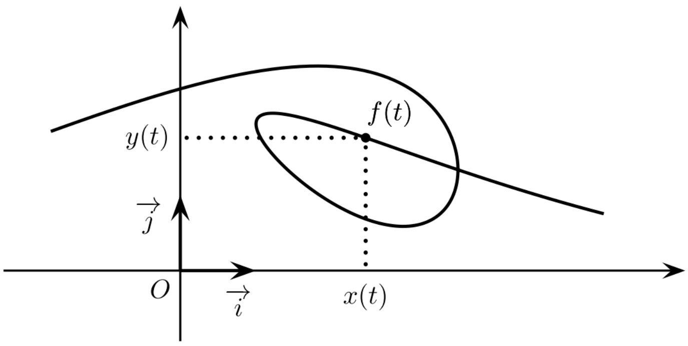
Définition Soit I un intervalle réel et soit $k \in \mathbb{N}^*$.

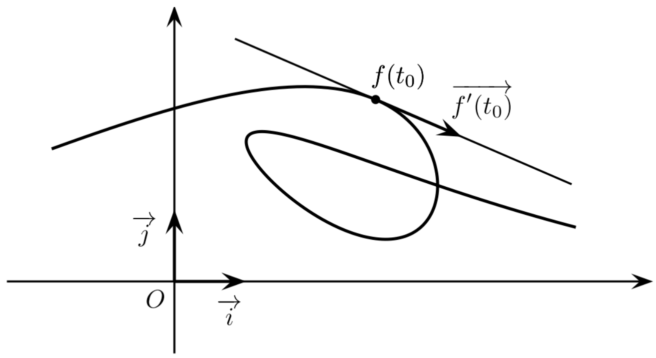
On appelle courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ (ou arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$) toute application $f : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (x(t); y(t)) \end{cases}$ qui est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

On appelle trajectoire (ou support) de f l'ensemble des points $(x(t); y(t))$ lorsque t parcourt I.

Si $t_0 \in I$, le point $f(t_0)$ est dit régulier si le vecteur $\overrightarrow{f'(t_0)}$ est non nul.

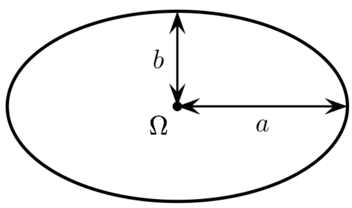
La tangente à la courbe f en le point $f(t_0)$ est la droite passant par le point $f(t_0)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{f'(t_0)}$.

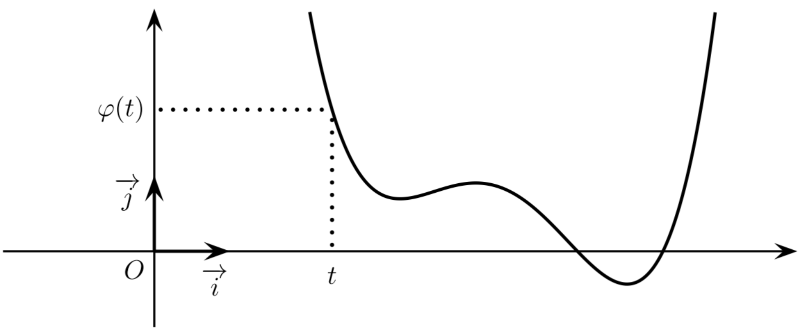




Exemples

- Le cercle trigonométrique est paramétré par $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$ avec $t \in [0; 2\pi]$.
- Le cercle de centre $\Omega = (x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon $R > 0$ est paramétré par $\begin{cases} x(t) = x_\Omega + R\cos(t) \\ y(t) = y_\Omega + R\sin(t) \end{cases}$ avec $t \in [0; 2\pi]$.
- Soit $\mathcal{C}$ l'ellipse de centre $\Omega = (x_\Omega; y_\Omega)$, de demi-grand axe a, de demi-petit axe b et d'axe focal $(\Omega, \overrightarrow{i})$. L'ellipse $\mathcal{C}$ est paramétrée par $\begin{cases} x(t) = x_\Omega + a\cos(t) \\ y(t) = y_\Omega + b\sin(t) \end{cases}$ avec $t \in [0; 2\pi]$.
- Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A = (x_A; y_A)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (\alpha; \beta)$. La droite $\mathcal{D}$ est paramétrée par $\begin{cases} x(t) = x_A + \alpha t \\ y(t) = y_A + \beta t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- La courbe représentative d'une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est paramétrée par $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \varphi(t) \end{cases}$ avec $t \in I$.





Compétences

- ⋆ Savoir que la dérivation d'un vecteur en dimension finie se visualise coordonnée par coordonnée.
- ⋆ Savoir dériver une somme et une composée sur une fonction de la forme $t \mapsto (f_1(t), ..., f_n(t))$.
- ⋆⋆ Savoir les propriétés avec les applications linéaires ou multilinéaires.
- ⋆⋆ Notamment pour le produit scalaire de deux vecteurs qui sont des fonctions et le déterminant de plusieurs vecteurs qui sont des fonctions.
- ⋆⋆ Savoir faire un DL à coefficients vectoriels.

Complement de cours et exercices chapitre 26

$\boxed{\text{Démo cours 1}}$ Formule $(L\circ f)' = L\circ f'$

$\boxed{\text{Remarque}}$: toutes les définitions et propriétés du polycopié se généralisent pour les dérivées d'ordre $k\in\mathbb{N}^*$.
Par exemple on peut montrer que la formule de Leibniz se généralise pour B une forme bilinéaire :

$$(B(f,g))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B(f^{(k)}, g^{(n-k)})$$

$\boxed{\text{Exemple}}$: calculer la dérivée n-ième sur $\mathbb{R}$ de $f : x\mapsto x^2e^{2x}$.

$\boxed{\text{Exemple}}$: (sans lien mais pour réviser les dérivées nièmes). Calculer la dérivée n-ième sur $\mathbb{R}$ de $arctan$ et pour $n\geqslant 2$ déterminer les solutions de $arctan^{(n)}(x) = 0$.

Exercice 26.1$\star$
Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ une fonction dérivable vérifiant $f(t)\neq 0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Donner la dérivée de $t\mapsto \|f(t)\|$.

Exercice 26.2$\star$ En identifiant $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{np}$ on définit la dérivée d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Donner la dérivée de $f : t\mapsto \begin{pmatrix} e^t & \cos(t)\\ t & t^2\end{pmatrix}$. Calculer la dérivée de $t\mapsto tr(f(t))$ de deux manières.
2. Soit $t\mapsto A(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $X : t\mapsto X(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Donner la dérivée de $t\mapsto A(t)X(t)$. Que se passe-t-il si A est une fonction constante ?

Exercice 26.3$\star$
Trouver $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ tels que $f(a)=f(b)$ et $f'(c)\neq 0$ pour tout $c\in]a,b[$.

Exercice 26.4$\star$ Soit $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ soit $f : t\mapsto det(I_2+tA)$. Calculer $f'(0)$ de deux manières.

Exercice 26.5$\star\star$
Soient f_1, f_2 solutions de l'équation différentielle $y'' = ay' + by$ (avec $a,b\in\mathbb{R}$ fixés). Donner une équation différentielle vérifiée par le Wronskien $t\mapsto W(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t)\\ f_1'(t) & f_2'(t)\end{vmatrix}$.

Exercice 26.6$\star\star$CCINP On pose $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0\\ x^2/2 & x & 1 & \ddots & \vdots\\ x^3/3! & x^2/2 & x & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ x^n/n! & \dots & \dots & x^2/2 & x\end{vmatrix}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$.
En utilisant la dérivée de D_n, trouver la formule explicite de $D_n(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 26.7$\star\star$Mines Ponts
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Soit $X:\mathbb{R}\to\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dérivable vérifiant $X'(t) = AX(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.
Montrer que $t\mapsto X(t)$ est de norme constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 26.8$\star\star$ *Mines PSI 2023 écrit*
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D\in D_n(\mathbb{R})$. Si $f(t) = det(A+tAD)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, donner le $DL_1(0)$ de f.

Exercice 26.9$\star\star$ *Mines PSI 2023 écrit*
Soit $A, M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A+tM\in GL_n(\mathbb{R})$ pour tout $t\in[-1;1]$. Si $\phi(t) = (A+tM)^{-1}$ pour tout $t\in[-1;1]$.
On admet que ϕ est C^1 sur $[-1;1]$. Donner le $DL_1(0)$ de ϕ. *On utilisera* $\phi(t)(A+tM)$.

Exercice 26.10$\star\star$ *Mines Telecom*
Soit $M : t\in\mathbb{R}\mapsto M(t)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 vérifiant : $\forall t\in\mathbb{R}$, $M^2(t) = M(0) = I_n$.

1. Montrer que $M(t)$ est diagonalisable pour tout $t\in\mathbb{R}$ puis que
   $M(t)M'(t) = -M'(t)M(t)$ et $M'(t) = -M(t)M'(t)M(t)$ $\forall t\in\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f : t\in\mathbb{R}\mapsto tr(M(t))$ est constante sur $\mathbb{R}$ et déterminer $M(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

Exercice 26.11$\star\star$ *Centrale*
Soit $M : t\in\mathbb{R}\mapsto M(t)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe C^1. Soit $A : t\in\mathbb{R}\mapsto A(t)\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ continue.

1. Justifier que $t\mapsto M(t)^TM(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.
2. On suppose que $M(0)\in O_n(\mathbb{R})$ et $M'(t) = A(t)M(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Montrer que $M(t)\in O_n(\mathbb{R})$ $\forall t\in\mathbb{R}$.

27. Équations différentielles linéaires

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle réel et $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Équations différentielles linéaires du premier ordre

Dans tout ce paragraphe, a et b sont des fonctions continues définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On considère les équations différentielles, d'inconnue y une fonction de la variable t qui appartient à $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$,

$$\left\{\begin{array}{l}(E) : y' + a(t)y = b(t) \\ (E_0) : y' + a(t)y = 0\end{array}\right.$$

Vocabulaire L'équation (E_0) est appelée l'équation homogène associée à (E).

Théorème Soit A une primitive de a sur I.
Les solutions de (E_0) sur I sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ pour toute constante $\lambda \in \mathbb{K}$.

Théorème
La solution générale de (E) est la somme de la solution générale de (E_0) et d'une solution particulière de (E).

Méthode de variation de la constante
Si (E) n'a pas de solution particulière évidente, on peut rechercher une solution particulière sous la forme :

$$t \mapsto \lambda(t) e^{-A(t)}$$

avec $\lambda : I \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable à déterminer.

Solution particulière évidente
On suppose ici que la fonction a est constante et que le second membre est de la forme $t \mapsto \beta e^{kt}$ avec β et k dans $\mathbb{K}$.
Ainsi l'équation (E) s'écrit : $y' + ay = \beta e^{kt}$

- Si le second membre $t \mapsto \beta e^{kt}$ n'est pas solution de l'équation homogène (E_0) (c'est-à-dire si $k \neq -a$), alors on peut rechercher une solution particulière de (E) sous la forme $\boxed{t \mapsto \gamma e^{kt}}$ avec γ dans $\mathbb{K}$.
- Si le second membre $t \mapsto \beta e^{kt}$ est solution de l'équation homogène (E_0) (c'est-à-dire si $k = -a$), alors on peut rechercher une solution particulière de (E) sous la forme $\boxed{t \mapsto \gamma t e^{kt}}$ avec γ dans $\mathbb{K}$.

Principe de superposition
Supposons que le second membre b se décompose sous la forme $b_1 + b_2$ avec b_1 et b_2 des fonctions continues sur I.
Si y_1 est une solution particulière de l'équation $(E_1) : y' + a(t)y = b_1(t)$
et si y_2 est une solution particulière de l'équation $(E_2) : y' + a(t)y = b_2(t)$,
alors $y_1 + y_2$ est une solution particulière de l'équation $(E) : y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t)$.

Vocabulaire Soit $t_0 \in I$ et soit $y_0 \in \mathbb{K}$.
La recherche d'une solution y de (E) satisfaisant la condition initiale $y(t_0) = y_0$ s'appelle un problème de Cauchy.

Théorème de Cauchy linéaire (version 1) Soit $t_0 \in I$ et soit $y_0 \in \mathbb{K}$. Soient $a, b \in C^0(I, \mathbb{K})$.

Il existe une unique solution au problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l}y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0\end{array}\right.$

II - Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Dans tout ce paragraphe, a et b sont des constantes, tandis que $c : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue.
On considère les équations différentielles, d'inconnue y une fonction de la variable t qui appartient à $\mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$, :

$$\begin{cases} (E) : y'' + ay' + by = c(t) \\ (E_0) : y'' + ay' + by = 0 \end{cases}$$

Théorème
On appelle équation caractéristique l'équation du second degré $(EC) : r^2 + ar + b = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.
Soit Δ son discriminant.

- Le cas complexe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)
  - Si $\Delta \neq 0$ alors soit r_1 et r_2 les solutions distinctes de (EC).
    Les solutions de (E_0) sont les fonctions $\boxed{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}}$ pour toutes constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
  - Si $\Delta = 0$ alors soit r_0 l'unique solution de (EC).
    Les solutions de (E_0) sont les fonctions $\boxed{t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_0 t}}$ pour toutes constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
- Le cas réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
  - Si $\Delta > 0$ alors soit r_1 et r_2 les solutions réelles distinctes de (EC).
    Les solutions de (E_0) sont les fonctions $\boxed{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}}$ pour toutes constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  - Si $\Delta = 0$ alors soit r_0 l'unique solution réelle de (EC).
    Les solutions de (E_0) sont les fonctions $\boxed{t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_0 t}}$ pour toutes constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  - Si $\Delta < 0$ alors soit $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ les solutions complexes conjuguées de (EC).
    Les solutions de (E_0) sont les fonctions $\boxed{t \mapsto (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t))e^{\alpha t}}$ pour toutes constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Théorème
La solution générale de (E) est la somme de la solution générale de (E_0) et d'une solution particulière de (E).

Solution particulière évidente
On suppose ici que le second membre est de la forme $t \mapsto \beta e^{kt}$ avec β et k dans $\mathbb{K}$. Ainsi l'équation (E) s'écrit :

$$y'' + ay' + by = \beta e^{kt}$$

- Si l'exponentielle du second membre $t \mapsto e^{kt}$ n'est pas solution de l'équation homogène (E_0), alors on peut rechercher une solution particulière de (E) sous la forme $\boxed{t \mapsto \gamma e^{kt}}$ avec γ dans $\mathbb{K}$.
- Si la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est solution de (E_0) et si la fonction $t \mapsto te^{kt}$ n'est pas solution de (E_0), alors on peut rechercher une solution particulière de (E) sous la forme $\boxed{t \mapsto \gamma t e^{kt}}$ avec γ dans $\mathbb{K}$.
- Si les fonctions $t \mapsto e^{kt}$ et $t \mapsto te^{kt}$ sont solutions de (E_0), alors on peut rechercher une solution particulière de (E) sous la forme $\boxed{t \mapsto \gamma t^2 e^{kt}}$ avec γ dans $\mathbb{K}$.

Méthode Si le second membre est de la forme $t \mapsto \beta \cos(\omega t)$ avec β et ω dans $\mathbb{R}$, pour rechercher une solution particulière de (E), on peut considérer une autre équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = \beta e^{i\omega t}$$

pour laquelle on sait déterminer une solution particulière. Il suffit ensuite de considérer la partie réelle.

Méthode le principe de superposition s'utilise aussi avec les équations différentielles linéaires d'ordre 2.

III - Équations différentielles linéaires du second ordre, cas général

Dans tout ce paragraphe, a, b et c sont des fonctions continues définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On considère les équations différentielles, d'inconnue y une fonction de la variable t qui appartient à $\mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$, :

$$\left\{ \begin{array}{l} (E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ (E_0) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \end{array} \right.$$

Théorème de Cauchy linéaire (version 2) Soit $t_0 \in I$, soit $y_0 \in \mathbb{K}$ et soit $y_0' \in \mathbb{K}$. Soient $a, b, c \in C^0(I, \mathbb{K})$.

Il existe une unique solution au problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{array} \right.$

Remarque L'équation (E) peut s'écrire sous la forme d'un système différentiel du premier ordre :

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad \text{avec} \quad X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

Remarque : l'étude générale des systèmes différentiels de la forme $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ est devenue hors-programme mais il reste au programme le cas où A est diagonalisable (voir chapitre 10, dernier paragraphe).
On traitera aussi, en exercice, quelques cas où A est seulement trigonalisable.

Théorème de Cauchy linéaire (version 3)
L'ensemble des solutions de (E_0) sur I est un espace vectoriel de dimension 2.

Conséquence
Pour déterminer les solutions de (E_0) sur I, il suffit d'en déterminer deux qui sont linéairement indépendantes.

Méthode
- Si les coefficients a et b sont des fonctions polynomiales, alors on peut parfois rechercher des solutions de (E_0) ou de (E) développables en série entière.
- Si y_0 est une solution de (E_0) et si elle ne s'annule pas sur I on peut poser $z = \dfrac{y}{y_0}$, on trouvera que y est solution ssi z' est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 (méthode de Laplace).

Théorème
La solution générale de (E) est la somme de la solution générale de (E_0) et d'une solution particulière de (E).

Principe de recollement Soient $a, b, c, d \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. Si l'équation (E) est de la forme :

$$a(t)y'' + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t)$$

- Si a ne s'annule pas sur I, alors tous les résultats de ce paragraphe sont encore valables.
- Si a s'annule sur I, alors on étudie (E) sur tout intervalle J de I où a ne s'annule pas. A chaque intervalle on a des constantes différentes. On détermine ensuite si un raccordement de solutions est possible en étudiant continuité et dérivabilité.
- Dans ce dernier cas, il n'y a plus de résultat théorique sur la structure et sur la dimension de l'ensemble des solutions.

Complement de cours chapitre 27 : Équations différentielles linéaires

1 Equations Différentielles Linéaires d'ordre 1

Remarque Pourquoi la formule $\lambda e^{-A(t)}$? C'est simple :

$$y'+a(t)y = 0\,\forall t\in I \iff y'(t)e^{A(t)}+a(t)e^{A(t)}y(t) = 0\,\forall t\in I \iff \left(e^{A(t)}y(t)\right)' = 0\ \forall t\in I \iff \exists\lambda\in\mathbb{K}\,\forall t\in I,\ e^{A(t)}y(t) = \lambda$$

Remarque Quelques exemples de forme de solutions particulières

- Pour $y'-2y = 3e^{5t}$ on cherche une solution particulière de la forme $t\mapsto \gamma e^{5t}$ avec $\gamma\in\mathbb{K}$.
- Pour $y'-2y = 3e^{2t}$ on cherche une solution particulière de la forme $t\mapsto \gamma te^{2t}$ avec $\gamma\in\mathbb{K}$.
- Pour $y'-2y = 3te^{5t}$ on cherche une solution particulière de la forme $t\mapsto (\gamma t+\delta)e^{5t}$ avec $\gamma,\delta\in\mathbb{K}$.
- Pour $y'-2y = 3te^{2t}$ on cherche une solution particulière de la forme $t\mapsto (\gamma t+\delta)te^{2t}$ avec $\gamma,\delta\in\mathbb{K}$.

