COURS

PROBABILITÉS 1 – DÉNOMBREMENT (RAPPELS)

I- ENSEMBLES FINIS ET CARDINAL

1. DÉFINITION

DÉFINITION 1 *Ensemble fini*

Un ensemble E non vide est dit *fini* s'il existe un entier naturel n non nul et une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur E.
Cet entier n est appelé le *cardinal* de E. On le note Card(E), $|E|$ ou #E.
Par convention, on dira aussi que l'ensemble vide est fini, de cardinal 0.
Un ensemble est dit *infini* s'il n'est pas fini.

REMARQUE

Soit E est un ensemble fini, de cardinal $n \geqslant 1$.
Une bijection $i \mapsto a_i$ de $[\![1,n]\!]$ sur E permet de numéroter les éléments de E et d'écrire $E = \{a_1, a_2 \dots, a_n\}$.

EXEMPLES

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $[\![1,n]\!]$ est de cardinal n car l'application *identité* est une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$.
Soit (m,n) un couple d'entiers relatifs tel que $m \leqslant n$. Quel est le cardinal de $[\![m,n]\!]$?

2. SOUS-ENSEMBLES D'UN ENSEMBLE FINI

PROPOSITION 1

Soit E un ensemble fini.

- Soit $F \subset E$. Alors F est fini et $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E$.
- $F = E \iff \begin{cases} F \subset E \\ \operatorname{Card} F = \operatorname{Card} E \end{cases}$

REMARQUE

Pour démontrer l'égalité entre deux ensembles finis, il suffit de montrer une inclusion et l'égalité des cardinaux.

COROLLAIRE 1

Si F est inclus dans E et si F est infini, alors E est infini.

PROPOSITION 2 *Cardinal de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$*

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Alors l'ensemble $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ des parties de E est fini et a pour cardinal 2^n.

3. CARDINAL ET OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES FINIS

PROPOSITION 3 *Union disjointe*

Si A et B sont deux ensembles finis et **disjoints**, alors $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est fini et on a :

$$\mathrm{Card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{Card}\,\mathrm{A} + \mathrm{Card}\,\mathrm{B}$$

COROLLAIRE 2 *Complémentaire*

Soit A un sous ensemble d'un ensemble E fini et $\overline{\mathrm{A}}$ son complémentaire dans E, on a :

$$\mathrm{Card}\,\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{Card}\,\mathrm{E} - \mathrm{Card}\,\mathrm{A}$$

COROLLAIRE 3 *Union disjointe : généralisation*

Si $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ sont des ensembles finis, deux à deux disjoints, alors l'ensemble $\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n$ est fini et l'on a :

$$\mathrm{Card}(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\,\mathrm{A}_i.$$

PROPOSITION 4 *Union*

Si A et B sont des ensembles finis, alors $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est fini et on a :

$$\mathrm{Card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{Card}\,\mathrm{A} + \mathrm{Card}\,\mathrm{B} - \mathrm{Card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

? EXERCICE

Soit $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ des parties d'un ensemble fini E. Démontrer :

$$\mathrm{Card}(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(\mathrm{A}_i)$$

EN PRATIQUE

Pour démontrer une formule de la forme $\mathrm{S} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, dans laquelle S, $a_1, \ldots, a_n$ sont des entiers naturels, par une méthode autre qu'un calcul, on peut envisager d'appliquer le corollaire 3, c'est-à-dire exhiber un ensemble de cardinal S qui est l'union de n sous-ensembles disjoints de cardinaux respectifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

? EXERCICE

Pour n et p entiers naturels, avec n non nul, on note $u_{n,p}$ le nombre de n-listes $(x_1, \ldots, x_n)$ d'entiers naturels telles que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$ et $p \in \mathbb{N}$:

$$u_{n,p} = \sum_{k=0}^{p} u_{n-1,k}.$$

PROPOSITION 5 *Produit cartésien*

- Soient $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_p$ des ensembles finis. Alors $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \ldots \times \mathrm{E}_p$ est fini et :
$$\mathrm{Card}(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \ldots \times \mathrm{E}_p) = \prod_{k=1}^{p} \mathrm{Card}\,\mathrm{E}_k$$
- Soit E est un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$, alors $\mathrm{Card}(\mathrm{E}^p) = (\mathrm{Card}\,\mathrm{E})^p$.

