Exercices — Analyse 5 – Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

Étude pratique de convergence

1. Étudier les convergences (CVS, CVU(-L)) des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I par :

a) $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$; $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

b) $f_n(x) = \dfrac{n\,\mathbf{e}^{-x} + x^2}{n+x}$; $\quad \mathrm{I} = [0,1]$

c) $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$; $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

d) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$; $\quad \mathrm{I} =]0,+\infty[$

e) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$; $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

f) $f_n(x) = \mathbf{e}^{-nx}\sin(nx)$; $\quad \mathrm{I} = [0,+\infty[$

g) $f_n(x) = \dfrac{nx^2\,\mathbf{e}^{-nx}}{(1-\mathbf{e}^{-x})^2}$; $\quad \mathrm{I} =]0,+\infty[$

h) $f_n(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{nx} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$; $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

2. Idem, en étudiant les variations.

a) $f_n(x) = n^2x^n(1-x)$; $\quad \mathrm{I} = [0,1]$

b) $f_n(x) = nx^2\,\mathbf{e}^{-nx}$; $\quad \mathrm{I} = [0,+\infty[$

c) $f_n(x) = \sin x \cdot \cos^n x$; $\quad \mathrm{I} = \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

d) $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$; $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

e) $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+x^n)}$; $\quad \mathrm{I} = [0,+\infty[$

3. Étudier la convergence simple puis uniforme des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur I selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$; $\quad \mathrm{I} = [0,1]$

b) $f_n(x) = x(1+n^\alpha\,\mathbf{e}^{-nx})$; $\quad \mathrm{I} = [0,+\infty[$

Convergence : exercices théoriques

4. Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément vers des fonctions f et g supposées bornées. Montrer que $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg.

5. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a<b$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ qui converge uniformément. Que dire des suites $(\max_{[a,b]} f_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\min_{[a,b]} f_n)_{n\geqslant 0}$?

6. Soient $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ décroissantes et continues telles que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est uniforme.

7. Soit f une fonction continue de $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On pose $f_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$.
Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et déterminer sa limite simple f.
Y a-t-il convergence uniforme locale sur I ?
À quelle condition sur f y a-t-il convergence uniforme sur I ?

8. Soit $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes à coefficients réels. On suppose que $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ tout entier. Montrer que sa limite f est un polynôme.

9. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f_n'(x)| \leqslant 1$.
Montrer que f est continue.

10. Soit $f_0 : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(f_n(x))$.
Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n).

11. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ telle que, pour tout $x>0$, $0<f(x)<x$.
On définit la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ par $f_1 = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1} : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto f \circ f_n(x)$.
Montrer la convergence simple de (f_n). A-t-on convergence uniforme sur $[0,a]$? Sur $[a,+\infty[$?

Interversions

12. Calculer les limites d'intégrales :

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \ln\left(\mathbf{e}^x + \frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{n\,\mathbf{e}^x}{n+x}\,\mathrm{d}x$

13. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x(1+n^\alpha e^{-nx})$.

a) Étudier la convergence de la suite (f_n). Préciser la limite.

b) Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

c) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x(1+\sqrt{n}\,e^{-nx})\,\mathrm{d}x$.

14. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f_n(x) = n\sin x \cdot \cos^n x$.

a) Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Calculer $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$?

c) Montrer qu'elle converge uniformément sur tout segment de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

15. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+n2^n x^2}$
Déterminer la limite simple f de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
Calculer $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. A-t-on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n = \mathrm{I}$?

16. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [n,2n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Déterminer la limite simple f de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?
Calculer $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. A-t-on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n = \mathrm{I}$?

17. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathrm{I} =]0,1]$ par $f_n(x) = x^n\ln x$.
Déterminer la limite simple f de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Converge-t-elle uniformément sur I ?
$(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge-elle simplement, uniformément sur I ? A-t-on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = f'(x)$?

18. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$.
Déterminer la limite simple f de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?
Les fonctions f_n et f sont-elles ce classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? La suite (f_n') converge-t-elle ?

SÉRIES DE FONCTIONS

ÉTUDE PRATIQUE DE CONVERGENCE

19. Étudier les convergences (CVS, CVN(-L), CVU(-L)) des séries de fonctions $\sum u_n$ définies sur I par :

a) $u_n(x) = \dfrac{1}{x^2+n^2}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

b) $u_n(x) = \dfrac{\mathbf{e}^{-nx}}{1+n^2}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$

c) $u_n(x) = x^2\,\mathbf{e}^{-n|x|}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ puis $v_n(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{\mathrm{ch}(nx)}$

d) $u_n(x) = \dfrac{x}{(1+n^2x)^2}$; $\mathrm{I} = [0,+\infty[$

e) $u_n(x) = \sin x \cdot \cos^n x$; $\mathrm{I} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

f) $u_n(x) = \dfrac{x\,\mathbf{e}^{-nx}}{\sqrt{\ln n}}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$

g) $u_n(x) = \dfrac{x^n(1-x)}{\ln(n)}$; $\mathrm{I} = [0,1]$

h) $u_n(x) = \dfrac{nx}{(n^2+x)^2}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$

i) $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x+1}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$

j) $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

k) $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^x}$; $\mathrm{I} =]0,+\infty[$

20. Étudier les convergences (CVS, CVN(-L)) des séries de fonctions $\sum u_n$ définies par :

a) $u_n(x) = x^{\sqrt{n}}$ *b)* $u_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ *c)* $u_n(x) = \dfrac{a^n x}{1+b^n x^2}$

CONVERGENCE : EXERCICES THÉORIQUES

21. Soit (a_n) une suite réelle positive et décroissante.
Soit la série de fonctions $\sum u_n$ où $u_n(x) = a_n x^n(1-x)$.

a) Montrer que $\sum u_n$ CVS sur $[0,1]$.

b) Montrer que $\sum u_n$ CVN sur $[0,1] \iff \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n}$ converge.

c) Montrer que $\sum u_n$ CVU sur $[0,1] \iff$ la suite (a_n) converge vers 0.

22. *a)* Montrer que si une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément, alors f_n est bornée à partir d'un certain rang, et converge uniformément vers 0.

b) Montrer que $\sum (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément.

23. Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n f(x)$.

a) Former une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

b) Montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1] \iff f(1) = 0$ et f dérivable en 1 avec $f'(1) = 0$.

24. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_0 \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b], \quad f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b], \quad |f_n(x)| \leqslant \mathrm{M}\frac{(x-a)^n}{n!}$.

b) En déduire que la série de fonctions de terme général f_n converge et préciser le type de convergence. On note $\mathrm{S} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$.

c) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ et établir une équation différentielle vérifiée par S. En déduire une expression de S sans symbole $\sum$.

SOMMES D'INTÉGRALES

25. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\arctan\frac{1}{n}$.

26. Soit u_n définie par $u_n(x) = (-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x$ pour $x \in]0,1]$ et $u_n(0) = 0$.

a) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

b) Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

c) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

CONTINUITÉ, LIMITES, DÉRIVABILITÉ DE LA SOMME

27. On pose $\mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$.

a) Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle y est ce classe $\mathscr{C}^1$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{S}(x)$.

c) Donner un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ au voisinage de $+\infty$. (*On admet que* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

28. Montrer que $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-nx}}{1+n^2}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier sa dérivabilité en 0.

29. On pose pour $x \in]1,+\infty[$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(nx)}$.
Montrer que f est continue sur $]1,+\infty[$ et étudier ses limites aux bornes de son ensemble de définition.

30. On pose $\mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ pour $x \in]-1,+\infty[$.

a) Montrer que S est définie et continue sur $]-1,+\infty[$.

b) Étudier la monotonie de S.

c) Calculer $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x)$.

d) Déterminer un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ en -1.

e) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{S}(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

f) En déduire un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ en $+\infty$.