2 Equations Différentielles Linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Remarque Quelques exemples de forme de solutions particulières. Pour une EDL d'ordre 2 à coefficients constants

- de solution homogène $t\mapsto \lambda e^{3t}+\mu e^{-2t}$ et de second membre $t\mapsto e^{4t}$ on cherche une solution particulière de la forme $t\mapsto \gamma e^{4t}$ avec $\gamma\in\mathbb{K}$.
- de solution homogène $t\mapsto \lambda e^{4t}+\mu e^{-2t}$ et de second membre $t\mapsto e^{4t}$ on cherche une solution particulière de la forme $t\mapsto \gamma te^{4t}$ avec $\gamma\in\mathbb{K}$.
- de solution homogène $t\mapsto \lambda e^{4t}+\mu e^{-2t}$ et de second membre $t\mapsto te^{4t}$ on cherche une solution particulière de la forme $t\mapsto (\gamma t+\delta)te^{4t}$ avec $\gamma,\delta\in\mathbb{K}$.
- de solution homogène $t\mapsto (\lambda t+\mu)e^{3t}$ et de second membre $t\mapsto e^{4t}$ on cherche une solution particulière de la forme $t\mapsto \gamma e^{4t}$ avec $\gamma\in\mathbb{K}$.
- de solution homogène $t\mapsto (\lambda t+\mu)e^{4t}$ et de second membre $t\mapsto e^{4t}$ on cherche une solution particulière de la forme $t\mapsto \gamma t^2e^{4t}$ avec $\gamma\in\mathbb{K}$.

Exemple cherchons les solutions réelles de $y''+y = \cos(t)$ sur $\mathbb{R}$.

- on trouve comme solution homogène $t\mapsto \lambda\cos(t)+\mu\sin(t)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
- pour une solution particulière on s'intéresse à l'équation $E_2 : y''+y = e^{it}$ de solution homogène $t\mapsto \alpha e^{it}+\beta e^{-it}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.
- On cherche une solution particulière de la forme $t\mapsto \gamma te^{it}$, $\gamma\in\mathbb{C}$. On trouve $\gamma = -i/2$.
- Une solution particulière de (E) est donc $t\mapsto Re\left(-\frac{i}{2}te^{it}\right) = \frac{t}{2}\sin(t)$
- L'ensemble des solutions réelles est donc $\boxed{t\mapsto \lambda\cos(t)+\mu\sin(t)+\frac{t}{2}\sin(t),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.}$

Remarques

- Pour les EDL d'ordre 2 à coefficients non constants une ERREUR FATALE : faire l'équation caractéristique.
- Pour les EDL d'ordre 2 à coefficients constants, il n'existe pas au programme de méthode de variation de la constante (ou des constantes!).

3 Equations Différentielles Linéaires d'ordre 2

$\propto$ Démonstration de cours D'ou vient l'équation caractéristique et la forme des solutions pour l'équation $y''+y'-6y = 0$? ou pour l'équation $y''+2y'+y = 0$? *j'ai choisi de traiter des exemples mais cela se généralise*

Remarque une méthode pour résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre 2 de la forme $y''+a(t)y'+b(t)y = 0$ consiste à trouver 2 solutions linéairement indépendantes car on sait que l'ensemble des solutions est de dimension 2. Pour trouver ces solutions (ou trouver une solution particulière si il y a un second membre) on peut

- les chercher sous la forme d'un polynôme (cas simple) ou d'une série entière (chapitre 25)
- les chercher sous la forme $t\mapsto t^\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{C}$ lorsque $a(t)$ et $b(t)$ sont des puissances de t *(équation d'Euler)*
- en trouver une, notée $y_0(t)$, puis, si y_0 ne s'annule pas sur I, poser $z(t) = \dfrac{y(t)}{y_0(t)}$ *(méthode de Lagrange)*
- effectuer un changement de variable (par exemple poser $g(t) = y(e^t)$).

Exemple Résoudre $t^2y''-\frac{3t}{2}y'+y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Chapitre 27 : Équations différentielles linéaires

Remarque : il est possible de "résoudre" informatiquement les équations différentielles (méthode d'Euler, odeint)...

Compétences

- ⋆ Savoir trouver avec les formules de cours les solutions homogènes à une équation du premier ordre OU à une équation du second ordre à coeff cst. Notamment la formule avec les sinus et les cosinus.
- ♠ Oublier le signe moins dans la formule $e^{-A(t)}$.
- ♠♠ Faire l'équation caractéristique avec des coefficients non constants !
- ⋆⋆ Savoir trouver une solution particulière si les coeff sont constants et si le second membre est de la forme $e^{\alpha t}$ (en la cherchant sous la forme $t \mapsto e^{\alpha t}$ ou $t \mapsto te^{\alpha t}$ ou $t \mapsto t^2e^{\alpha t}$ suivant les situations)
- ⋆⋆ Savoir adapter la méthode précédente si le second membre est en cosinus ou en sinus en passant par les complexes.
- ⋆⋆ Savoir effectuer un recollement en 0 par exemple pour une équation d'ordre 1 en cherchant si la fonction est continue puis dérivable (avec le taux d'accroissement en général) en 0.
- ♠ Ne pas mettre deux constantes différentes dans la solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ dans l'exemple précédent.
- ♠ Lorsque l'équation est $xy' + y = x^2$: ne pas penser qu'il faut diviser par x puis recoller pour la résoudre OU diviser par x et dire que l'équation devient $y' + \frac{1}{x}y = x^2$ sur $\mathbb{R}$!
- ⋆⋆ Savoir que le théorème de Cauchy linéaire affirme que pour une équation homogène d'ordre 2 avec 1 devant le y" et avec des coefficients continues sinon, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.
- ⋆⋆ Savoir que pour résoudre une équation homogène du second ordre à coeff continus il suffit de trouver deux solutions libres entre elles. Par exemple en cherchant des solutions évidentes polynômiales ou de la forme $t \mapsto t^r$.
- ⋆⋆ Savoir résoudre un système différentiel en diagonalisant A (ou en la trigonalisant avec un peu d'aide) en posant $Y = P^{-1}X$.
- ⋆⋆ Savoir qu'une équation du second ordre peut se transformer en un système différentiel en posant $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$. Valable avec des équations d'ordre plus important aussi.
- ⋆⋆ Savoir chercher une solution DSE d'une équation différentielle. Eléments à ne pas oublier : supposer $R > 0$, réindexer pour avoir les mêmes puissances, écrire $\forall x \in]-R; R[$, écrire "par unicité des coefficients d'une série entière de rayon > 0"
- ⋆ Sur cette dernière méthode savoir déduire d'une formule reliant a_{n+1} à a_n la formule de a_n en procédant de proche en proche.
- ⋆⋆ Sur cette dernière méthode savoir déduire d'une formule reliant a_{n+2} à a_n la formule de a_n en procédant de proche en proche APRES avoir distinguer le cas n pair et n impair. En plus clair : chercher a_{2n} et a_{2n+1} et non a_n.

1 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 27.1.1⋆
Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation $(1 + x^2)y' + 2xy = \frac{1}{x}$.

Exercice 27.1.2⋆
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' - 3y = \text{sh}(3x)$.

Exercice 27.1.3⋆⋆
Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation $xy' + 3y = \frac{1}{1 + x}$.

Exercice 27.1.4⋆⋆ *Oral CCINP PSI*
Résoudre $2xy' + y = \frac{2}{1 - x}$ sur $]-1; 1[$ en cherchant une solution particulière DSE.

Exercice 27.1.5⋆⋆ *Oral CCINP PSI*

1. Résoudre $xy' - y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Soit f solution de (E) : $xy' - |1 - y| = 1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   (a) Montrer que f n'est pas majorée par 1.
   (b) Montrer que f n'est pas minorée par 1.
   (c) En déduire qu'il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $f(x_0) = 1$.
   (d) En déduire l'expression de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Donner les solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 27.1.6⋆♡
Soient a, b deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Soit f solution de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27.1.7$\star\star$
Soit $f \in C^{+\infty}(]-1;1[,\mathbb{R})$. On considère l'équation (E) : $(1-x^2)y' - xy = f(x)$. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$.

1. Justifier qu'il existe une unique solution ϕ de (E) sur $]-1;1[$ telle que $\phi(0) = y_0$.
   On énoncera avec précision le théorème utilisé.
2. Démontrer que $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt + y_0\right)$ pour tout $x \in]-1;1[$.
3. Donner ϕ dans le cas $f(x) = 1$ pour tout $x \in]-1;1[$.

Exercice 27.1.8$\star\star$*Oral CCINP PSI*
Soit E le $\mathbb{R}$ espace vectoriel égal à $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
Soit $D : E \to E$ défini par $\forall f \in E\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ D(f)(x) = xf'(x)$.

1. Montrer que D est un endomorphisme et préciser son noyau.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs propres réelles de D.

Exercice 27.1.9$\star\star\star$
Soit b une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que $y' - y = b$ admet une unique solution bornée sur $\mathbb{R}^+$ et donner la formule de cette solution notée f.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ existe et est égal à $-f(0) + \displaystyle\int_0^{+\infty} b(t)dt$.

Exercice 27.1.10$\star$
Déterminer l'ensemble des applications continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) - \displaystyle\int_0^x tf(t)dt = 1$

Exercice 27.1.11$\star\star$*Oral CCINP PSI*
On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n$ avec x réel.

1. Donner le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Montrer que $(1-4x)f'(x) = 2f(x)$ sur $]-R;R[$.
3. En déduire la formule de $f(x)$ en fonction de x pour tout $x \in]-R;R[$.

2 Recollement

Exercice 27.2.1$\star$
L'équation $2xy' - 3y = \sqrt{x}$ admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 27.2.2$\star\star$
Résoudre $2x^2y' + y = 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27.2.3$\star\star$
Résoudre $x(x-1)y' - (x-2)y = 0$ sur $]0;+\infty[$.

Exercice 27.2.4$\star\star$
Résoudre $(1+x)2xy' + (1+x)y = 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27.2.5$\star\star$ *Oral Saint Cyr PSI*

1. Résoudre l'équation (E) : $2xy' + y = \dfrac{1}{1-x}$ sur $]-\infty;0[$ puis sur $]0;1[$.
2. Montrer que (E) admet une unique solution sur $]-\infty;1[$. Montrer que cette solution est de classe C^∞ sur $]-\infty;1[$.

Exercice 27.2.6$\star\star$ Mines Ponts
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés. Soit (E) : $y'' - 9y = a|x| + b$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$ admettant une saymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 27.2.7$\star\star$
On considère l'équation (E) : $t^2y'' + ty' - (t^2+t+1)y = 0$. Sachant que $t \mapsto \dfrac{e^{-t} - 1 + t}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ sont solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$, déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27.2.8$\star\star$*Oral Mines Telecom*

1. Résoudre $y'' + \dfrac{1}{x}y' - \dfrac{1}{x^2}y = \dfrac{-1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ en cherchant une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda(x)x$.
2. Résoudre $x^2y'' + xy' - y = -1$ sur $\mathbb{R}$.

3 EDL d'ordre 2 à coefficients constants

Exercice 27.3.1⋆
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}$.

Exercice 27.3.2⋆
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 5y' + 4y = e^{-2t}\sin(t)$.

Exercice 27.3.3⋆

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + y = \sin(t)$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - y = \sin(t)$.

Exercice 27.3.4⋆⋆*Oral Arts&Métiers*

1. Montrer que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. En déduire la résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation : $f''(x) + f(-x) = x + \cos(x)$

Exercice 27.3.5⋆⋆
Trouver toutes les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $f(1) = 1$ et : $f'(x) = f(x) + e^x \int_0^1 f(t)dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Exercice 27.3.6⋆
Déterminer l'ensemble des applications dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2f(-x) + x$

Exercice 27.3.7⋆⋆ Mines Ponts
Soit $f \in C^0([0;1],\mathbb{R})$, on pose $\phi(f) : x \in [0;1] \mapsto \int_0^1 min(x,t)f(t)dt$.

1. Soit F primitive de f sur $[0;1]$, montrer que : $\forall x \in [0;1]$, $\phi(f)(x) = -\int_0^x F(t)dt + xF(1)$.
2. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $C^0([0;1],\mathbb{R})$.
3. Donner noyau et image de ϕ.
4. Donner les éléments propres de ϕ.

4 EDL d'ordre 2 à coefficients non constants

Exercice 27.4.1⋆⋆
On se place sur $]0;+\infty[$ dans cet exercice.

1. Chercher une solution polynomiale de degré 1 à l'équation $t^3y''(t) + ty'(t) - y(t) = 0$. On la note $f(t)$.
2. Résoudre $t^3y''(t) + ty'(t) - y(t) = 0$ en cherchant les solutions sous la forme $y(t) = z(t)f(t)$.

Exercice 27.4.2⋆⋆CCINP
On veut résoudre $(E) : (x^2-1)y'' + 2xy' - 2y = 0$ sur $]-1;1[$.

1. Chercher les solutions polynomiales.
2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par z si on pose $y(x) = xz(x)$.
3. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{2(2x^2-1)}{x(x^2-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;0;1\}$.
4. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par z puis résoudre (E).

Exercice 27.4.3⋆
Résoudre $(t^2-3)y''(t) - 4ty'(t) + 6y(t) = 0$ sur $]\sqrt{3};+\infty[$ en cherchant des solutions polynomiales de degré 3.
En déduire les solutions de $(t^2-3)y''(t) - 4ty'(t) + 6y(t) = 1$ sur $]\sqrt{3};+\infty[$.

Exercice 27.4.4⋆⋆
Résoudre $(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$ en cherchant les solutions développables en série entière.

Exercice 27.4.5⋆⋆
Donner une solution développable en série entière de $t(t-1)y'' + 3ty' + y = 0$.

Exercice 27.4.6⋆⋆
Donner une solution développable en série entière de $t^2y'' + t(t+1)y' - y = 0$.
Préciser son rayon et sa formule à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 27.4.7⋆
Résoudre $t^2y'' - 2ty' + (2-t^2)y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ en vérifiant que $t \mapsto t\,\mathrm{ch}(t)$ et $t \mapsto t\,\mathrm{sh}(t)$ sont solutions.

Exercice 27.4.8⋆⋆Mines Ponts
Soit (E) : $y''=(x^2-1)y$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si y est solution de (E) et $y(0)=0$ alors y est impaire.
2. Trouver le réel a tel que $x\mapsto e^{ax^2}$ soit solution de (E).
3. On pose $f : x\mapsto u(x)e^{-x^2/2}$. Montrer que f est solution de (E) ssi u est solution d'une équation différentielle à préciser.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 27.4.9⋆⋆ *Oral Centrale PSI*
On considère l'équation (E) : $(1+x^2)y''+xy'-y=0$

1. Déterminer les solutions de (E) développables en séries entières.
2. En posant $x=sh(t)$, résoudre (E).

Exercice 27.4.10⋆⋆
Résoudre $t^2y''-2y=t$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $t=e^x$.

Exercice 27.4.11⋆⋆
Résoudre, sur $\mathbb{R}^{+*}$, $x^4y''+2x^3y'-y=e^{1/x}$ en posant $t=1/x$.

Exercice 27.4.12⋆⋆CCINP
Soit (E) : $f'(x)=-\dfrac{1}{2}f(1/x)$, $\forall x>0$.

1. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant (E), déterminer une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par f.
2. Soit (E') : $4x^2y''(x)+y(x)=0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. En posant $x=e^t$, déterminer les solutions de (E').
3. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Et sur $\mathbb{R}^{-*}$? (pour (E))

Exercice 27.4.13⋆⋆Centrale
Soit $n\geqslant 2$ un entier fixé. Soit (E_n) : $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$.

1. Que peut-on dire des solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}^{+*}$? Sur $\mathbb{R}^{-*}$? sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que les solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}$ de (E_n) appartiennent à la droite dirigée par $J_n : x\mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$.
3. Que peut-on en conclure sur les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$?

5 Système différentiel

Exercice 27.5.1⋆
Résoudre le système différentiel suivant $\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & 4x(t)+y(t)\\ y'(t) & = & x(t)+4y(t)\end{array}\right.$

Exercice 27.5.2⋆
Résoudre le système différentiel suivant $\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & x(t)+y(t)\\ y'(t) & = & -x(t)+3y(t)\end{array}\right.$
On montrera que $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix}\bullet & 1\\ 0 & \bullet\end{pmatrix}$

Exercice 27.5.3⋆⋆
Résoudre le système différentiel suivant $\left\{\begin{array}{lcl} x''(t) & = & 9x(t)-5y(t)+2t\\ y''(t) & = & 10x(t)-6y(t)+e^t\end{array}\right.$

Exercice 27.5.4⋆⋆
On considère l'équation (E) : $x''(t)-2x'(t)-3x(t)=e^t$ sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $X=\begin{pmatrix}x\\ x'\end{pmatrix}$. Donner $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que (E) s'écrive $X'(t)=AX(t)+\begin{pmatrix}0\\ e^t\end{pmatrix}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.
2. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27.5.5⋆⋆
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Soit X solution de $X'=AX$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $t\mapsto \|X(t)\|$ est une fonction constante.

Exercice 27.5.6⋆⋆*Oral Navale PSI*
On considère l'équation (E) : $x^{(3)}(t) - 5x''(t) + 7x'(t) = 3x(t)$ sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix}$. Donner $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que (E) s'écrive $X'(t) = AX(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
3. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27.5.7⋆⋆CCINP
Soit $A(t) = \begin{pmatrix} 1+3t & -2t \\ 4t & 1-3t \end{pmatrix}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Donner les éléments propres de $A(t)$.
2. En déduire qu'il existe P inversible et indépendante de t telle que $P^{-1}A(t)P$ soit une matrice diagonale.
3. Résoudre le système différentiel : $Y'(t) = A(t)Y(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Exercice 27.5.8⋆⋆⋆ *Ecrit CCP PSI devenu à la limite du programme*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On s'intéresse au système différentiel (E) : $X'(t) = AX(t)$ sur $\mathbb{R}$ où $X : I \to \mathbb{C}^n$ est une application C^1.

1. Montrer que si X est solution de (E) alors X est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $X^{(k)}(t) = A^k X(t) \quad \forall k \in \mathbb{N} \;\; \forall t \in \mathbb{R}$
2. On note $X_0 = X(0)$. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ on a $X(t) = \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{t^k}{k!} A^k\right) X_0 + \int_0^t \frac{(t-u)^p}{p!} A^{p+1} X(u) du$
3. On considère $\| \bullet \|_1$, norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On suppose que l'on dispose d'une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant
$$N(BC) \leqslant N(B)N(C) \quad \forall B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \textit{et} \quad \|BT\|_1 \leqslant N(B)\|T\|_1 \quad \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \forall T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$$
Montrer que $X(t) = \lim_{p \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{t^k}{k!} A^k\right) X_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 27.5.9⋆⋆ *Oral Mines Ponts*
Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que si $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est solution de $X'' + SX = 0$ sur $\mathbb{R}$ alors X est borné sur $\mathbb{R}$.

6 Sans calculs

Exercice 27.6.1⋆⋆♡
Montrer qu'une solution x de $x''(t) + e^{it}x(t) = 0$ sur $\mathbb{R}$ est 2π-périodique ssi $x(0) = x(2\pi)$ et $x'(0) = x'(2\pi)$.