4. APPLICATIONS ENTRE ENSEMBLES FINIS

PROPOSITION 6

Soient E et F deux ensembles non vides, avec E fini.
Soit f une application de E dans F, alors l'ensemble $f(\mathrm{E})$ est fini et $\mathrm{Card}\, f(\mathrm{E}) \leqslant \mathrm{Card}\,\mathrm{E}$.
De plus, $\mathrm{Card}\, f(\mathrm{E}) = \mathrm{Card}\,\mathrm{E} \iff f$ est injective.

REMARQUES

De cette proposition se déduisent les résultats suivants.

- S'il existe une application f surjective d'un ensemble fini E dans un ensemble fini F, on a alors $\mathrm{Card}\,\mathrm{F} \leqslant \mathrm{Card}\,\mathrm{E}$. En effet, dans ce cas, $f(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$.
- S'il existe une application injective f d'un ensemble fini E dans un ensemble fini F, on a alors $\mathrm{Card}\,\mathrm{E} \leqslant \mathrm{Card}\,\mathrm{F}$. En effet, dans ce cas,
$$\mathrm{Card}\,\mathrm{E} = \mathrm{Card}\, f(\mathrm{E}) \leqslant \mathrm{Card}\,\mathrm{F}.$$
A contrario, si f est une application d'un ensemble fini E dans un ensemble fini F, avec $\mathrm{Card}\,\mathrm{E} < \mathrm{Card}\,\mathrm{F}$, alors f ne peut pas être injective : il y a deux éléments distincts de E qui ont même image.

THÉORÈME 1

Soient E et F deux ensembles finis non vides, de même cardinal, f une application de E dans F. Il y équivalence entre :

- f est injective
- f est surjective
- f est bijective

II- DÉNOMBREMENT

1. ENSEMBLES DE p-LISTES

DÉFINITION 2 *p-listes*

Une p-liste d'éléments de E est un élément de E^p. On l'appelle également p-uplet.

PROPOSITION 7 *Nombre de p-listes*

Le nombre de p-listes d'un ensemble de cardinal n est

$$\mathrm{Card}(E^p) = n^p$$

EXERCICE

Une puce se déplace sur un cube. Chaque déplacement la mène d'un sommet à un autre relié par une arête. Elle fait n déplacements en tout. Combien y a-t-il de trajets possibles ?

EXERCICE

En utilisant l'alphabet usuel de 26 lettres, combien peut-on former de mots de cinq lettres (ayant un sens ou pas) dans lesquels figurent dans l'ordre une consonne, une voyelle, deux consonnes et enfin une voyelle.

EXERCICE

Combien de mots de p lettres (ayant un sens ou pas) peut-on former avec un alphabet de n lettres ?

2. APPLICATIONS

PROPOSITION 8 *Nombre d'applications*

Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs p et n non nuls. Alors l'ensemble F^E des applications de E dans F est un ensemble fini et :

$$\mathrm{Card}(F^E) = n^p = (\mathrm{Card}\, F)^{\mathrm{Card}\, E}$$

REMARQUE

C'est le résultat de la proposition 8 qui explique la notation F^E pour l'ensemble des applications de E dans F.

EXERCICE

Quel est le nombre de façons de ranger p objets distincts dans n tiroirs, chaque tiroir pouvant recevoir autant d'objets que l'on veut ?

EXERCICE

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) Combien y a-t-il de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,2]\!]$?

(ii) Combien y a-t-il de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,3]\!]$?

3. ARRANGEMENTS

DÉFINITION 3 *Arrangement*

Soit p un entier naturel non nul et E un ensemble. On appelle *p-arrangement* d'éléments de E, toute p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.

REMARQUE

Si le cardinal de E est strictement inférieur à p, on ne peut pas trouver p éléments distincts dans E. Il n'y a donc pas de p-arrangement d'éléments de E.