Exercice 27.6.2⋆
Soient $a, b \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère (E) l'équation $y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer que si y est une solution non nulle de (E), si y s'annule en un point t_0 alors il existe $\delta > 0$ tel que $y(t) \neq 0$ pour tout $t \in]t_0 - \delta; t_0 + \delta[\setminus \{t_0\}$.

Exercice 27.6.3⋆⋆
Soit $a \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction paire. On considère (E) l'équation $y''(x) + a(x)y(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier qu'il existe une unique solution à (E) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. On la note f_0.
2. Justifier qu'il existe une unique solution à (E) vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. On la note f_1.
3. Montrer que si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ alors $x \mapsto y(-x)$ est aussi solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que f_0 est paire et f_1 est impaire.
5. En déduire la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ à l'aide de f_0 et f_1.

28. Fonctions de plusieurs variables réelles

Dans tout ce chapitre, p est un entier naturel non nul.
On considère des fonctions f définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I - Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Rappel de SUP Soit I un intervalle réel, soit $a \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est dérivable en a si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a par valeurs distinctes.
Auquel cas, on pose : $f'(a) = \displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Définition Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, soit $a = (a_1; a_2; \ldots; a_p) \in U$, soit $f : U \to \mathbb{R}$ et soit $i \in [\![1;p]\!]$.
On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 en a par rapport à la i-ième variable si l'application

$$x_i \mapsto f(a_1; \ldots; a_{i-1}; x_i; a_{i+1}; \ldots; a_p)$$

est dérivable en a_i, c'est-à-dire si $\dfrac{f(a_1; \ldots; a_{i-1}; x_i; a_{i+1}; \ldots; a_p) - f(a_1; \ldots; a_{i-1}; a_i; a_{i+1}; \ldots; a_p)}{x_i - a_i}$ admet une limite finie lorsque x_i tend vers a_i par valeurs distinctes. Auquel cas, on note cette limite $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $\partial_i f(a)$.

Exemple Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- Si $\dfrac{f(x;0)-f(0;0)}{x-0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers 0 , alors on pose : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x;0)-f(0;0)}{x-0}$.
- Si $\dfrac{f(1;y)-f(1;0)}{y-0}$ admet une limite finie lorsque y tend vers 0, alors on pose : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \displaystyle\lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{f(1;y)-f(1;0)}{y-0}$.

Définition Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, soit $f : U \to \mathbb{R}$ et soit $a \in U$.
Sous réserve d'existence, on note $\nabla f(a)$ le vecteur $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right)$. On le nomme le gradient de f en a.

Définition Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est définie sur U et est continue sur U.

Propriété

- Une combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
- Un produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, soit $a \in U$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
On appelle différentielle de f en a l'application linéaire notée $\mathrm{d}f(a)$ et définie par :

$$\mathrm{d}f(a) : \begin{cases} \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \\ (h_1; \ldots; h_p) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{cases}$$

Autrement dit, $\mathrm{d}f(a)$ est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{bmatrix}$.
Encore autrement dit, on a $\mathrm{d}f(a)(h) = (\nabla f(a)|h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^p$. On note plutôt $\mathrm{d}f(a)(h) = \mathrm{d}f(a).h$.

Propriété Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, soit $a \in U$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
pour tous $a \in U$, pour tout $h \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h \in U$, on a

$$f(a+h) = f(a) + df(a).h + o(\|h\|)$$

En particulier, si $p = 2$, on a $f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = f(a_1, a_2) + h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) + o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right)$

Remarque Cette formule, avec la précédente, permet parfois de trouver le gradient de f en a en développant $f(a+h)$ et en faisant apparaître $o(\|h\|)$.

Corollaire Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
Alors f est continue sur U.

Définition Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, soit $a \in U$ et soit u un vecteur non nul de U. On dit que f admet une dérivée selon le vecteur u au point a si la fonction $t \mapsto f(a+tu)$ est dérivable en 0 c'est à dire si $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+tu)-f(a)}{t}$ existe et est finie. Dans ce cas on note $D_u f(a)$ cette limite.

Remarque Dans $\mathbb{R}^2$ les dérivées partielles précédentes correspondent aux dérivées selon les vecteurs $(1,0)$ (et $(0,1)$) pour $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$).

Propriété Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, soit $a \in U$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
Pour tout vecteur u non nul de U, f admet une dérivée selon le vecteur u et $D_u f(a) = df(a).u$.

En effet, $f(a+tu) = f(a) + t\, df(a).u + o(t)$ *lorsque* t *tend vers* 0.

II - Dérivées partielles d'ordre 2

Notation Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, soit $f : U \to \mathbb{R}$ et soit $i, j \in [\![1;p]\!]$.

- Si elle existe, la fonction $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ est notée $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.
- Si elle existe, la fonction $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ est notée $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Définition Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U si, pour tout $(i;j) \in [\![1;p]\!]^2$, la fonction $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ est définie et continue sur U.

Cas particulier Si U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et si $f : U \to \mathbb{R}^2$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U si les fonctions $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sont définies et continues sur U.

Théorème de Schwarz soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, alors, pour tous $i, j \in [\![1;p]\!]$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Définition
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, soit $a \in U$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ dont toutes les dérivées partielles d'ordre 2 en a existent.
On définit la matrice Hessienne, notée $H_f(a)$, la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall i, j \in \{1, ..., p\}, \quad (H_f(a))_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

En particulier, si f est C^2, par le théorème de Schwarz, $H_f(a)$ est symétrique réelle.

Théorème : Formule de Taylor Young
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, soit $a \in U$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On a, lorsque h tend vers 0,

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a) h^T + \frac{1}{2} h H_f(a) h^T + o\left(\|h\|^2\right) = f(a) + (\nabla f(a)|h) + \frac{1}{2}\left(hH_f(a)|h\right) + o\left(\|h\|^2\right)$$

III - Règle de la chaîne

Propriété : règle de la chaîne
Soit I un intervalle réel et soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On considère les fonctions suivantes :

$$\varphi : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^p \\ t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_p(t)) \end{cases} \quad \text{et} \quad f : \begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ (x_1; \dots; x_p) \mapsto f(x_1, ..., x_p) \end{cases}$$

On suppose que $\varphi(I) \subset U$. On peut alors considérer la fonction $f \circ \varphi : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in I, (f \circ \varphi)(t) = f(\varphi_1(t); \varphi_2(t); \dots; \varphi_p(t))$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$\forall t \in I, (f \circ \varphi)'(t) = \varphi_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(t)) + \varphi_2'(t)\frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(t)) + \cdots + \varphi_p'(t)\frac{\partial f}{\partial x_p}(\varphi(t)) = (\varphi'(t) | \nabla f(\varphi(t)))$$

Exemple ♡ Soit $f : (x; y) \mapsto f(x; y)$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
L'application $g : (r; \theta) \mapsto f(r\cos(\theta); r\sin(\theta))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\forall (r; \theta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r}(r; \theta) = \cos(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta); r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta); r\sin(\theta)) \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r; \theta) = -r\sin(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta); r\sin(\theta)) + r\cos(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta); r\sin(\theta)) \end{cases}$$

Propriété Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
La fonction f est constante sur U si et seulement si toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 sont nulles sur U.

IV - Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

Définition Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, soit $a \in U$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$.

- On dit que f admet un maximum local en a si : $\exists r > 0, \forall x \in \mathcal{B}(a; r) \cap U, f(x) \leqslant f(a)$
- On dit que f admet un minimum local en a si :$\exists r > 0, \forall x \in \mathcal{B}(a; r) \cap U, f(x) \geqslant f(a)$
- On dit que f admet un extremum local (ou relatif) en a si f admet un maximum local ou un minimum local en a.

Définition Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, soit $a \in U$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$.

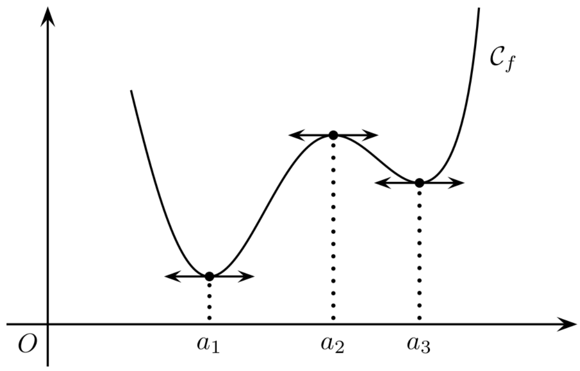
- On dit que f admet un maximum global en a si : $\forall x \in U, f(x) \leqslant f(a)$
- On dit que f admet un minimum global en a si : $\forall x \in U, f(x) \geqslant f(a)$
- On dit que f admet un extremum global en a si f admet un maximum global ou un minimum global en a.

Remarque
La fonction f admet un extremum local en a si le réel $f(x) - f(a)$ est de signe constant sur un voisinage de a.
En pratique, pour étudier l'existence d'un extremum local en un point a, on pourra effectuer une étude de signe de $f(x) - f(a)$ pour x au voisinage de a.

Rappel de SUP
Soit I un intervalle réel, soit $a \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- Si f admet un extremum local en a,
- si f est dérivable en a,
- et si a appartient à l'intérieur de I,

alors $f'(a) = 0$.



Propriété : condition nécessaire d'existence d'un extremum local

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, soit $a \in U$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
Si f admet un extremum local en a, alors, pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0$.

Définition Un point $a \in U$ où pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0$ se nomme un point critique de f.

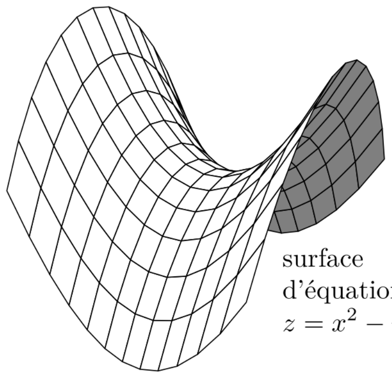
Remarque La condition nécessaire fournie par la propriété précédente n'est pas une condition suffisante.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, f(x;y) = x^2 - y^2$$

Le point $(0;0)$ est un point critique de f,
mais f n'admet pas d'extremum local en $(0;0)$.
On parle de "point col" ou de "point selle".



surface d'équation $z = x^2 - y^2$

Théorème

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Soit $a \in U$ un point critique de f.

- Si toutes les valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictements positives, c'est à dire si $H_f(a) \in S_p^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en a.
- Si toutes les valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictements négatives alors f atteint un maximum local strict en a.
- Si au-moins l'une des valeurs propres de $H_f(a)$ est négative strictement, c'est à dire si $H_f(a) \notin S_p^{+}(\mathbb{R})$, alors f n'admet pas de minimum en a.
- Si au-moins l'une des valeurs propres de $H_f(a)$ est positive strictement alors f n'admet pas de maximum en a.

Théorème (cas $p = 2$)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Soit $a \in U$ un point critique de f.

- Si $det(H_f(a)) < 0$ alors f n'admet pas d'extremum en a.
- Si $det(H_f(a)) > 0$ et $tr(H_f(a)) > 0$ alors f admet un minimum local strict en a.
- Si $det(H_f(a)) > 0$ et $tr(H_f(a)) < 0$ alors f admet un maximum local strict en a.

Remarque Si on a $det(H_f(a)) = 0$ (c'est à dire si l'on a une valeur propre nulle) alors ... c'est hors-programme :(
Vous devez vous ramener à l'étude du signe de $f(a+h) - f(a)$.

Complement de cours chapitre 28 : Fonctions de plusieurs variables réelles

Quelques exemples de cours

Exemple 1 On pose $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
Etudier la continuité de f en $(0,0)$ puis l'existence des dérivées partielles en $(0,0)$ puis le caractère C^1 de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2 On pose $f(x,y) = x^3y + 5x^2y^2 + 7y$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Donner la différentielle de f. Donner ensuite la dérivée de f en $(0,0)$ selon le vecteur $(1,1)$ de deux manières.

Exemple 3 On pose $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
Calculer, si elles existent, les dérivées partielles d'ordre 2 en $(0,0)$.

Exemple 4 On pose $f(x,y) = x\sin(y) + y\sin(x)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ecrire la formule de Taylor Young à l'ordre 2 en $(0,0)$. Etudier l'existence d'extrema locaux pour f sur $\mathbb{R}^2$.

Quelques démonstrations de cours

Démonstration de cours 1 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 avec U un ouvert convexe alors :
f est constante sur U ssi toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 sont nulles sur U.

Démonstration de cours 2 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Soit $a \in U$ un point critique de f. Cas $H_f(a) \in S_p^{++}(\mathbb{R})$ puis cas où $H_f(a)$ admet au-moins une valeur propre strictement négative.

Démonstration de cours 3 : Théorème précédant pour $p = 2$.

Compétences

- $\star$ Savoir montrer qu'une fonction de plusieurs variables est C^∞ par opérations.
- $\star\star$ Savoir montrer qu'une fonction est continue en $(0,0)$ en majorant ou en passant en polaires.
- $\star$ Savoir dériver par rapport à une variable en fixant les autres variables.
- $\star$ Savoir montrer que la dérivée par rapport à x existe en $(0,0)$ en passant par le taux d'accroissement.
- $\star\star$ Savoir montrer qu'une fonction avec un point posant problème est une fonction C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (dérivable et à dérivées continues)
- $\star\star\star$ Pareil avec C^2.
- $\star\star$ Utiliser le th de Schwarz pour montrer qu'une fonction n'est pas de classe C^2.
- $\star\star$ Savoir dériver avec la règle de la chaîne. Par exemple si $g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ savoir exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial r}$.
- $\star\star$ Avec un changement de variable donné, savoir résoudre une équation aux dérivées partielles simple.
- $\star$ Savoir trouver les points critiques d'une fonction de deux variables.
- ♠ Penser que tout point critique est un extremum.
- $\star\star$ Savoir justifier qu'il existe un maximum car on a une fonction continue sur un fermé borné. Puis chercher ce maximum en regardant sur l'ouvert (points critiques...) et sur le bord du domaine.
- $\star\star$ Savoir montrer qu'un point critique (a,b) n'est pas un extremum en trouvant des valeurs de f au-dessus et au-dessous de $f(a,b)$ au voisinage de (a,b).
- $\star\star\star$ Savoir montrer qu'un point critique (a,b) est un maximum (pareil pour minimum) en montrant que $f(a,b) \geqslant f(x,y)$ pour tout (x,y) au voisinage de (a,b). Notamment en posant $h = x - a$ et $k = y - b$.
- $\star\star$ Savoir montrer qu'un point critique (a,b) est un maximum (pareil pour minimum) en utilisant la Hessienne.
- $\star\star\star$ Savoir trouver le gradient de f en a en développant $f(a+h)$ et en reconnaissant une partie linéaire et une partie en $o(\|h\|)$.

Chapitre 28 : Fonctions de plusieurs variables réelles

1 Continuité, classe C^1 et classe C^2

Exercice 28.1.1⋆
La fonction, définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ admet-elle un prolongement par continuité définie sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 28.1.2⋆
Montrer que la fonction, définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ n'admet pas de limite en $(0,0)$.

Exercice 28.1.3⋆
La fonction, définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}}$ et $f(0,0) = 0$ est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 28.1.4⋆

1. Montrer que la fonction $f : (x,y) \mapsto xe^{x/y}$ n'admet pas de limite en $(0,0)$.
2. Même question avec $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^4+y^2}{3xy}$.

Exercice 28.1.5⋆⋆
Soit f définie sur $[0;1]^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}$ si $(x,y) \neq (1,1)$ et $f(1,1) = 0$.
Montrer que f est continue sur $[0;1]^2$.

Exercice 28.1.6⋆♡
On pose $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
Etudier la continuité de f. Etudier l'existence de dérivées partielles. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 28.1.7⋆⋆*Oral CCP***
On pose $f(x,y) = \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Prouver que $x^2+y^2-xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier l'existence et calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2$. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 28.1.8⋆*Oral CCP***
On pose $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
Etudier la continuité de f. Etudier l'existence de dérivées partielles. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 28.1.9⋆⋆*Oral Arts***
On pose $f(x,y) = \dfrac{y^4}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

2 Calculs

Exercice 28.2.1⋆
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x\cos(x+y) + z\sin(x-y)$.
Justifier que f est C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et donner son gradient et sa différentielle en $(\pi,0,0)$.

Exercice 28.2.2⋆
Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $g(t) = f(t,e^t)$ et $h(t) = f(t,t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Donner la dérivée seconde de g puis celle de h.

Exercice 28.2.3⋆
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Soit $f : (x,y) \mapsto P(x+iy)$. Calculer le Laplacien de f.

Exercice 28.2.4⋆⋆
Soit $a \in \mathbb{R}^n$ non nul. Donner la différentielle de $f : x \mapsto \|x\|_2$ en a.
Retrouver $df(a).h$ en utilisant le développement limité de $\|a+h\|$ si $h \to 0$.

Exercice 28.2.5$\star$
Soit $U = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \mid y > 1/x\}$. On pose $f(x,y) = arctan(x) + arctan(y) - arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$ pour tout $(x,y) \in U$.
Simplifier l'expression de f sur U.

Exercice 28.2.6$\star$ Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{\|x\|}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ et donner son gradient.

Exercice 28.2.7$\star\star$
Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $f(tx) = t^7 f(x)$ pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^p$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 7f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$. Montrer ensuite la réciproque.

Exercice 28.2.8$\star\star$Mines Ponts
Soient $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $r \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associé.
Montrer l'équivalence de (1) $\forall f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $\Delta(f \circ r) = (\Delta f) \circ r$ et (2) $R \in O_2(\mathbb{R})$.

Exercice 28.2.9$\star\star$
Soit f de classe C^1 sur $[0;1]^2$. On pose $F(x,y) = \displaystyle\int_0^y f(x,t)dt$ pour tout $(x,y) \in [0;1]^2$.
Montrer que F admet des dérivées partielles par rapport à x et y et les donner.

Exercice 28.2.10$\star\star\star$ *A la limite externe du programme*

1. Donner la différentielle en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $f : M \mapsto M^2$.
2. Donner la différentielle en $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de $f : P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P^2(t)dt$.
3. (ENS PSI 2022 Lou) Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$. Donner la différentielle en $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $\psi : M \mapsto M^T A_0 M$.

Exercice 28.2.11$\star\star\star$ Mines Ponts
Soit $f : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^T A x$ avec $E = \mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.

1. Donner le gradient de f (noté g) en fonction de A et x (et pas de leurs coordonnées).
2. On pose $h(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. Relier simplement h et f.
3. On cherche à retrouver le résultat de Q2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, relier $f(\theta x)$ et $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Conclure.

Exercice 28.2.12$\star\star$CCINP
Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. On pose $f(x) = \dfrac{1}{2}(Ax|x) - (u|x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
Justifier que f est C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et calculer son gradient. Etudier les extrema de f.

3 Equation aux dérivées partielles

Exercice 28.3.1$\star$
Donner les fonctions de classe C^1 (C^2 pour les derniers cas) sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x$
3. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$
4. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f(x,y)$
5. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^y$
6. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = xy$

Exercice 28.3.2$\star$
Résoudre, pour $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $f(x,x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 28.3.3$\star\star$
Chercher les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
On montrera que $\varphi : (x,y) \mapsto (x, y-2x)$ est une bijection C^1 de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et que sa réciproque est de classe C^1.

Exercice 28.3.4$\star\star$
Chercher les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
Montrer que $\varphi : (x,y) \mapsto ((x+y)/2, (y-x)/2)$ est une bijection C^1 de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et que sa réciproque est C^1.

Exercice 28.3.5⋆⋆
Chercher les fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
Montrer que $\varphi : (x,y) \mapsto (x+y, 2x+y)$ est une bijection de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et que sa réciproque est C^2.

Exercice 28.3.6⋆⋆
Chercher les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ vérifiant : $y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$
On passera en polaires.

Exercice 28.3.7⋆⋆*Oral Mines Ponts*
En posant $u = \dfrac{x}{1+y^2}$ et $v = y$, trouver les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ solutions de $2xy\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 28.3.8⋆⋆⋆*Oral Centrale PSI*
On cherche les fonctions f à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue sur $[0; +\infty[\times\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $]0; +\infty[\times\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + f(t,x)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = 0$$

Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et croissante.

1. Soit $t \in \mathbb{R}^+$, soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique réel $a(t,x)$ tel que $x = a(t,x) + tu(a(t,x))$.
2. On admet que $(t,x) \mapsto a(t,x)$ est continue sur $[0; +\infty[\times\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $]0; +\infty[\times\mathbb{R}$.
   Soit $f : (t,x) \mapsto u(a(t,x))$ pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(0,x) = u(x)$ et que f est solution du problème posé.

4 Extremum

Méthode : si on cherche les extrema de $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 ou C^2 suivant la méthode

- Si U est un ouvert alors on recherche les points critiques (notés (x_0, y_0)) puis soit on étudie le signe de $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ soit on étudie la hessienne de f en (x_0,y_0).
- Si U est une partie fermée bornée non vide on sait que f, continue, est bornée et atteint ses bornes. On cherche alors sur l'intérieur de U en quels points on peut avoir un extremum (recherche des points critiques). On regarde aussi ce qui se passe sur la frontière de U pour la fonction f.

Exercice 28.4.1⋆
Soit f définie sur $[0,10] \times [-2,2]$ par $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 5x - y$.
Déterminer le maximum global et le minimum global de f si ils existent.

Exercice 28.4.2⋆
Soit f définie sur $[0,4]^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y$.
Déterminer le maximum global et le minimum global de f si ils existent.

Exercice 28.4.3⋆
Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 10x - 2y$.
Déterminer le maximum global et le minimum global de f si ils existent.

Exercice 28.4.4⋆⋆
Soit f définie sur $[0,1] \times [0,1]$ par $f(x,y) = \dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$. Déterminer le maximum global de f si il existe.

Exercice 28.4.5⋆⋆ Mines Ponts
Soit $D = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid x + y \leqslant 1\}$. Soient $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : (x,y) \mapsto x^a y^b (1-x-y)^c$.
Montrer que f admet des extrema globaux de f sur D et les calculer.

Exercice 28.4.6⋆⋆
Soit f définie sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ par $f(x,y) = x + y + \dfrac{1}{xy}$. Etudier l'existence d'extrema locaux de f.

Exercice 28.4.7⋆⋆
Soit f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$. Etudier l'existence d'extrema locaux de f.

Exercice 28.4.8⋆⋆
Soit f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = x^3 + 3y^2 - z^3 - 6xy - 9x + 12z$. Etudier l'existence d'extrema locaux de f.

Exercice 28.4.9⋆⋆
Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=x^2y+\ln(4+y^2)$. Calculer $f(x,x^3)$. Etudier l'existence d'extrema locaux de f.

Exercice 28.4.10⋆⋆CCINP
On pose $f(x,y)=xy(1-x-y)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
Donner tous les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$. Etudier les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 28.4.11⋆⋆*Oral Mines Ponts*
Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=(3x+4y)e^{-x^2-y^2}$. Etudier l'existence d'extrema locaux de f.
On montrera que $f(x,y)$ tend vers 0 si $\|(x,y)\|$ tend vers $+\infty$

Exercice 28.4.12⋆⋆*Oral Centrale*
Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=x^4+y^4-4xy$. Etudier l'existence d'extrema locaux de f.

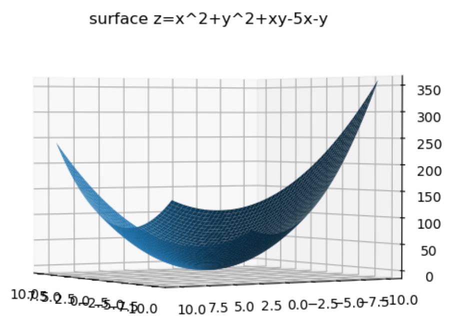
Exercice 28.4.13⋆*Oral CCP*
Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=(x^2-1)^2+(x^2-e^y)^2$. Etudier l'existence d'extrema locaux de f.

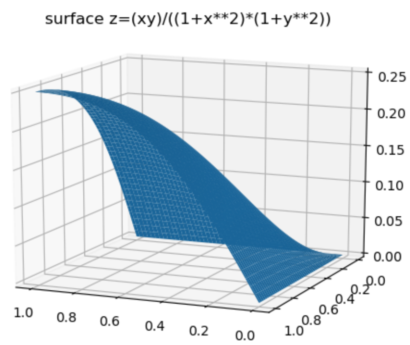
Exercice 28.4.14⋆⋆*Oral Mines Ponts*
Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$. Déterminer les extrema globaux de f sur $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ |x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant\pi\}$.

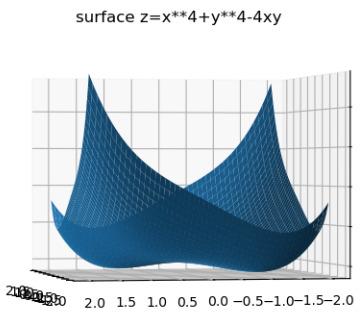
Exercice 28.4.15⋆⋆
Déterminer les extrema locaux de $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ définie par $f(x_1,...,x_n)=\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k^2+\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2-\sum_{k=1}^n x_k$.

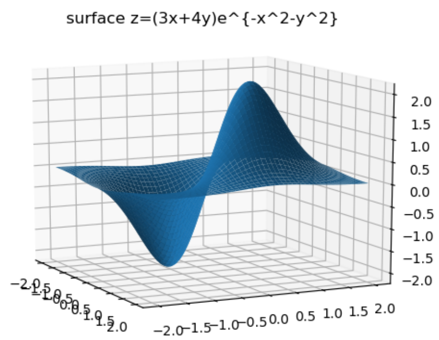
Exercice 28.4.16⋆⋆
Soit f une fonction C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x\in\mathbb{R}$ la matrice Hessienne de f possède toutes ses valeurs propres dans $[1;+\infty[$.

1. Pour $x\in\mathbb{R}^n$ fixé, on pose $\varphi: t\mapsto f(tx)$. Justifier que φ est C^2 sur $\mathbb{R}$ et exprimer φ'' à l'aide de la matrice Hessienne de f.
2. En utilisant $\psi\ t\mapsto f(tx)-(\nabla f(0)|tx)-\dfrac{t^2}{2}x^Tx$, montrer que $f(x)\geqslant f(0)+(\nabla f(0)|x)+\dfrac{1}{2}x^Tx$.
3. En déduire que $\displaystyle\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x)=+\infty$. Montrer que f admet un minimum.









29. Courbes et Surfaces

I - Courbes définies par une équation cartésienne

Vocabulaire Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et soit $F : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.
On considère Γ l'ensemble des points $M = (x; y)$ qui vérifient $F(x; y) = 0$.
On dit que Γ est la courbe d'équation $F(x; y) = 0$.
Une ligne de niveau associée à F est une courbe d'équation $F(x, y) = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est fixé.

Exemples

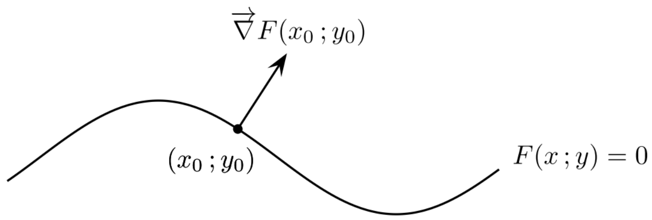
- Une équation cartésienne du cercle trigonométrique est : $x^2 + y^2 = 1$
- Une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega = (x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon $R > 0$ est : $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$
- Soit $\mathcal{C}$ l'ellipse de centre $\Omega = (x_\Omega; y_\Omega)$, de demi-grand axe a, de demi-petit axe b et d'axe focal $(\Omega, \overrightarrow{i})$.
  Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est : $\dfrac{(x - x_\Omega)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_\Omega)^2}{b^2} = 1$
- Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A = (x_A; y_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = (a; b)$.
  Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est : $a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) = 0$
- Une équation cartésienne de la courbe représentative d'une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est : $y = \varphi(x)$

Définition Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, soit $F : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et soit a un point de U.
On appelle gradient de F en a le vecteur noté $\overrightarrow{\nabla} F(a)$ ou $\overrightarrow{\text{grad}} F(a)$ et défini par :

$$\overrightarrow{\nabla} F(a) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(a); \frac{\partial F}{\partial x_2}(a); \dots; \frac{\partial F}{\partial x_p}(a) \right)$$

Définition
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, soit $F : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et soit Γ la courbe d'équation $F(x; y) = 0$.
Soit $M_0 = (x_0; y_0)$ un point de Γ. On dit que M_0 est un point régulier de Γ si $\overrightarrow{\nabla} F(x_0; y_0) \neq (0; 0)$.

Propriété
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, soit $F : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et soit Γ la courbe d'équation $F(x; y) = 0$.
Si $M_0 = (x_0; y_0)$ est un point régulier de Γ, alors Γ admet une tangente en M_0.
De plus, un vecteur normal à cette tangente est $\overrightarrow{\nabla} F(x_0; y_0) = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0; y_0); \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0; y_0) \right)$.



Corollaire En un point où il est non nul, le gradient de F est orthogonal aux lignes de niveau $F(x; y) = \lambda$.

II - Surfaces définies par une équation cartésienne

On munit l'espace d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

VocabulaireSoit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et soit $F : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.
On considère $\mathcal{S}$ l'ensemble des points $M = (x; y; z)$ qui vérifient $F(x; y; z) = 0$.
On dit que $\mathcal{S}$ est la surface d'équation $F(x; y; z) = 0$.

Exemples

- Une équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega = (x_\Omega; y_\Omega; z_\Omega)$ et de rayon $R > 0$ est :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$$

- Une équation cartésienne du cylindre circulaire d'axe $(\Omega, \overrightarrow{k})$ et de rayon $R > 0$ est :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

- Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ le plan passant par $A = (x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = (a; b; c)$ est

$$a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) + c\,(z - z_A) = 0$$

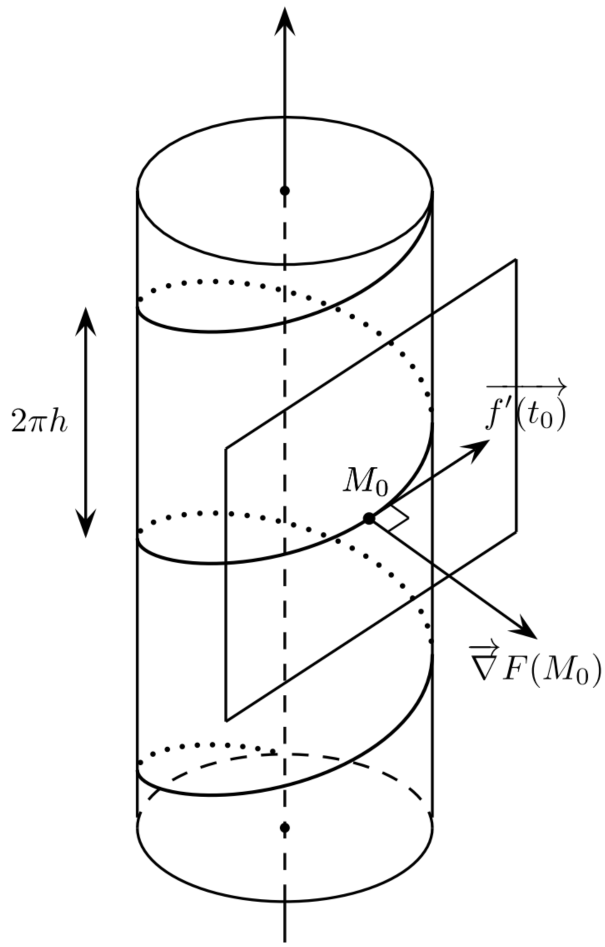
Définition
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, soit $F : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $F(x; y; z) = 0$.
Soit $M_0 = (x_0; y_0; z_0)$ un point de $\mathcal{S}$.

- On dit que M_0 est un point régulier de $\mathcal{S}$ si $\overrightarrow{\nabla} F\,(x_0; y_0; z_0) \neq (0; 0; 0)$.
- Si M_0 est un point régulier de $\mathcal{S}$, alors on définit le plan tangent à $\mathcal{S}$ en M_0 comme le plan passant par M_0 et de vecteur normal $\overrightarrow{\nabla} F\,(x_0; y_0; z_0)$.

Propriété : courbe tracée sur une surface
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, soit $F : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $F(x; y; z) = 0$.
Soit I un intervalle réel et soit $f : \left\{ \begin{array}{ll} I & \mapsto \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto (x(t); y(t); z(t)) \end{array} \right.$
une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$ dont la trajectoire est incluse dans $\mathcal{S}$:

$$\forall t \in I, F(x(t); y(t); z(t)) = 0$$

Soit $M_0 = f\,(t_0)$ un point régulier pour f et pour $\mathcal{S}$.
Alors la tangente à f en M_0 est incluse dans le plan tangent à $\mathcal{S}$ en M_0.



Exemple Soit $R > 0$ et soit $h > 0$.

On considère l'hélice paramétrée par : $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = R\cos(t) \\ y(t) = R\sin(t) \\ z(t) = ht \end{array} \right.$

Cette courbe est tracée sur le cylindre d'équation

$$x^2 + y^2 = R^2$$

On introduit $f : t \mapsto (R\cos(t); R\sin(t); ht)$ et
$F : (x; y; z) \mapsto x^2 + y^2 - R^2$.
Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soit $M_0 = f\,(t_0)$ un point de l'hélice.
La tangente à l'hélice en M_0 est dirigée par

$$\overrightarrow{f'\,(t_0)} = (-R\sin(t_0); R\cos(t_0); h)$$

Elle est incluse dans le plan tangent au cylindre en M_0 qui, lui-même, est orthogonal à

$$\overrightarrow{\nabla} F\,(M_0) = (2R\cos(t_0); 2R\sin(t_0); 0)$$

Chapitre 29 : Courbes et Surfaces

Compétences

- $\star$ Pour une courbe définie par une équation de la forme $F(x,y)=0$, savoir que le gradient est un vecteur normal à la tangente en un point régulier (point où le gradient est non nul).
- $\star$ Etre capable d'en déduire l'équation de la tangente en un point régulier.
- $\star\star$ Pareil avec $F(x,y,z)=0$ et le plan tangent en un point régulier.

Proposition

- **Equation de la tangente** T en (x_0,y_0) un point régulier d'une courbe d'équation $F(x,y)=0$ avec F de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$:

$$M(x,y)\in T \iff \overrightarrow{M_0M}\perp \nabla F(x_0,y_0) \iff \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

- **Equation du plan tangent** $\mathcal{P}$ en (x_0,y_0,z_0) un point régulier d'une surface d'équation $F(x,y,z)=0$ avec F de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$:

$$M(x,y)\in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{M_0M}\perp \nabla F(x_0,y_0,z_0)$$

$$M(x,y)\in \mathcal{P} \iff \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

Exercice 29.1$\star$
Dans $\mathbb{R}^3$, considérons la surface d'équation $F(x,y,z)=0$ avec $F(x,y,z)=x^2-y^2-z$.
Donner l'équation du plan tangent au point $M_0(1,0,1)$ qui est bien dans la surface.

Exercice 29.2$\star$
Dans $\mathbb{R}^2$, considérons la courbe d'équation $F(x,y)=0$ avec $F(x,y)=g(x)-y$ où g est une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$.
Donner l'équation de la tangente en $M_0(x_0,y_0)$ et retrouver une formule connue.

Exercice 29.3$\star$
Dans $\mathbb{R}^2$ on considère la courbe C d'équation $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

1. Donner une équation de la tangente à C en $M_0(x_0,y_0)$ en un point $M_0\in C$.
2. Donner les points de C en lesquels la tangente à C est perpendiculaire à la tangente en $M_0(5,0)$.

Exercice 29.4$\star$
Dans $\mathbb{R}^3$ on considère la surface S d'équation $xy^2+yz^2+zx^2+2xyz+5=0$.
Donner une équation du plan tangent à S en $M_0(1,-1,2)$ après avoir vérifié que $M_0\in S$.

Exercice 29.5$\star\star$
On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé.
Pour tout $m\in\mathbb{R}$ on note $\mathcal{C}_m$ la courbe d'équation : $4x^2+9y^2+2(m-6)xy-24x-36y+36=0$.

1. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par les points $A(3,0)$ et $B(0,2)$.
2. Montrer que A et B sont les seuls points d'intersections de ces courbes.
3. Soit $m\neq 12$. Déterminer la tangente à $\mathcal{C}_m$ en A puis en B.
4. Déterminer la tangente à $\mathcal{C}_{12}$ en A puis en B.

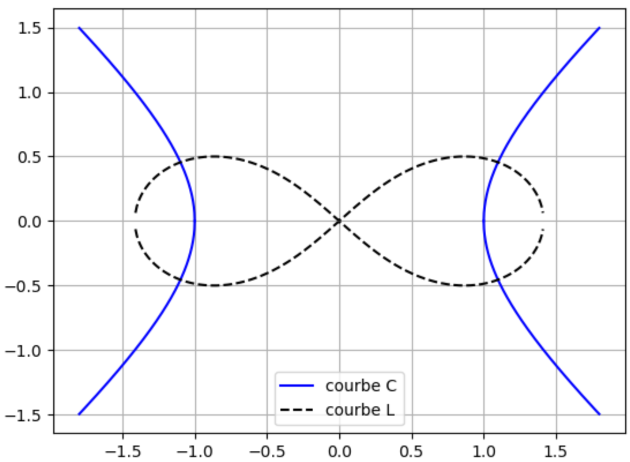
Exercice 29.6$\star\star$
On consid'ere la courbe C d'équation cartésienne $x^2+xy+y^2=1$.
Déterminer les équations des tangentes à C aux points d'intersection avec l'axe des ordonnées.

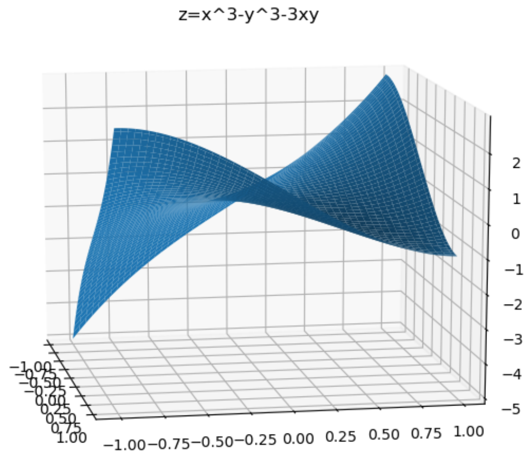
Exercice 29.7$\star\star$
On considère la surface d'équation (S) : $z=x^2+y^4$.