PROPOSITION 9 *Nombre d'arrangements*

Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier naturel non nul. Le nombre de p-arrangements d'éléments de E est :

$$A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n. \end{cases}$$

REMARQUES

- On pose par convention $A_n^0 = 1$, ce qui est compatible avec la formule pour $p = 0$.
- Si $n < p$, cette formule donne 0, car $n - n$ est un des p facteur du produit, ce qui est bien le résultat attendu.
- Pour calculer un coefficient A_n^p, la formule $n(n-1)\dots(n-p+1)$, produit de p entiers consécutifs dont le plus grand est n, est plus efficace que la formule avec les factorielles.

EXEMPLES

- Le nombre de mots de p lettres distinctes qu'on peut former avec un alphabet de n lettres est A_n^p.
- Une course de chevaux comporte 20 partants. Le nombre de résultats possibles de tiercés dans l'ordre est $A_{20}^3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$.

PROPOSITION 10 *Nombre d'injections*

Le nombre d'injections d'un ensemble E de cardinal p dans un ensemble F de cardinal n est A_n^p.

COROLLAIRE 4

Si $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F = n$, le nombre de bijections de E sur F est $n!$.

COROLLAIRE 5 *Nombre de permutations*

Le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n est $n!$.

EXERCICE

Un groupe de $2n$ personnes comprend n hommes et n femmes.

(i) Combien y a-t-il de manières de les disposer autour d'une table ronde, en ne tenant compte que de leurs positions relatives (deux dispositions sont identiques si chaque invité a le même voisin à sa gauche et le même voisin à sa droite) ?

(ii) Même question si l'on veut respecter l'alternance homme-femme ?

(iii) Même question si on veut respecter l'alternance homme-femme et que de plus Madame X soit à côté de Monsieur Y ?

4. COMBINAISONS

On rappelle que, pour tous entiers naturels n et p :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$$

On remarque que l'on a, pour tous entiers naturels n et p, $\binom{n}{p} = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

THÉORÈME 2

Soit n et p des entiers naturels. Le nombre de sous-ensembles de cardinal p d'un ensemble E de cardinal n est $\binom{n}{p}$.

REMARQUES

- Si n et p sont des entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, le nombre de sous-ensembles de cardinal p d'un ensemble de cardinal n est donc $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.
- Si $n < p$, alors $\binom{n}{p} = 0$. En effet, dans un ensemble de cardinal n, il n'y a pas de sous-ensemble de cardinal strictement plus grand. Nous ferons la convention que $\binom{n}{p} = 0$ si $p < 0$, ce qui permet de garder leur validité à certaines formules, dans des cas particuliers (formule de Pascal par exemple).

EXERCICE

On tire 8 cartes dans un jeu de 32 cartes.

(i) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

(ii) Combien y a-t-il de tirages contenant deux carrés (un carré est un ensemble de quatre cartes de même hauteur, par exemple quatre as) ?

EXERCICE

Soit n et p des entiers naturels non nuls. Combien y a-t-il de listes d'entiers $(i_1, i_2, \dots, i_p)$ telles que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqslant n$.

REMARQUE

La différence entre arrangement et combinaison tient à ce que l'un est ordonné et l'autre pas.

EXEMPLE

On désire organiser des matchs entre $2n$ équipes de basket, chacune disputant un match. De combien de façons u_n peut-on organiser ces matchs, c'est-à-dire apparier les équipes deux à deux ?

On choisit 2 équipes ($\binom{2n}{2}$ choix) pour former un premier match, puis 2 équipes parmi les $2n-2$ restantes ($\binom{2n-2}{2}$ choix) pour former un deuxième match,..., enfin 2 équipes parmi les 2 restantes pour faire un dernier match. On a ainsi :

$$\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\dots\binom{2}{2} = \frac{(2n)!}{2^n}$$

choix. Mais on a ainsi construit des listes $(M_1, M_2, \dots, M_n)$ de matchs, alors que ce que l'on cherche à compter ce sont les ensembles $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ de n matchs, sans ordre. Pour obtenir le nombre cherché, il faut donc diviser par $n!$, le nombre de façons de permuter $M_1, M_2, \dots, M_n$. On obtient :

$$u_n = \frac{(2n)!}{2^n\, n!}.$$

? EXERCICE

On garde les notations de l'exemple précédent.
Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a $u_n = (2n-1)u_{n-1}$ (on pourra privilégier une des équipes).
Retrouver ainsi le résultat précédent.