1. La surface (S) est-elle régulière ?
2. Déterminer l'équation du plan tangent à (S) en le point $A(1,0,1)$. Etudier la position de (S) par rapport à ce plan tangent.

Exercice 29.8 *Oral Centrale* ⋆⋆
On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé.
On note F_1 le point de coordonnées $(-1, 0)$ et F_2 le point de coordonnées $(1, 0)$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2 - y^2 = 1$.
On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des points M du plan vérifiant $d(M, F_1) * d(M, F_2) = 1$ où $d(M, N)$ est la distance euclidienne entre les points M et N.

1. Montrer que : $M(x, y) \in \mathcal{L} \iff (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$
2. Montrer que les ensembles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{C}$ possèdent des points d'intersections dont on déterminera les coordonnées.
3. Montrer qu'en un point d'intersection les tangentes à $\mathcal{L}$ et à $\mathcal{C}$ sont orthogonales.





Exercice 29.9⋆
Dans $\mathbb{R}^3$ on considère la surface S d'équation

$$x^3 - y^3 - 3xy = z$$

Donner une équation du plan tangent à S en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ en un point $M_0 \in S$.

Exercice 29.10 *Oral Mines Ponts* ⋆⋆
Dans $\mathbb{R}^3$ on considère la surface S d'équation $xy = z^2$.
Donner les points réguliers où les plans tangents contiennent la droite d'équations $x = 2$, $y - 2z = -2$.

Exercice 29.11⋆⋆
Dans $\mathbb{R}^3$ on considère la surface S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Déterminer les plans tangents à S orthogonaux à la droite dirigée par $\overrightarrow{u}(1, 2, 3)$.

Exercice 29.12⋆⋆*Oral CCP*
Dans $\mathbb{R}^3$ on considère la surface S d'équation $xyz = 1$.

1. Déterminer l'équation du plan tangent à (S) au point $M_0(1, 1, 1)$.
2. On note (P) ce plan tangent. Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale de O sur (P).

Exercice 29.13⋆*Oral CCP*
Soit S la surface d'équation : $z = xe^x + ye^y$. Déterminer les points de S en lesquels le plan tangent à S possède une équation de la forme $z = c$.

Exercice 29.14 *Oral Navale* ⋆⋆
Dans $\mathbb{R}^3$ on considère la surface S d'équation $x^2 - y^2 + z^2 = 1$.
Déterminer les points pour lesquels le plan tangent à S est parallèle au plan d'équation $z = 2x + y$.

30. Espaces probabilisés

I - Préliminaire : ensembles dénombrables

Définition Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to E$.
Un ensemble E est dit au-plus dénombrable si il est dénombrable ou fini.

Remarque
Si $\varphi : \mathbb{N} \to E$ est une bijection, alors φ permet de numéroter tous les éléments de E à l'aide d'entiers naturels.
Un ensemble dénombrable peut donc s'écrire sous la forme $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Propriété
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
- Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.
- une réunion finie d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}^2$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ (qui est assimilable à $\mathbb{Z}^{n^2}$) sont dénombrables.
- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Définition A toute famille au-plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ on associe sa somme $\sum_{i\in I} x_i \in [0; +\infty]$.

Elle est définie comme $sup \left\{ \sum_{i\in J} x_i \mid J\ fini\ et\ J \subset I \right\}$. Ce sup pouvant être $+\infty$.

On admet que pour tout découpage en paquets $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ on a $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} x_i \right)$.

Cette famille est dite sommable si $\sum_{i\in I} x_i < +\infty$.
En pratique, dans le cas positif, on peut découper, calculer et majorer les sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.
Par exemple pour montrer que $\sum_{i\in\mathbb{Z}} x_i$ converge on montrera que $\sum_{i\geqslant 0} x_i$ et $\sum_{i\geqslant 1} x_{-i}$ convergent.

Définition-Propriété
Une famille au-plus dénombrable (x_i) de nombres complexes est dite sommable si la famille $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est.
Si $I = \mathbb{N}$ la sommabilité équivaut à la convergence absolue.
En cas de sommabilité, on dispose des propriétés de linéarité, de croissance, de sommation par paquets, de produit de Cauchy et de théorème de Fubini (échange de l'ordre de deux sommes, mêmes infinies).
Si $|x_i| \leqslant y_i$ pour tout $i \in I$, la sommabilité de la famille de réels positifs $(y_i)_{i\in I}$ implique celle de $(x_i)_{i\in I}$.

II - Univers et événements

Définition
On appelle univers l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire ; on le note souvent Ω.

Exemples
- Pour le lancer d'un dé cubique, on pose $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Pour le lancer d'une pièce de monnaie, on pose $\Omega = \{P, F\}$.

Remarque
À partir d'un univers Ω, on sera amené à considérer des sous-ensembles de Ω. Par exemple, pour le lancer d'un dé cubique avec $\Omega = [\![1, 6]\!]$, on peut considérer $A = \{$ résultats pairs $\} = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{$ résultats impairs $\} = \{1, 3, 5\}$.

Notation Si Ω est un ensemble, alors on note $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des sous-ensembles de Ω.

Exemple Si $\Omega = \{a, b, c\}$, alors $\mathscr{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$.

Définition Soit $\mathscr{A}$ un ensemble de sous-ensembles de Ω. On dit que $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω si :
(i) Ω appartient à $\mathscr{A}$;
(ii) pour tout A élément de $\mathscr{A}$, le complémentaire $\bar{A}$ appartient aussi à $\mathscr{A}$;
(iii) pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, la réunion $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient aussi à $\mathscr{A}$.

Exemples : la tribu triviale : $\mathscr{A} = \{\varnothing, \Omega\}$ et la tribu pleine : $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$.

Vocabulaire
Un élément A d'une tribu $\mathscr{A}$ est appelé événement. En particulier, un événement est un sous-ensemble de Ω.
L'ensemble vide $\varnothing$ est appelé événement impossible. L'ensemble Ω est appelé événement certain.
Un singleton $\{\omega\}$ est appelé événement élémentaire.
Le complémentaire $\bar{A}$ d'un événement A est appelé événement contraire.
Deux événements A et B disjoints (c'est-à-dire tels que $A \cap B = \varnothing$) sont dits incompatibles.

Remarque pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements, un événement élémentaire ω vérifie

- $\omega \in \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ ssi $\exists n \in \mathbb{N}$, $\omega \in A_n$ ssi ω est dans au-moins l'un des événements A_n.
- $\omega \in \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\omega \in A_n$ ssi ω est dans tous les événements A_n.
- $\omega \in \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} A_k$ ssi $\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall k \geqslant n$, $\omega \in A_k$ ssi ω est dans tous les événements A_n à partir d'un certain rang.
- $\omega \in \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k$ ssi $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \geqslant n$, $\omega \in A_k$ ssi ω est dans une infinité d'événements A_n.

III - Espaces probabilisés

Définition Soit Ω un univers dénombrable et soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.
On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application $P : \mathscr{A} \to [0,1]$ telle que :
(i) $P(\Omega) = 1$;
(ii) pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements deux à deux incompatibles, $P\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

Exemple : probabilité uniforme

Si Ω est un univers fini, alors, pour tout événement A, on peut poser $P(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.

En particulier, les événements élémentaires $\{\omega\}$ sont ici équiprobables, puisque $P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.

Définition
On appelle espace probabilisé tout triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ où $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω et où P est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
Un évenement est dit presque sûr si il est de probabilité 1. Un événement est dit négligeable si il est de probabilité nulle.

Propriété On considère $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
- $\forall A, B \in \mathscr{A}, A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $\forall A \in \mathscr{A}, P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\varnothing) = 0$
- $\forall A, B \in \mathscr{A}, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $\forall A, B \in \mathscr{A}, A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$

Propriété Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'événements de $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

- Si $(\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1})$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$. (continuité croissante)
- Si $(\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$. (continuité décroissante)
- $P\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ (sous additivité)

Remarque En posant $B_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$ et $C_n = \bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k$, on a , par continuité (dé)croissante

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$$

IV - Probabilités conditionnelles

Dans tout ce paragraphe, on considère $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

Définition Soit A et B deux événements tels que $P(B) > 0$.
On appelle probabilité de A sachant B le nombre noté $P_B(A)$ ou $P(A \mid B)$ et défini par :

$$P_B(A) = P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Propriété : formule des probabilités composées
Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. On a :

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Définition On appelle système complet d'événements toute famille d'événements $(A_i)_{i \in I}$ telle que :

$$\forall i, j \in I, \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{et} \quad \bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$$

Définition On appelle système quasi-complet d'événements toute famille d'événements $(A_i)_{i \in I}$ telle que :

$$\forall i, j \in I, \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{et} \quad P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 1$$

Propriété : formule des probabilités totales, cas fini
Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système complet d'événements. Soit également B un événement. On a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) P(A_i)$$

avec, par convention, $P_{A_i}(B) P(A_i) = 0$ lorsque $P(A_i) = 0$.

Propriété : formule des probabilités totales, cas dénombrable
Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système quasi-complet d'événements. Soit également B un événement.
La série $\sum_{n \geqslant 0} P_{A_n}(B) P(A_n)$ converge et on a (avec la même convention) :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B) P(A_n)$$

Propriété : formule de Bayes

Soit A et B deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$. On a : $P(A \mid B) = \dfrac{P(B \mid A) P(A)}{P(B)}$

V - Événements indépendants

Dans tout ce paragraphe, on considère $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

Définition On dit que deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
Lorsque $P(B) > 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \mid B) = P(A)$.

Propriété Si A et B sont indépendant alors A et $\bar{B}$ aussi, tout comme $\bar{A}$ et $\bar{B}$...

Définition On dit que des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont indépendants si, pour toute partie I de $[\![1; n]\!]$,

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Remarque Si des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. Par contre, la réciproque est fausse en général.

Complement de cours chapitre 30 : Espaces probabilisés

1 Ensemble dénombrable, Univers et événements

$\propto$ Démonstration de cours 1 : $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Méthode Lorsque l'on vous demande de montrer que A est un événement il faut en général montrer que c'est une intersection et/ou une réunion (finie ou dénombrable) d'événements.

2 Espace probabilisé. Probabilités conditionnelles. Indépendance.

$\propto$ Démonstration de cours 2 : propriété de continuité croissante.

Exemple : dans un jeu de pile ou face infini avec une pièce équilibrée.
Soit A l'événement "on obtient pile au-moins deux fois". Montrons que $P(A) = 1$.
Pour cela on pose, pour $n \geqslant 2$, A_n : "avoir pile au-moins deux fois pile sur les n premiers lancers".
La suite (A_n) est une suite croissante d'événements car si on a eu au-moins deux fois pile sur les n premiers lancers alors on a forcément eu au-moins deux pile sur les $n+1$ premiers lancers.
De plus $P(A_n) = 1 - \dfrac{n+1}{2^n}$ pour tout $n \geqslant 2$ et $P(A) = P\left(\cup_{n\geqslant 2} A_n\right)$.
Par propriété de continuité croissante on a $P(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = 1$.

Exemple : pour l'événement $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m$ si on pose $B_n = \displaystyle\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m$ alors (B_n) est une suite décroissante d'événements et donc

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$$

$\propto$ Démonstration de cours 3 : formules des probabilités totales, cas dénombrable.

Remarque : si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ aussi. En effet

$$P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1-P(B)) = P(A)P(\overline{B})$$

Compétences

- $\star\star\star$ Savoir qu'un ensemble dénombrable est un ensemble en bijection avec $\mathbb{N}$ c'est à dire un ensemble dont les éléments peuvent être indexés par un indice $n \in \mathbb{N}$.
- $\star\star$ Savoir qu'une réunion (ou intersection) dénombrable d'évenements est un événement.
- ♠ Confondre disjoints et indépendants.
- $\star$ Savoir que si on a une réunion disjointe d'événements alors $P(\cup A_n) = \sum P(A_n)$.
- $\star\star$ Savoir que $P(\cup A_n) \leqslant \sum P(A_n)$.
- ♠ Dire que $P(\cup A_n) = \sum P(A_n)$ sans aucune hypothèse.
- $\star\star$ Savoir montrer que l'on a une suite croissante d'événements : pour montrer que $A_n \subset A_{n+1}$ on explique que si A_n est réalisé alors A_{n+1} aussi.
- $\star\star\star$ Connaître la propriété de continuité (dé)-croissante. Ainsi si on a une suite croissante d'événements on a $P(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.
- $\star$ Connaître la formule des probabilités conditionnelles.
- $\star\star$ Savoir écrire la probabilité d'une intersection avec des probabilités conditionnelles.
- $\star\star$ Savoir montrer que l'on a un système complet d'évenements : évenements deux à deux disjoints dont la réunion est Ω.
- $\star\star$ Penser, lorsque on a des expériences en deux temps, à la formule des probabilités totales en fonction de ce qui se passe sur la première étape de l'expérience.
- $\star$ Savoir la définition de l'indépendance.
- $\star$ Savoir calculer la probabilité d'une intersection lorsque les événements sont mutuellement indépendants.
- ♠ Croire que $P(B) = P_{A_1}(B) + P_{A_2}(B) + P_{A_3}(B)$ si $\{A_1, A_2, A_3\}$ est un système complet d'évenements.

Chapitre 30 : Espaces probabilisés

1 Ensemble dénombrable. Tribus

Exercice 30.1.1⋆
Justifier que $\mathbb{N}^*$ est dénombrable. Justifier que l'ensemble des entiers naturels pairs est dénombrable.
Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est un ensemble dénombrable.

Exercice 30.1.2⋆
Justifier que l'intersection de deux tribus sur Ω est une tribu sur Ω.

Exercice 30.1.3⋆⋆
Sachant que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, montrer que $]-1;1[$ n'est pas dénombrable.

2 Propriété de continuité (dé)croissante. Intersections/réunions infinies.

Exercice 30.2.1⋆
Montrer que si on lance un dé équilibré une infinité de fois il est presque sûr que "le 1 sortira".

Exercice 30.2.2⋆
On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 1. Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient impairs ?

Exercice 30.2.3⋆
Une urne contient une boule rouge et deux boules vertes. On effectue une infinité de tirages avec remise. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner la probabilité de R_n " on obtient la première boule rouge au nième tirage".
2. Donner la probabilité de S_n " on obtient au-moins une boule rouge sur les n premiers tirages".
3. Donner, de deux manières, la probabilité de T "on obtient au-moins un boule rouge sur l'infinité de tirages".

Exercice 30.2.4⋆⋆
Soient (A_n) une famille d'événements d'un espace probabilisé. On suppose que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} P(A_n)$ converge.
Montrer que la probabilité de l'événement "une infinité des A_n sont réalisés" est nulle.

Exercice 30.2.5⋆⋆⋆
Soient (A_n) une famille d'événements d'un espace probabilisé.

1. Montrer que $e^x \geqslant 1+x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. On suppose que les événements (A_n) sont indépendants et que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} P(A_n)$ diverge.
   Montrer que si $0 \leqslant n \leqslant N$ alors $P\left(\bigcap\limits_{m=n}^{N} \overline{A_m}\right) \leqslant exp\left(-\sum\limits_{m=n}^{N} P(A_m)\right)$.
   Montrer que la probabilité de l'événement "une infinité des A_n sont réalisés" est égale à 1.

Exercice 30.2.6⋆⋆
Deux archers A_1 et A_2 disputent un match. Ils tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce que l'un d'eux la touche. A_1 tire en premier. On note $p_1 \in]0;1[$ la probabilité que A_1 touche la cible. Idem pour p_2. On suppose les tirs indépendants.

1. Calculer la probabilité que A_1 l'emporte au rang $2n+1$ avec $n \in \mathbb{N}$ fixé.
2. Calculer la probabilité que A_2 l'emporte au rang $2n+2$ avec $n \in \mathbb{N}$ fixé.
3. Montrer qu'il est presque sûr que le jeu se termine.
4. Calculer $P(G_1)$ et $P(G_2)$ (avec G_i l'événement "le joueur i gagne"). Le jeu est-il équitable ?

Exercice 30.2.7⋆⋆
Une urne contient une boule rouge et une boule verte. On tire au hasard une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur. On répète infiniment cette expérience.

1. Ecrire une fonction python renvoyant la composition de l'urne après n étapes (n étant donné en argument).
2. Donner la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges.
3. Donner la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges.

Exercice 30.2.8$\star\star\star$
Une urne contient trois boules rouges et cinq boules vertes. On effectue une infinité de tirages d'une boule avec remise. On note A_n l'événement "on obtient pour la première fois deux boules rouges consécutives lors du nième tirage".

1. Ecrire une fonction python simulant n tirages et retournant l'indice (si il y en a un) de l'événement A_i qui est réalisé (n étant donné en argument).
2. En utilisant les deux premières parties, donner une relation entre $P(A_{n+2})$, $P(A_{n+1})$ et $P(A_n)$.
3. Montrer qu'il est presque sûr d'avoir deux boules rouges consécutives.

Exercice 30.2.9$\star$
On dispose d'une urne avec initialement une boule rouge et une boule orange.
On effectue des tirages successifs d'une boule de la manière suivante :
— si la boule est orange on a gagné.
— si la boule est rouge on la remet dans l'urne avec un autre boule rouge.
On note G_n l'événement "on gagne exactement au nième tirage" pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $P(G_n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer qu'il est presque sûr de gagner.

Exercice 30.2.10$\star$
Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'événements d'un espace probabilisé.
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k) \geqslant P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k) - (k-1)$.
on montrera le cas particulier $k = 2$ pour débuter

Exercice 30.2.11$\star$
Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'événements mutuellements indépendants d'un espace probabilisé.
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = 1 - \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(1 - P(A_i))$.

3 Calculs de probabilités

Exercice 30.3.1$\star$
Une urne contient n boules blanches et deux boules noires. On effectue des tirages successifs et sans remise.
Soit $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Déterminer la probabilité de l'événement "la première boule noire apparaît au kième tirage".

Exercice 30.3.2$\star\star$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On effectue des tirages successifs et sans remise de deux boules.
Montrer que la probabilité de "les n tirages sont constitués d'une boule blanche et d'une boule noire" est $\dfrac{2^n}{\binom{2n}{n}}$.

Exercice 30.3.3$\star\star$
On dispose d'une pièce dont la proba de pile est $p \in]0; 1[$. On la lance n fois avec $n \geqslant 3$.

1. Donner la probabilité d'avoir le premier pile au n-ième lancer.
2. Donner la probabilité d'avoir le second pile au n-ième lancer.
3. Donner la probabilité d'avoir le troisième pile au n-ième lancer.

Exercice 30.3.4$\star\star$ Mines Telecom
On lance une pièce dont la probabilité de pile est $2/3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n la probabilité d'avoir 2 piles consécutifs pour la première fois au n-ième lancer.

1. Calculer a_1 et a_2.
2. Avec les probabilités totales, montrer que $a_{n+2} = \dfrac{1}{3}a_{n+1} + \dfrac{2}{9}a_n$.
3. Montrer que le jeu de termine presque surement.

Exercice 30.3.5$\star\star\star$
On dispose d'une pièce équilibrée. On la lance indéfiniment. On note, pour $n \geqslant 3$, A_n : "avoir au-moins une fois la séquence pile-pile-face sur les n premiers lancers"

1. Pour $n \geqslant 5$ justifier que $P(A_{n+1}) = P(A_n) + \dfrac{1}{8}P\left(\overline{A_{n-2}}\right)$.
2. Justifier que $P(A_n)$ possède une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et trouver cette limite.

Exercice 30.3.6$\star$
On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois noires et l'urne U_2 contient 4 blanches et 3 noires. On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule est blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 sinon dans U_2. On note p_n la probabilité que " la boule tirée au nième tirage est blanche".
Donner p_1, montrer que $p_{n+1} = (-6/35)p_n + (4/7)$ et donner p_n en fonction de n.

Exercice 30.3.7$\star$
Deux urnes contiennent respectivement 4 boules rouges et 3 boules vertes, 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire au hasard une boule dans la première (sans l'y remettre), puis on procède au tirage d'une deuxième boule, dans la même urne si la première boule tirée est rouge, dans l'autre urne si la première boule tirée est verte.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules vertes (resp. deux boules rouges) ?
2. On sait que les deux boules tirées sont de même couleur. Quelle est la probabilité qu'elles soient rouges ?
3. Calculer la probabilité pour obtenir une boule verte et une boule rouge

Exercice 30.3.8$\star\star\star$ *Oral Centrale PSI*
Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. On a initialement une urne avec b boules blanches et b boules noires. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise. A chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on rajoute a boules blanches dans l'urne.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : " on n'a tiré que des boules blanches au cours des n premiers tirages"

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si on note $p_n = P(A_n)$, déterminer le lien entre p_n et p_{n+1}.
2. Déterminer la limite de p_n. *on pourra utiliser une série*

Exercice 30.3.9$\star\star$
On considère $n+1$ urnes U_0,...,U_n telles que U_k contiennent k boules blanches et $n-k$ noires. On choisit une urne au hasard et on effectue N tirages avec remise au hasard dans cette urne. Donner la probabilité d'avoir uniquement des boules blanches.
Quelle est la limite de cette probabilité lorque n tend vers $+\infty$?

Exercice 30.3.10$\star\star$ Mines Ponts
Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$. Soient $U_0, ..., U_p$ des urnes où U_i contient i boules blanches et $p-i$ boules noires pour chaque $i \in \{0, ..., p\}$. On note A_k l'événement "avoir tiré k boules blanches après le choix au hasard d'une urne et le tirage successif de n boules avec remise dans cette urne".

1. Déterminer la probabilité de A_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} kP(A_k)$ si cette somme existe.
3. Si $k \in \{0, ..., n\}$, montrer que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} P(A_k) = \binom{n}{k}\int_0^1 x^a(1-x)^b dx$ où $a, b \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.

Exercice 30.3.11$\star\star$
On considère n urnes U_1,...,U_n telles que U_k contiennent k boules blanches et n noires. On choisit une urne au hasard et on effectue un tirage dans cette urne. Donner la probabilité d'avoir une boule noire ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 30.3.12$\star\star$
On considère une urne qui contient 10 boules blanches et 30 noires. On effectue des tirages successifs dans cette urne avec à chaque tirage : si la boule est blanche on la remet dans l'urne, si la boule est noire on ne la remet pas dans l'urne. Soit $n \geqslant 2$. Donner la probabilité d'avoir tiré une seule boule noire après n tirages.

Exercice 30.3.13$\star\star$
On tire au hasard, selon une loi uniforme, un entier compris entre 1 et n. Soit d un diviseur de n.
Donner la probabilité de tirer un multiple de d.

Exercice 30.3.14$\star$
On dispose de deux dés équilibrés à 6 faces. On s'intéresse aux événements :
A "le dé 1 donne un résultat pair", B "le dé 2 donne un résultat impair", C "la somme des résultats est pair".
Montrer que A, B, C sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

Exercice 30.3.15$\star$
On considère $\Omega = \mathbb{N}$ et on pose $P(\{n\}) = \dfrac{a}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner la valeur de a.
2. Donner la probabilité de $A = \{2n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et de $B = \{2n+1,\ n \in \mathbb{N}\}$.
3. A et B sont-ils indépendants ? incompatibles ?

Exercice 30.3.16$\star\star\star$Mines Ponts
Soient A et B deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{P}(\{1, ..., n\})$ (l'ensemble des parties de $\{1, ..., n\}$), indépendantes et de loi uniforme. Calculer $P(A \subset B)$.

Exercice 30.3.17$\star\star$
On considère $\Omega = \mathbb{N}^*$ et on pose $P(\{n\}) = \dfrac{a}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner la valeur de a.
2. Donner la probabilité de l'ensemble des entiers naturels pairs.
3. Soit $p \in \mathbb{N}$. Donner la probabilité de $A_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n > p\}$.

Exercice 30.3.18$\star\star\star$
On considère une population dans laquelle la probabilité d'avoir exactement n enfants est $(1/3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que les naissances d'une fille ou d'un garçon sont équiprobables.

1. Donner la probabilité de ne pas avoir d'enfant.
2. Donner la probabilité d'avoir plus de trois enfants.
3. Soit $k \geqslant 1$. Donner la probabilité d'avoir exactement k garçons. Pour les 5/2 : simplifier la somme obtenue.

Exercice 30.3.19$\star\star$
On considère trois enfants qui possèdent un ballon. Au temps $t = 0$ l'enfant A possède la balle.
Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'étape n

— si A possède la balle alors il la garde avec probabilité $\dfrac{1}{3}$ et la donne à B avec probabilité $\dfrac{2}{3}$.
— si B possède la balle alors il la garde avec probabilité $\dfrac{1}{2}$, la donne à A avec probabilité $\dfrac{1}{4}$ et la donne à C avec proba $\dfrac{1}{4}$.
— si C possède la balle il la garde.

On note A_n l'évenement A possède la balle à l'étape n et on note a_n sa probabilité. De même pour B_n et C_n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. En utilisant une réduction matricielle exprimer a_n et b_n en fonction de n. Et c_n ?

Exercice 30.3.20$\star\star\star$
Soit $s \in]1; +\infty[$. On considère $\Omega = \mathbb{N}^*$ et on pose $P(\{n\}) = \dfrac{a}{n^s}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

1. Donner la valeur de a.
2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Donner la probabilité de l'évenement A_m : " être un multiple de m".
3. Montrer que les événements A_p, pour $p \in \mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers, sont mutuellement indépendants.
4. Montrer que $\zeta(s) = \displaystyle\prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$.

Exercice 30.3.21$\star\star\star$Mines et Centrale
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n le nombre de permutations de $\{1, .., n\}$ sans point fixe (pour rappel une permutation de $\{1, ..., n\}$ est une bijection de $\{1, ..., n\}$ sur $\{1, ..., n\}$). On pose $D_0 = 1$ par convention.
Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note p_k la probabilité qu'une permutation de $\{1, ..., k\}$ choisie au hasard soit sans point fixe. On pose $p_0 = 1$ par convention.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{(n-k)!} = 1$. *on dénombrera les différentes permutations de* $\{1..., n\}$.
2. En déduire que : $\forall x \in]-1; 1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = \frac{e^{-x}}{1-x}$.
3. Montrer alors que p_n tend vers e^{-1} si n tend vers $+\infty$.

31. Variables aléatoires discrètes

Dans tout ce chapitre, on considère $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

I - Variables aléatoires discrètes

Définition Soit E un ensemble et soit $X : \Omega \to E$ une application.
On dit que X est une variable aléatoire discrète si :
(i) pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ appartient à $\mathscr{A}$;
(ii) l'image $X(\Omega)$ est finie ou dénombrable.

Notations
Pour tout $x \in X(\Omega)$, l'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ est noté simplement $\{X = x\}$ ou $(X = x)$.
Pour tout $U \subset X(\Omega)$, l'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in U\}$ est noté simplement $\{X \in U\}$ ou $(X \in U)$.

Vocabulaire Déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète X, c'est :
(i) déterminer $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X ;
(ii) déterminer les nombres $P(X = x)$ pour tout x dans $X(\Omega)$.

Vocabulaire-Notation
- Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle discrète.
- Lorsque deux variables X et Y suivent la même loi on note $X \sim Y$
- Si f est une fonction définie au-moins sur $X(\Omega)$ et si $X \sim Y$ on a $f(X) \sim f(Y)$.

II - Espérance

Dans tout ce paragraphe, on considère $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ des variables aléatoires réelles discrètes.

Définition (cas fini) On suppose que X est à valeurs dans un ensemble fini $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

On appelle espérance de X le nombre noté $E(X)$ et défini par : $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)\, x_i$.

Définition (cas dénombrable) On suppose que X est à valeurs dans un ensemble dénombrable $X(\Omega) = \{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$.

On dit que X est d'espérance finie si la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} P(X = x_n)\, x_n$ converge absolument.

Auquel cas, on appelle espérance de X le nombre noté $E(X)$ et défini par : $E(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)\, x_n$.

On adopte la convention $xP(X = x) = 0$ lorsque $x = +\infty$ et $P(X = +\infty) = 0$.

Interprétation L'espérance de X est la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leur probabilité.

Remarque la véritable définition demande la sommabilité de la famille $(x_i P(X = x_i))_{i \in I}$ mais le programme ne souhaite pas compliquer les choses en ce sens.

Propriété On suppose que X et Y sont d'espérance finie.
- $\forall a \in \mathbb{R}, E(a) = a$ (espérance d'une constante)
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$ (linéarité)
- $X \geqslant 0 \Rightarrow E(X) \geqslant 0$ (positivité)
- $X \leqslant Y \Rightarrow E(X) \leqslant E(Y)$ (croissance)

Propriété Si X est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et si X est d'espérance finie, alors $E(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.

Propriété Si $|X| \leqslant Y$ et si Y admet une espérance finie alors X admet une espérance finie.

Propriété
Si X est positive et d'espérance nulle alors $\{X = 0\}$ est un évenement presque sûr.

Théorème du transfert (cas fini)
On suppose que X est à valeurs dans $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ et on considère $f: X(\Omega)\to\mathbb{R}$ une fonction.
L'espérance de $f(X)$ est donnée par : $E(f(X))=\sum_{i=1}^{n}P\left(X=x_i\right)f\left(x_i\right)$.

Théorème du transfert (cas dénombrable)
On suppose que X est à valeurs dans $X(\Omega)=\{x_n;n\in\mathbb{N}\}$ et on considère $f: X(\Omega)\to\mathbb{R}$ une fonction.
Alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0}P\left(X=x_n\right)f\left(x_n\right)$ converge absolument.
Auquel cas, l'espérance de $f(X)$ est donnée par : $E(f(X))=\sum_{n=0}^{+\infty}P\left(X=x_n\right)f\left(x_n\right)$.

Exemple

Avec les mêmes notations, si X^2 est d'espérance finie, alors : $E\left(X^2\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}P\left(X=x_n\right)x_n^2$.

Propriété Si X^2 est d'espérance finie, alors X est aussi d'espérance finie.

Vocabulaire Soit $k\in\mathbb{N}$. Si X^k est d'espérance finie, alors on appelle moment d'ordre k le nombre $E\left(X^k\right)$.

Propriété : inégalité de Markov Si X admet une espérance, alors :

$$\forall a\in\mathbb{R}_+^*, P(|X|\geqslant a)\leqslant\frac{E(|X|)}{a}$$

III - Variance

Dans tout ce paragraphe, on considère $X:\Omega\to\mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète.

Définition On suppose que X^2 est d'espérance finie.
- On appelle variance de X le nombre noté $V(X)$ et défini par : $V(X)=E\left((X-E(X))^2\right)=E\left(X^2\right)-E(X)^2$.
- On appelle écart type de X le nombre noté $\sigma(X)$ et défini par : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Interprétation La variance est un indicateur de dispersion : elle indique si les valeurs prises par X sont plus ou moins éloignées de l'espérance $E(X)$.

Propriété On suppose que X admet une variance.
- $\forall a\in\mathbb{R}, V(a)=0$
- $\forall a,b\in\mathbb{R}, V(aX+b)=a^2V(X)$
- $\forall a,b\in\mathbb{R}, \sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

Remarque
On dit que X est centrée si X admet une espérance et si $E(X)=0$.
On dit que X est réduite si X admet une variance et si $V(X)=1$.
Si $\sigma(X)>0$, alors la variable aléatoire $X^*=\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Propriété : inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Si X admet une variance, alors :

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*, P(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

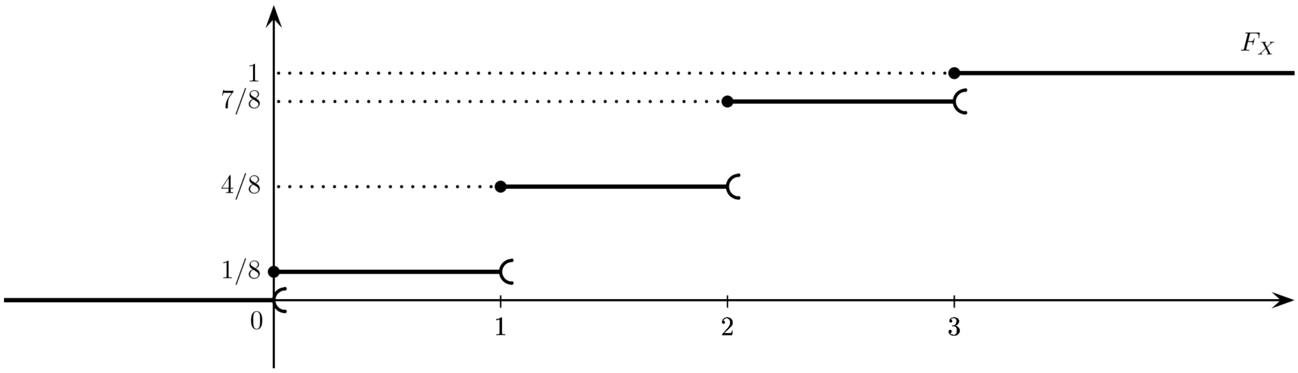
IV - Fonction de répartition

Dans tout ce paragraphe, on considère $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ des variables aléatoires réelles discrètes.

Définition On appelle fonction de répartition de X la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leqslant x)$$

Exemple Supposons $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ avec $P(X=0) = \frac{1}{8}, P(X=1) = \frac{3}{8}, P(X=2) = \frac{3}{8}$ et $P(X=3) = \frac{1}{8}$ alors



Propriété La fonction F_X est croissante sur $\mathbb{R}$ et on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

Propriété Les variables aléatoires X et Y ont même loi si et seulement si $F_X = F_Y$.

V - Série génératrice

Dans tout ce paragraphe, on considère $X : \Omega \to \mathbb{N}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Propriété Le rayon de convergence R_X de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} P(X=n)t^n$ est au moins égal à 1 .
De plus cette série converge normalement sur $[-1;1]$.

Définition On appelle série génératrice de X la fonction $G_X :]-R_X, R_X[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]-R_X, R_X[, G_X(t) = E\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n$$

Remarque $G_X(1) = 1$, $G_X(-1)$ existe et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.

Propriété

- La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si G_X est dérivable en 1. Auquel cas $G'_X(1) = E(X)$.
- La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.
  Auquel cas $G''_X(1) = E(X(X-1))$ et donc $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$.

Propriété Les variables aléatoires X et Y ont même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.

VI - Lois usuelles

VI - 1) Loi uniforme

Définition Soit E un ensemble fini non vide.
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur E si $X(\Omega) = E$ et si :

$$\forall x \in E, P(X = x) = \frac{1}{\text{Card}(E)}$$

Auquel cas, on note $X \sim \mathscr{U}(E)$.

VI - 2) Loi de Bernoulli

Soit $p \in [0, 1]$ et soit $q = 1 - p$.

Définition On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et si :

$$P(X = 1) = p \text{ et } P(X = 0) = 1 - p$$

Auquel cas, on note $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Propriété Soit $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors

- $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$,
- pour tout $t \in \mathbb{R}, G_X(t) = q + pt$.

VI - 3) Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p \in [0, 1]$ et soit $q = 1 - p$.

Définition On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et si :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Auquel cas, on note $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

Interprétation X représente le nombre de succès dans une répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.

Propriété Soit $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, alors

- $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$,
- pour tout $t \in \mathbb{R}, G_X(t) = (q + pt)^n$.

VI - 4) Loi géométrique

Soit $p \in [0, 1]$ et soit $q = 1 - p$.

Définition
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et si :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

Auquel cas, on note $X \sim \mathscr{G}(p)$.

Interprétation X représente le rang du premier succès dans une répétition illimitée d'expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.

Propriété Soit $X \sim \mathscr{G}(p)$, alors

- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X > k) = (1 - p)^k$,
- $E(X) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = \dfrac{1 - p}{p^2}$,
- pour tout $t \in \left] -\dfrac{1}{q}, \dfrac{1}{q} \right[, G_X(t) = \dfrac{pt}{1 - qt}$,

VI - 5) Loi de Poisson

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Définition
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Auquel cas, on note $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

Propriété Soit $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, alors

- $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$,
- pour tout $t \in \mathbb{R}, G_X(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda t}$,

Complement de cours chapitre 31 : Variables aléatoires

2 et 3 Espérance - Variance

Proposition Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors :

X admet une espérance ssi la série $\sum_{n\geqslant 1} P(X\geqslant n)$ converge. Dans ce cas $\boxed{E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty} P(X\geqslant n)}$

$\propto$ Démonstration de cours 1

$\propto$ Démonstration de cours 2 Si X^2 est d'espérance finie alors X est aussi d'espérance finie.

$\propto$ Démonstration de cours 3 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

4 Fonction de répartition

$\propto$ Démonstration de cours 4 : F_X est croissante et tend vers 1 en $+\infty$.

Remarque ♡ : si $X(\Omega)=\{x_i \mid i\in\mathbb{N}\}$ alors on a, pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, $P(X=x_i)=F_X(x_i)-F_X(x_{i-1})$.

5 Série génératrice

$\propto$ Démonstration de cours 5 : Si X admet une espérance finie alors G_X est dérivable en 1.

6 Lois usuelles

$\propto$ Démonstration de cours 6 : espérance, variance et fonction génératrice d'une loi $\mathcal{U}(\{1,...,n\})$.

$\propto$ Démonstration de cours 7 : espérance, variance et fonction génératrice d'une loi de Bernoulli.

$\propto$ Démonstration de cours 8 : espérance, variance et fonction génératrice d'une loi Binomiale.

$\propto$ Démonstration de cours 9 : espérance, variance et fonction génératrice d'une loi géométrique.

$\propto$ Démonstration de cours 10 : espérance, variance et fonction génératrice d'une loi de Poisson.