? EXERCICE

Anagrammes
Étant donné un mot m, on appelle anagramme de m tout mot formé des mêmes lettres que m (un mot est simplement une liste de lettres).

(i) Quel est le nombre d'anagrammes du mot orange ?
(ii) Quel est le nombre d'anagrammes du mot ananas ?
(iii) Quel est le nombre d'anagrammes d'un mot contenant n_1 fois la lettre ℓ_1, n_2 fois la lettre ℓ_2,..., n_p fois la lettre ℓ_p ?

EN PRATIQUE

Souvent, pour dénombrer, plusieurs méthodes sont possibles. La méthode adoptée peut mener directement à un dénombrement exact. Mais parfois elle conduit à compter tous les objets considérés plusieurs fois. Si chaque objet est comptés exactement k fois pour un certain entier k, il suffit de diviser le nombre trouvé par k. Cela arrive en particulier quand le dénombrement amène à créer un ordre sur des objets qui n'étaient pas *a priori* ordonnés.

Propriétés des coefficients $\binom{n}{p}$

PROPOSITION 11

Si n et p sont des entiers tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

PROPOSITION 12 *Formule de Pascal*

Si n et p sont des entiers tels que $1 \leqslant p \leqslant n$, on a $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

On note que la formule reste vérifiée pour $p > n$.

? EXERCICE

Formule de Pascal généralisée
En utilisant la formule de Pascal, démontrer que, pour n et p entiers tels que $0 \leqslant n \leqslant p$, on a :

$$\sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}.$$

Formule du binôme

PROPOSITION 13 *Formule du binôme*

Soient a et b deux nombres complexes ainsi que n un entier naturel.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Applications de la formule du binôme

EXEMPLE

En prenant $a = b = 1$, on obtient $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Cela donne une nouvelle démonstration du fait que, si $\operatorname{Card} E = n$, alors $\operatorname{Card} \mathscr{P}(E) = 2^n$. En effet si l'on note, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $\mathscr{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal k, alors $\mathscr{P}(E)$ est l'union disjointe de $\mathscr{P}_0(E), \mathscr{P}_1(E), \ldots, \mathscr{P}_n(E)$, donc :

$$\operatorname{Card} \mathscr{P}(E) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Card} \mathscr{P}_k(E) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

? EXERCICE

Soit n un entier naturel non nul. En considérant $(1-1)^n$, montrer que tout ensemble de cardinal n possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

? EXERCICE

Formule de VANDERMONDE
Soit m, n et p trois entiers naturels. Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

On peut considérer un ensemble de cardinal $m+n$, union d'un ensemble de cardinal m et d'un ensemble de cardinal n et utiliser la méthode exposée page 2.
En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

? EXERCICE

Soient k, p et n des entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$. En dénombrant de deux manières les couples (A, B) de parties d'un ensemble de cardinal n telles que $\operatorname{Card} A = k$, $\operatorname{Card} B = p$ et $A \subset B$, montrer que :

$$\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}.$$

REMARQUES

- La formule démontrée dans l'exercice peut aussi s'obtenir simplement en écrivant les deux termes de l'égalité sous forme de factorielle et en simplifiant.
- En prenant $k=1$, on obtient $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$, formule bien utile comme le montrent les calculs qui suivent.

EXERCICE

Soit n un entier naturel.

(i) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

(ii) Retrouver les deux premières formules en développant $(x+1)^n$ par la formule du binôme et en dérivant.

EN PRATIQUE

Pour résoudre un problème de dénombrement, il faut commencer par réfléchir à la nature des objets à dénombrer : sont-ils ordonnés ou non ; les éléments qui les composent sont-ils distincts ou pas..., et essayer de se ramener au comptage d'éléments simples : produits cartésiens, applications, permutations, arrangements, combinaisons.
Ensuite, reste à élaborer une stratégie qui assure que tous les objets considérés seront bien comptés une et une seule fois.