Simulation ♡

```python
import random as rd

# simulation de loi uniforme sur {1,..,n}

def uniforme(n):
    x=rd.randint(1,n+1)
    return(x)

# simulation de la loi de Bernoulli

def bernoulli(p) :
    x=rd.random()
    if x<p :   # modélisation du succès
        return(1)
    else :  # modélisation de l'échec
        return(0)
```

```python
# simulation de la loi Binomiale

def binomiale(n,p) :
    S=0    # nombre de succès
    for k in range(n):
        x=rd.random()
        if x<p :   # modélisation du succès
            S=S+1
    return(S)

# simulation de la loi Géométrique

def geometrique(p) :
    x=rd.random()     # première expérience
    S=1               # compteur d'expériences
    while x>p:
        x=rd.random()
        S=S+1
    return(S)
```

32. Couples de variables aléatoires

Dans tout ce chapitre, on considère $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
On considère également $X, Y, X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2$ des variables aléatoires réelles discrètes.

I - Loi conjointe, lois marginales

Vocabulaire

- La loi d'un couple (X, Y) est appelée la loi conjointe de X et Y.
  Elle est définie par la donnée des nombres $P(X = x \text{ et } Y = y)$ (aussi notés $P(X = x,\ Y = y)$) pour tout x dans $X(\Omega)$ et pour tout y dans $Y(\Omega)$.
  On peut aussi définir la loi d'un triplet ou d'un n-uplet de manière général.
- La loi de X est appelée la première loi marginale de (X, Y). La loi de Y est appelée la seconde loi marginale de (X, Y).

Cas particulier
Si X et Y prennent un nombre fini de valeurs, alors on peut représenter la loi du couple (X, Y) à l'aide d'un tableau.
Posons $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_m\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1; y_2; \ldots; y_n\}$.

	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	Loi de X
x_1	$P(X = x_1 \text{ et } Y = y_1)$	$P(X = x_1 \text{ et } Y = y_2)$	$\cdots$	$P(X = x_1 \text{ et } Y = y_n)$	$\xrightarrow{+} P(X = x_1)$
x_2	$P(X = x_2 \text{ et } Y = y_1)$	$P(X = x_2 \text{ et } Y = y_2)$	$\cdots$	$P(X = x_2 \text{ et } Y = y_n)$	$\xrightarrow{+} P(X = x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	$P(X = x_m \text{ et } Y = y_1)$	$P(X = x_m \text{ et } Y = y_2)$	$\cdots$	$P(X = x_m \text{ et } Y = y_n)$	$\xrightarrow{+} P(X = x_m)$
Loi de Y	$+\downarrow$ $P(Y = y_1)$	$+\downarrow$ $P(Y = y_2)$	$\cdots$	$+\downarrow$ $P(Y = y_n)$	Somme égale à 1

La connaissance de la loi conjointe permet d'obtenir les lois marginales.
Par contre, la connaissance des lois marginales ne suffit pas en général pour obtenir la loi conjointe.

Cas général Supposons que $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont des ensembles finis ou dénombrables.
La famille $(Y = y)_{y \in Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales, pour tout x dans $X(\Omega)$:

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x \text{ et } Y = y)$$

Remarque
Pour étudier un couple (X, Y), on peut aussi s'intéresser à la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.
Plus précisément, pour tout x dans $X(\Omega)$ (tel que $P(X = x) \neq 0$) et pour tout y dans $Y(\Omega)$, on s'intéresse aux nombres :

$$P_{(X=x)}(Y = y) = \frac{P(X = x \text{ et } Y = y)}{P(X = x)}$$

II - Variables aléatoires indépendantes

Définition Des variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes , ce que l'on note $X \perp\!\!\!\perp Y$, si :

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), P(X = x \text{ et } Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Définition
Des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont dites indépendantes si : $\forall x_1 \in X_1(\Omega), \forall x_2 \in X_2(\Omega), \ldots, \forall x_n \in X_n(\Omega)$,

$$P(X_1 = x_1 \text{ et } X_2 = x_2 \text{ et } \ldots \text{ et } X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \ldots P(X_n = x_n)$$

Propriété Si X et Y sont indépendantes, alors :

$$\forall A \subset X(\Omega), \forall B \subset Y(\Omega), P(X \in A \text{ et } Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Cela se généralise au cas de n variables indépendantes.

Exemple
En choisissant $A =]-\infty, x]$ et $B = [y, +\infty[$, on obtient : $P(X \leqslant x \text{ et } Y > y) = P(X \leqslant x)P(Y > y)$.

Propriété Soient f et g deux applications définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
Si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont aussi indépendantes.
Cela se généralise au cas de n variables indépendantes et n fonctions.

Exemple Si X et Y sont indépendantes, alors X^2 et $Y+1$ sont aussi indépendantes.

Propriété Si X et Y sont indépendantes et si elles admettent une espérance, alors XY admet une espérance et :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Cela se généralise au cas de n variables indépendantes.

Corollaire
Si X et Y sont indépendantes et si elles admettent une variance, alors $X+Y$ admet une variance et :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Propriété Si X et Y sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors

$$G_{X+Y} = G_X G_Y$$

Cela se généralise au cas de la somme de n variables indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition
On dit qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires est i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées) si les variables sont indépendantes et si toutes les variables sont de même loi.

Exemple Lors d'une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, on a une suite i.i.d. de variables de loi $\mathcal{B}(1/2)$.

Remarque Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors elles sont deux à deux indépendantes. Par contre, la réciproque est fausse en général.

Propriété : Lemme des coalitions Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$.
Soient f et g deux applications définies respectivement sur $X_1(\Omega) \times \cdots \times X_k(\Omega)$ et $X_{k+1}(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$.
Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \ldots, X_k)$ et $g(X_{k+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.
Cela se généralise au cas de plusieurs fonctions.

Exemple Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1}$ et X_n sont indépendantes.

III - Covariance

Dans tout ce paragraphe, on suppose que les variables aléatoires $X, Y, X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2$ admettent une variance.

Définition Sous réserve d'existence
On appelle covariance de X et Y le nombre défini par :

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Théorème du transfert Sous réserve d'existence

$$E(XY) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \sum_{y_j \in Y(\Omega)} x_i y_j P(X = x_i,\ Y = y_j)$$

Cela se généralise à n variables aléatoires discrètes.
Remarque

- $\operatorname{Cov}(X,X) = V(X)$
- Si X et Y sont indépendantes, alors $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$, mais la réciproque est fausse en général.

Propriété

- $V(X+Y) = V(X) + 2\operatorname{Cov}(X,Y) + V(Y)$
- $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$
- Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont deux à deux indépendantes, alors $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$.

Propriété La covariance est une application bilinéaire symétrique.

Propriété : inégalité de Cauchy-Schwarz Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie alors XY l'est aussi et

$$(E(XY))^2 \leqslant E\left(X^2\right) E\left(Y^2\right)$$

IV - Retour sur les lois usuelles

Propriété Soit $p \in [0,1]$ et soit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$.
Si $X_1 \sim \mathscr{B}(n_1, p)$, si $X_2 \sim \mathscr{B}(n_2, p)$ et si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim \mathscr{B}(n_1 + n_2, p)$.

Corollaire Soit $p \in [0,1]$.

Si $X_i \sim \mathscr{B}(p)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathscr{B}(n,p)$.

Propriété Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+^*$.
Si $X_1 \sim \mathscr{P}(\lambda_1)$, si $X_2 \sim \mathscr{P}(\lambda_2)$ et si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

V - Loi faible des grands nombres

Propriété
Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de variance finie.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = E(X_1)$. On a alors :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \qquad P\left(\left|\frac{1}{n} S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(X_1)}{n\varepsilon^2} \qquad \text{donc} \qquad P\left(\left|\frac{1}{n} S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Idée de la démonstration on applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $\frac{1}{n} S_n$.

Complement de cours chapitre 32

$\boxed{\propto \text{ Démonstration de cours 1}}$: Si X et Y sont indépendantes et si X et Y admettent une variance alors $X+Y$ admet une variance et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

$\boxed{\propto \text{ Démonstration de cours 2}}$: Si X et Y sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors $G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t)$ pour tout $t \in [-1; 1]$.

$\boxed{\propto \text{ Démonstration de cours 3}}$: Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$ sont indépendantes alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$

$\boxed{\propto \text{ Démonstration de cours 4}}$: Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ sont indépendantes alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

$\boxed{\propto \text{ Démonstration de cours 5}}$: Loi faible des grands nombres.

Chapitres 31 et 32 : Variables aléatoires

Compétences

- ⋆ Savoir que donner la loi d'une variable aléatoire discrète (v.a.d.) consiste à donner son univers et la probabilité de chaque issue de l'univers.
- ♠♠♠ Si X est une v.a. écrire dans sa copie $P(X)$ en pensant que cela a un sens !
- ♠ Si X est une v.a. avoir "du X" dans le résultat d'une probabilité.
- ⋆⋆ Savoir que X est un v.a. **discrète** si son univers est fini ou dénombrable. Ainsi son univers s'écrit $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ OU $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.
- ♠ Croire que si l'univers est infini on a forcément $X(\Omega) = \mathbb{N}$
- ⋆⋆ Savoir que si X est une v.a.discrète alors les ensembles $\{w \in \Omega | X(w) > a\}$, $\{w \in \Omega | b \leqslant X(w) \leqslant a\}$ OU $\{w \in \Omega | X(w) = a\}$ sont des événements.
- ⋆ Savoir que X admet une espérance ssi la série $\sum x_k P(X = x_k)$ converge absolument.
- ♠ Oublier le mot absolument dans la définition précédente.
- ♠ Croire que $E(X) = \sum kP(X = k)$ peu importe l'univers de X.
- ⋆ Connaître les propriétés de l'espérance (linéarité et croissance)
- ⋆ Connaître le th du transfert. Sans oublier qu'il faut montrer que la série converge absolument pour justifier l'existence.
- ♠ Ecrire (par exemple) $E(1/X) = 1/E(X)$ OU $E(1/X) = \sum \frac{1}{k} P(X = \frac{1}{k})$
- ⋆⋆ Savoir montrer que si $E(X^2)$ existe alors $E(X)$ aussi (car on a $|x_n| \leqslant \frac{1 + x_n^2}{2}$)
- ⋆⋆ Connaître l'inégalité de Markov $P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$ avec ses hypothèses : X v.a.d. positive qui admet une espérance et $a > 0$. Savoir la démontrer.
- ⋆ Connaître les propriétés de la variance : positivité et $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
- ⋆⋆ Connaître l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev $P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$ avec ses hypothèses : X v.a.d. qui admet une variance et $a > 0$.
- ⋆⋆ Savoir que si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ alors $P(X = n) = P(X \geqslant n) - P(X \geqslant n + 1)$ car on a $\{X \geqslant n\} = \{X \geqslant n + 1\} \cup \{X = n\}$ et cette réunion est disjointe.
- ⋆⋆ Savoir montrer que si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ alors $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$.
- ⋆⋆ Savoir calculer $P(X\ pair)$ en faisant une somme de cas disjoints.
- ♠ Ecrire $P(X\ pair) = P(X = 2k)$
- ⋆ Connaître la définition de la série génératrice pour X v.a.d. telle que $X(\omega) \subset \mathbb{N}$.
- ⋆ Savoir justifier que son rayon de convergence est au moins égal à 1 (car $G_x(1)$ converge)
- ⋆⋆ Savoir que la série génératrice caractèrise la loi : si $G_X = G_Y$ alors X et Y ont même loi (CE QUI NE VEUT PAS DIRE QUE $X = Y$).
- ⋆⋆ Connaître le lien entre $G'_X(1)$, $G''_X(1)$, espérance et variance.
- ⋆ Connaître les 5 lois usuelles (Uniforme, Bernoulli, Binomiale, Géométrique, Poisson) : univers, loi, espérance, variance, série génératrice.
- ♠ Oublier le mot indépendant dans la rédaction d'une loi Binomiale ou d'une loi géométrique.
- ⋆ Savoir qu'une somme de n v.a. indépendantes de loi de Bernoulli de même paramètre est une v.a. de loi Binomiale.
- ⋆⋆ Savoir qu'une somme de 2 v.a. indépendantes de loi de Poisson est une v.a. de loi Poisson dont le paramètre est la somme des paramètres (preuve par les série génératrices par exemple).
- ⋆⋆ Savoir qu'une somme de 2 v.a. indépendantes de loi Binomiale de même paramètre p est une v.a. de loi Binomiale (preuve par les série génératrices par exemple).
- ⋆⋆ Savoir trouver la loi marginale de X à partir de la loi du couple (X, Y) en utilisant le système complet d'événements $\{Y = k\}_{k \in Y(\Omega)}$.
- ⋆⋆ CLASSIQUE : Savoir calculer $P(X = Y)$ ou $P(X \leqslant Y)$ avec la même idée.
- ⋆⋆ Savoir que l'on trouve la loi conjointe par trois méthodes : calcul de $P(X = k \cap Y = j)$ par utilisation de l'indépendance, par utilisation des probabilités conditionnelles, par traduction à l'aide d'événements élémentaires (type $P_1 \cap P_2 ... \cap P_{k+j}$)
- ⋆⋆ Connaître le lemme des coalitions.
- ⋆⋆ Savoir que si $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille de v.a.d. mutuellements indépendantes alors l'espérance du produit est le produit des espérances (sous réserve d'existence) et la variance d'une somme est la somme des variances (sous réserve d'existence)
- ⋆⋆ Savoir que si $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille de v.a.d. mutuellements indépendantes alors $G_{X_1 + ... + X_n}$ est égal à $G_{X_1} G_{X_2} ... G_{X_n}$.
- ⋆⋆ Connaître la formule de la covariance.
- ⋆ Savoir que si X et Y sont indépendantes alors $Cov(X, Y) = 0$. ♠ Penser que la réciproque est vraie !
- ⋆⋆⋆ Connaître la formule de la variance de $X_1 + ... + X_n$ avec la somme double avec les covariances.
- ⋆⋆⋆ Connaître la loi faible des grands nombres. Savoir la démontrer.

1 Lois de probabilités

Exercice 31.1.1$\star$
Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(X = k) = \dfrac{a}{k(k+2)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Donner la valeur de a. X admet-elle une espérance ? une variance ?

Exercice 31.1.2$\star\star$ CCINP
On pose : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = p^2 k(1-p)^{k-1}$ avec $p \in]0;1[$ fixé.

1. Montrer que (p_k) suit une loi de probabilité. On considère X suivant cette loi.
2. Montrer que $E(X-1)$ et $E((X-1)(X-2))$ existent et donner leurs valeurs.
3. Donner espérance et variance de X.

Exercice 31.1.3$\star$
On effectue des tirages dans une urne qui contient initialment deux boules : une noire et une jaune. A chaque tirage on replace la boule tirée et on ajoute une boule noire dans l'urne. Soient X le rang d'apparition de la première noire tirée et Y celle de la première jaune tirée. Donner les lois de X et de Y.

Exercice 31.1.4$\star\star$
On dispose d'une pièce dont la probabilité de pile est $p \in]0;1[$. On lance la pièce jusqu'à obtenir pile pour la seconde fois. On note X le nombre de faces obtenus. Donner la loi de X. X admet-elle une esperance ? Si oui la calculer.

Exercice 31.1.5$\star\star$*Ecrit CCINP*
Soient X, Y deux variables aléatoires telles que $P(X = i \cap Y = j) = \dfrac{i+j}{3^{i+j+3}}$ pour tout $i, j \in \mathbb{N}$.

1. Donner la loi de X et celle de Y. X et Y sont elles indépendantes ?
2. Donner $P(X = Y)$. Donner aussi $E(2^{X+Y})$.

Exercice 31.1.6$\star\star$
Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{Z}$ et $P(X = k) = P(X = -k) = \dfrac{a}{k!}$.
Donner la valeur de a. X admet-elle une espérance ? Valeur de $E(X)$?

Exercice 31.1.7$\star\star$
On dispose d'une urne avec une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, ..., n boules numérotées n (avec $n \geqslant 2$). On effectue deux tirages sans remise. On note X le numéro de la première boule tirée et Y le numéro de la seconde boule tirée.

1. Donner la loi du couple (X, Y). En déduire celle de Y. X et Y sont elles indépendantes ?
2. Donner $P(X = Y)$.

Exercice 31.1.8$\star$
On dispose d'un dé equilibré à 6 faces. On le lance n fois et on note X le plus grand numéro obtenu.
Donner $P(X \leqslant k)$ pour tout $k \in \{1, ..., 6\}$. En déduire la loi de X.

Exercice 31.1.9$\star\star$
Soit X une variable aléatoire réelle avec $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(X = n) = \dfrac{a9^n}{(2n)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner la valeur de a.
2. Trouver la fonction génératrice de X *on distinguera deux cas*
3. Donner l'esperance de X ainsi que sa variance.

Exercice 31.1.10$\star\star$
On dispose d'une urne avec $n \geqslant 3$ boules dont deux blanches.
On effectue des tirages successifs sans remise. On note X le rang de sortie de la première boule blanche et Y le rang de sortie de la seconde boule blanche.

1. Donner la loi du couple (X, Y). En déduire la loi de Y.
2. Donner l'espérance de Y.

Exercice 31.1.11⋆⋆*Oral Mines Telecom*
On dispose d'une pièce dont la probabilité d'avoir pile est $p \in]0;1[$.
On la lance infiniment. On note X la longueur de la première suite de résultats identiques et Y la longueur de la deuxième suite de résultats identiques. Par exemple si on a les résultats $\omega = PPPFFPPFFFPP...$ alors $X(\omega) = 3$ et $Y(\omega) = 2$.
Si on a $\omega = PFFPPPFFFF...$ on considérera que la première série est de longueur 1 ($X(\omega) = 1$) puis que $Y(\omega) = 2$.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
2. Donner la loi de X, son espérance et sa variance. Vérifier que $E(X) \geqslant 2$. Donner la loi de Y.

Exercice 31.1.12⋆⋆CCINP
On considère une urne remplie de $n \geqslant 2$ boules numérotées de 1 à n. On effectue 2 tirages sans remise. On note X le résultat du premier tirage et Y le résultat du second tirage.

1. Donner la loi du couple (X, Y).
2. En déduire la loi de Y.
3. Calculer la covariance de X et Y.

Exercice 31.1.13⋆⋆
On considère deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$P(X = i \cap Y = j) = \frac{3^{i+j}e^{-3}}{4^i j!(i-j)!} \ \ si\ 0 \leqslant j \leqslant i \quad et \quad P(X = i \cap Y = j) = 0\ \ sinon$$

1. Donner les lois de X et de Y. X et Y sont elles indépendantes ?
2. Donner la loi de $X - Y$.

Exercice 31.1.14⋆⋆CCINP
On dispose d'une urne avec 3 jetons numérotés 1, 2 et 3. On effectue une série de tirages avec remise.
On pose Y la variable aléatoire qui désigne le nombre de tirages pour avoir deux numéros distincts.
On pose Z la variable aléatoire qui désigne le nombre de tirages pour avoir trois numéros distincts.

1. Donner la loi de Y. En déduire la loi de $Y - 1$ puis $E(Y)$ et $V(Y)$.
2. Donner la loi du couple (Y, Z). Donner alors la loi de Z.

Exercice 31.1.15⋆⋆ Mines Ponts
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p, q, r \in]0;1[$ avec $p + q + r = 1$. On dispose d'un dé truqué à 3 faces où la probabilité d'avoir la face 1 est p, la probabilité d'avoir la face 2 est q et la probabilité d'avoir la face 3 est r.

1. On lance ce dé n fois et on note X le nombre de 1 obtenus et Y le nombre de 2 obtenus.
   Donner les lois de X et de Y. Donner la loi du couple (X, Y). X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Soit N une variable aléatoire de loi de poisson de paramètre λ. On lance le dé N fois et on note Z le nombre de 1 obtenus et T le nombre de 2 obtenus.
   Donner les lois de Z et de T. Z et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 31.1.16⋆⋆⋆Centrale
On donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ lorsque $n \to +\infty$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a une urne avec n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages et à chaque tirage on supprime de l'urne les boules dont le numéro est supérieur ou égal au numéro tiré. On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour vider entièrement l'urne.

1. Donner $E(X_1)$ et $E(X_2)$. Montrer que : $\forall n \geqslant 2$, $E(X_n) = 1 + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} E(X_k)$.
2. Trouver un équivalent de $E(X_n)$ si n tend vers $+\infty$.

Exercice 31.1.17⋆
On suppose que l'on a une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant $G_X(t) = \left(\dfrac{1+3t}{4}\right)^{2n}$ pour tout $t \in [-1;1]$.
Donner la loi de X, son esperance et sa variance si elles existent.

Exercice 31.1.18⋆
On suppose que l'on a une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant $G_X(t) = ae^{(t^2)}$ pour tout $t \in [-1;1]$.
Donner a puis la loi de X, son esperance et sa variance si elles existent.

Exercice 31.1.19$\star$
On suppose que l'on a une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant $P(X=n)=\dfrac{n-1}{2^n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
Donner G_X puis l'espérance de X si elle existe.

2 Lois usuelles

Exercice 31.2.1$\star$
Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $(1/4)$. Calculer $E((-1)^X)$.

Exercice 31.2.2$\star$
Soit X_n de loi Binomiale $B(n,p)$. On pose $Y_n=\dfrac{X_n}{n}$. Montrer que $P(|Y_n-p|\geqslant\varepsilon)\leqslant\dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

Exercice 31.2.3$\star\star$ Mines Telecom
Soit N de loi de poisson de paramètre $\lambda>0$ représentant le nombre de lapins qui sont nés sur une journée. On suppose les naissances indépendantes. Soit $p\in]0;1[$ la probabilité qu'un lapereau soit une femelle. On note X le nombre de lapereaux femelles et Y le nombre de lapereaux mâles.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Donner $P_{N=n}(X=k)$.
2. Donner la loi conjointe de X et N.
3. Donner les lois de X et de Y.

Exercice 31.2.4$\star\star$*Oral Centrale*
Soient X,Y indépendantes de loi géométrique de paramètre $p\in]0;1[$. Soit $M=\begin{pmatrix}X&Y\\Y&X\end{pmatrix}$.

1. Donner la probabilité que M soit inversible.
2. Soient $V\leqslant W$ les valeurs propres de M. V et W sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $E(max(X,Y))$.

Exercice 31.2.4.bis$\star\star$*Oral CCINP*
Soient X,Y,Z de loi binomiale de paramètre n et p indépendantes. Soit M la matrice $\begin{pmatrix}X&Y&Z\\X&Y&Z\\X&Y&Z\end{pmatrix}$. Donner la probabilité que $M^2=M$.

Exercice 31.2.5$\star\star$*Oral Petites Mines*
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois géométriques de paramètres $p\in]0;1[$ et $q\in]0;1[$.
On pose $A=\begin{pmatrix}X&1\\0&Y\end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

Exercice 31.2.6$\star\star$*Oral CCINP*
Soient X et Y deux v. a. indépendantes de loi respectives uniforme sur $\{1,2\}$ et de Poisson de paramètre 1.
Donner la loi, l'espérance et la variance de $Z=XY$. Donner la probabilité que Z soit pair.

Exercice 31.2.7$\star\star$*Oral Mines Ponts*
Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$. On suppose que X admet une espérance.

1. Montrer que $1/X$ admet une espérance.
2. Si X suit une loi géométrique de paramètre $p\in]0;1[$, montrer que $\dfrac{1}{E(X)}\leqslant E(1/X)$.
3. Montrer cette relation dans la cas général.

Exercice 31.2.8$\star\star$*Oral CCINP*
Soient X et Y deux variables aléatoires de loi de Bernoulli de paramètre respectif p_1 et p_2.
On suppose que $Cov(X,Y)=0$, montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 31.2.9$\star\star$*Ecrit Mines PSI*
Soient X,Y,Z,T des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{-1;1\}$.
On pose $A=\begin{pmatrix}X&Y\\Z&T\end{pmatrix}$. On pose $M=det(A)$. Donner la loi de M.

Exercice 31.2.10$\star\star$
On dispose d'une pièce dont la probabilité d'avoir pile est $p\in]0;1[$.
On la lance infiniment. On note X le rang du premier pile et Y le rang du second pile.
Donner la loi du couple (X,Y). En déduire la loi de Y. Donner l'espérance de Y.
Exercice 31.2.11$\star$
Montrer que si X est de loi géométrique de paramètre p alors $P(X>n+k|X>n)=P(X>k)$ pour tous $n,k\in\mathbb{N}$.

Exercice 31.2.12⋆⋆*Oral CCINP*
Soit X de loi binomiale de paramètre $2n$ et $1/4$. Donner la probabilité que X soit pair. Donner $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$

Exercice 31.2.13⋆*Oral CCINP*
On considère X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Donner l'espérance de $Y = \dfrac{1}{X+1}$.
2. On pose $Z = X/2$ si X est pair et $Z = 0$ sinon. Donner la loi et l'espérance de Z.

Exercice 31.2.14⋆⋆*Oral Mines*
On dispose d'une pièce dont la probabilité d'avoir pile est $p \in]0;1[$. On la lance infiniment et on note X le rang du premier pile obtenu. Si $X = k$ on relance k fois cette pièce et on note Y le nombre de piles obtenus.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]-1;1[$ on a $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.
2. Donner la loi de X. En déduire la loi de Y.

Exercice 31.2.15⋆⋆
Si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, X_n \sim \mathscr{B}(n, p_n)$ et si $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

Exercice 31.2.16⋆⋆ Mines Telecom
Soient $X_1, ..., X_p$ des variables aléatoires indépendantes avec $X_k \sim \mathcal{P}(1/k)$ pour chaque $k \in \{1, ..., p\}$.
Soit $H = \{(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p \mid \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i = 0\}$.

1. Déterminer la distance d'un vecteur $(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$ à H.
2. On note Δ_p la distance du vecteur $(X_1, ..., X_p)$ à H. Trouver $E(\Delta_p)$ et $P\left(\Delta_p = \dfrac{1}{\sqrt{p}}\right)$.

Exercice 31.2.17⋆⋆*Oral Mines Ponts*
On dispose d'une pièce dont la probabilité d'avoir pile est $p \in]0;1[$.
On la lance infiniment et on note X_i le rang du ième pile obtenu.

1. Donner la loi de X_1 puis de $Y_i = X_{i+1} - X_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la fonction génératrice de X_n. En déduire la loi de X_n puis son espérance et sa variance.

Exercice 31.2.18⋆⋆
On dispose d'un dé équilibré à n faces numérotées de 0 à $n-1$. On le lance et on note X le résultat.
On dispose d'un autre dé, on le lance et on note Y le résultat. On suppose X et Y indépendantes.
On note enfin $Z = X + Y$ et on suppose que Z suit une loi uniforme sur $\{0, ..., 2n-1\}$.
Donner la fonction génératrice puis la loi de Y.

Exercice 31.2.19⋆⋆
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendante de même loi uniforme sur $\{0, ..., n\}$.
Montrer que l'espérance de $T = |X - Y|$ est $\dfrac{n^2 + 2n}{3n+3}$.

Exercice 31.2.20⋆⋆
Au bureau de poste il y a 7 guichets. Soit N de loi de Poisson de paramètre 25 représentant le nombre de personnes arrivant à la poste en une journée. Le choix du guichet par une personne est aléatoire et est indépendant du choix des autres personnes. On note X le nombre de personnes ayant pris le guichet 1. Donner la loi de X.

Exercice 31.2.21⋆⋆
Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que $P(X < 2\lambda) \geqslant 1 - \dfrac{1}{\lambda} + e^{-\lambda}$.

Exercice 31.2.22⋆⋆⋆
On dispose d'une pièce dont la probabilité d'avoir pile est $p \in]0;1[$.
On la lance infiniment et à l'étape n si on a pile on gagne 1 euro et si on a face on perd 1 euro.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note S_n la somme dont on dispose après n lancers avec $S_0 = 0$ par convention.

1. Donner la probabilité que $S_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en distinguant deux cas.
2. On pose $Y_n = \mathbb{1}_{S_2=0} + \mathbb{1}_{S_4=0} + ... + \mathbb{1}_{S_{2n}=0}$ qui représente le nombre de retours à 0 euros au cours des $2n$ premiers lancers. Quelle est la limite de l'esperance de Y_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 31.2.23$\star\star$
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendante de même loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.
On pose $S = min(X,Y)$ et $T = |X-Y|$. Donner la loi du couple (S,T) et en déduire la loi de T.

Exercice 31.2.24$\star\star$
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendante de même loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.

1. En s'aidant de la fonction de répartition trouver les lois de $Z = min(X,Y)$ et $T = max(X,Y)$.
2. Trouver les espérances de Z et T si elles existent.

Exercice 31.2.25$\star\star$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $X \sim B(4n, 1/2)$.

1. Majorer $P(X \geqslant 3n)$ à l'aide de l'inégalité de Markov.
2. Obtenir une meilleure majoration à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3. Obtenir une meilleure majoration à l'aide de l'inégalité de Markov et la variable aléatoire 2^X.

Exercice 31.2.26$\star\star$
On lance une pièce n fois. On note p la probabilité d'avoir pile. On suppose les lancers indépendants. On note S_n le nombre de piles obtenus.

1. Donner la loi de S_n. Montrer que pour tout $a > 0$ on a $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{1}{4na^2}$.
2. En déduire une valeur de n pour que $\dfrac{S_n}{n}$ donne une valeur approchée de p à 10^{-3} près avec une probabilité supérieure à 95%.

Exercice 31.2.27$\star\star$ CCINP
Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres λ et μ.

1. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \{0, ..., n\}$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k | Z = n)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de X sachant $Z = n$.

3 Suites de variables aléatoires

Exercice 31.3.1$\star\star$CCINP
Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. On pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $S_n = Y_1 + ... + Y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer espérance et variance de S_n.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - 2p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

Exercice 31.3.2$\star\star\star$ CCINP
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$.
On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de Y_n.
2. Donner $Cov(Y_n, Y_{n+k})$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Donner $E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i\right)$ et $V\left(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i\right)$.

Exercice 31.3.3$\star\star\star$
Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On pose $Y_i = X_i X_{i+1}$. Donner la loi, l'espérance et la variance de Y_i.
2. Pour $i \neq j$, calculer $Cov(Y_i, Y_j)$.Donner l'espérance et la variance de $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$.
3. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{Y_i}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 31.3.4⋆⋆⋆*Ecrit Centrale*
On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. indépendantes telles que $P(X_k=1)=P(X_k=-1)=\dfrac{1}{2}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.
On pose $S_n=X_1+...+X_n$.

1. Donner $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
2. Montrer, par récurrence, que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $E(S_n^4)=3n^2-2n$.
3. Soient S,T deux v.a. indépenadntes telles que T et $-T$ possèdent la même loi.
   Montrer que $E(cos(S+T))=E(cos(S))E(cos(T))$.
4. Montrer alors que $E(\cos(S_nt))=(\cos(t))^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in\mathbb{R}$.
5. On pose $U_n=\dfrac{S_n^4}{n^4}$. Montrer que $P(U_n\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}})\leqslant\dfrac{3}{n^{3/2}}$.
6. On pose $\mathcal{Z}_n=\{\omega\in\Omega,\ \exists k\geqslant n,\ \ U_k(\omega)\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{k}}\}=\bigcup_{k\geqslant n}\{U_k\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{k}}\}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}P(\mathcal{Z}_n)=0$.
7. On pose $\mathcal{Z}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\mathcal{Z}_n$. Montrer que $P(\mathcal{Z})=0$.
   Montrer que pour $\omega\in\Omega\setminus\mathcal{Z}$, $\dfrac{S_n(\omega)}{n}$ tend vers 0. On dit que $\dfrac{S_n}{n}$ converge vers 0 presque sûrement.

Exercice 31.3.5⋆⋆
On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes finies.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose M_n la matrice dont le coefficient ligne i et colonne j est $Cov(X_i,X_j)$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Que dire de M_n si les variables aléatoires sont indépendantes ?
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soient $(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$. On pose $Z=x_1X_1+...+x_nX_n$. Donner le lien entre $V(Z)$ et M_n.
3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que le spectre réel de M_n est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

Exercice 31.3.6⋆⋆⋆ Centrale
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, de même univers.
On suppose : $\forall q\in\mathbb{N}^*$, $P(qX_n<1\ pour\ une\ infinite\ de\ n)=0$.

1. Calculer $P(\exists N\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\geqslant N\ \ qX_n\geqslant 1)$.
2. Calculer $P(\lim\limits_{n\to+\infty}X_n=0)$

Exercice 31.3.7⋆⋆⋆ Centrale
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p\in]0;1[$.
Soit $m\in\mathbb{N}^*$ fixé. On pose $Y=max(X_1,...,X_m)$ et $N=inf\{n\in\mathbb{N}^*\mid X_{m+n}>Y\}$.

1. Donner la loi de Y.
2. Donner $P(N>n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ sous la forme d'une somme à ne pas simplifier.
   On admettra que la famille $Y,X_{m+1},...,X_{m+n}$ est constituée de variables aléatoires indépendantes.
   N admet-elle une espérance ?

Exercice 31.3.8⋆⋆♡
On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0;1[$.

1. Dans un premier temps on fixe $n\in\mathbb{N}^*$ et on pose $Z=X_1X_2...X_n$ et $T=X_1+...+X_n$.
   Donner la loi de Z. Donner la fonction génératrice de T puis la loi de T.
2. Dans un second temps on fixe $n\in\mathbb{N}^*$ et on considère N une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1,...,n\}$.
   On suppose $N,X_1,...,X_n$ indépendantes. On pose $U=X_1...X_N$ et $V=X_1+...+X_N$.
   Donner les lois de U et V. *on ne cherchera pas à simplifier les sommes*
3. Enfin on considère M une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ. On suppose $M,X_1,X_2,...$ indépendantes. On pose $R=X_1...X_{M+1}$. Donner la loi de R.

Exercice 31.3.9⋆⋆ *ORAL CCINP*
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0;1[$. Soit N une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p. On suppose $X_1,X_2,...,N$ mutuellement indépendantes. On pose $Y=\sum\limits_{n=1}^{N}X_n$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Donner la loi de $S_n=X_1+...+X_n$. Preuve ?
2. Soit $x\in]-1;1[$. Calculer, pour $k\in\mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=k}^{+\infty}\dbinom{n}{k}x^{n-k}$.
3. Calculer $P(Y=0)$ et $P(Y=k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

4 Autres

Exercice 31.4.1$\star$
Soit X une variable aléatoire admettant une variance. On note m sa moyenne et σ son ecart type.
Montrer qu'il y a une probabilité supérieure à 75% d'avoir X compris entre $m-2\sigma$ et $m+2\sigma$

Exercice 31.4.2$\star$
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles d'univers finis. Simplifier $Cov(X-Y, X+Y)$.

Exercice 31.4.3$\star\star$
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Pour tout $A \in \mathcal{A}$ on définit la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ par : pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$ sinon.

1. Soient A, B deux événements. Donner le lien entre $\mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_B$, $\mathbb{1}_{A\cap B}$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}$.
2. Quelle est la loi et l'espérance de $\mathbb{1}_A$.

Exercice 31.4.4$\star\star\star$*Ecrit ENS PSI*
Soit X une v.a. à valeurs strictements positives, d'espérance m et de variance V.
Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi que X. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Montrer que pour tout $\ell \geqslant 0$, $P(S_n \leqslant \ell) \leqslant E(e^{\ell - S_n})$.
2. Montrer que pour tout $\ell \geqslant 0$, $P(S_n \leqslant \ell) \leqslant e^{\ell} E(e^{-X})^n$. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} P(S_n \leqslant \ell)$ converge et majorer sa somme.

Exercice 31.4.5$\star\star$*Ecrit E3A*
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé.
Pour $|t| < 1$, on définit les fonctions génératrices de X et de Y par : $G_X(t) = \dfrac{1}{2-t}$ et $G_Y(t) = 2 - \sqrt{2-t}$.

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction G_X.
2. Donner le terme d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ du développement en série entière de la fonction $t \mapsto (1+t)^{1/2}$. En déduire le développement en série entière de la fonction G_Y.
3. Pour tout $n \in N$, calculer $P(X = n)$ et $P(Y = n)$.
4. Soient $S = X + Y$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $P(S = n)$.
5. **Calculs d'espérances et de variances.**
   (a) Justifier que la variable aléatoire $X + 1$ suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.
   (c) Déterminer à l'aide de la fonction génératrice G_Y l'espérance des variables aléatoires Y et $Y(Y-1)$.
   (d) En déduire la variance de la variable aléatoire Y.
   (e) Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S.

33. Arithmétique

Dans ce chapitre a, b, c, d sont des entiers relatifs.

Définition-Proposition

- On dit que a divise b si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ak$. On note alors $a|b$.
- Si $a|b$ et $a|c$ alors $a|(b+c)$ et $a|bc$.
- Si $a|b$ et $c|d$ alors $ac|bd$.
- Si $a|b$ et $b|a$ alors $|a| = |b|$.

Exemple : pour tout entier impair n, $n^2 - 1$ est un multiple de 8.
En effet n s'écrit $2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et alors $n^2 - 1 = 4k(k+1)$ et $k(k+1)$ est pair car k et $k+1$ sont deux entiers consécutifs.

Théorème Soient $n \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
Alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $n = qb + r$ et $0 \leqslant r < b$.
On dit que q est le quotient et r le reste de la division euclidienne de n par b.

Remarque a divise b ssi le reste de la division Euclidienne de b par a est nul.

Définition : Soient $(a, b) \in N^2$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
L'ensemble des diviseurs positifs communs à a et b est une partie non vide et finie de $\mathbb{N}$, il admet donc un plus grand élément appelé Plus Grand Commun Diviseur, noté PGCD(a, b) ou $a \wedge b$.
On dit que deux entiers sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

Algorithme d'Euclide Si a, b, si r est le reste de la division Euclidienne de a par b alors $a \wedge b = b \wedge r$.
Ainsi en effectuant des divisions Euclidiennes successives on trouve le PGCD en s'arretant au dernier reste non nul.
Par exemple $45 \wedge 27 = 27 \wedge 18 = 18 \wedge 9 = 9 \wedge 0 = 9$.

Théorème de Bezout : Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Définition-Proposition On dit qu'un entier naturel $p \geqslant 2$ est premier si ses seuls diviseurs sont ± 1 et $\pm p$.
Il existe une infinité de nombres premiers.
Tout entier naturel $n \geqslant 2$ s'écrit comme un produit de nombres premiers.