31. Soit $f\colon x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$.

c) Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$, puis trouver un équivalent de f en $+\infty$.

32. Pour $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 2$, soit $u_n\colon x\mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

a) Déterminer le domaine de définition D de la série de fonctions de terme général u_n.
Pour $x\in \mathrm{D}$, on pose $\mathrm{S}(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}u_n(x)$.

b) Montrer qu'il n'y a pas convergence normale de la série de fonctions sur D.

c) Si $n\geqslant 2$, soit $\mathrm{R}_n\colon x\in\mathrm{D}\mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)$. Montrer que $\forall x\in\mathrm{D}$, $|\mathrm{R}_n(x)|\leqslant\frac{1}{\ln n}$.

d) La fonction S est-elle continue sur D ?

33. Pour $n\geqslant 1$ et $x\neq 0$, on pose $u_n(x)=(-1)^n\dfrac{e^{-(n+1)x}}{n}$.

a) Étudier la convergence simple, uniforme, normale de $\sum u_n$.

b) On pose $\mathrm{S}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ et $\mathrm{F}(x)=e^x\mathrm{S}(x)$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\mathrm{F}'(x)$.

c) Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{F}(x)$. En déduire $\mathrm{F}(x)$, puis $\mathrm{S}(x)$ pour $x>0$, puis $\mathrm{S}(0)$.

d) On note U la primitive de S s'annulant en 0. Déterminer U.

e) Montrer que S est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

34. Soit $\mathrm{S}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathbf{e}^{-nx}}{n}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de S et étudier la convergence normale de la série.

b) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition et exprimer sa dérivée à l'aide de fonctions usuelles.

c) Calculer $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{S}(x)$ et exprimer S à l'aide de fonctions usuelles.

35. Calculer, après avoir étudié leur convergence simple et normale, la somme des séries

a) $\sum_{n\geqslant 1}nx^n$ ***b)*** $\sum_{n\geqslant 0}nx\mathbf{e}^{-nx^2}$

LA FONCTION ζ DE RIEMANN

36. On pose pour $x>1$, $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$.

a) Montrer que cette série de fonctions converge normalement localement sur $\mathrm{I}=]1,+\infty[$ mais pas uniformément sur I tout entier.

b) Montrer que ζ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$. Est-elle de classe $\mathscr{C}^\infty$?

c) Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.

d) En comparant la série avec une intégrale, montrer que $\zeta(x)\underset{x\to 1}{\sim}\dfrac{1}{x-1}$.

CONCOURS

37. *CCINP*
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{G}_n\colon t\in[0,1]\mapsto(1-\frac{t}{n})^ne^t\in\mathbb{R}$.

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in[0,1],\ |\mathrm{G}_n'(t)|\leqslant\frac{e^t}{n}$.

b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall t\in[0,1],\ |(1-\frac{t}{n})^ne^t-1|\leqslant\frac{te^t}{n}$.

c) On définit, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,1]$, $\mathrm{I}_n(x)=\displaystyle\int_0^x(1-\frac{t}{n})^ne^t\,\mathrm{d}t$. Montrer que la suite de fonctions (I_n) converge simplement sur $[0,1]$.

d) Converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

38. *CCINP*
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $f_n\colon x\mapsto nxe^{-x^2\ln(n)}$. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

39. *IMT*
Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ telle que $f_n(0)=1$ et, pour $x>0$, $f_n(x)=\frac{(\ln x)^{2n}-2}{(\ln x)^{2n}+2}$.

a) Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0,+\infty[$.

b) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$? Sur $[1,2]$?

40. *IMT*
Soient $h\in\mathscr{C}^0([0,\frac{\pi}{2}],\mathbb{R})$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n\colon x\in[0,\frac{\pi}{2}]\mapsto h(x)(\sin x)^n$.
Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

41. *IMT*
Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n\colon x\in[0,1]\mapsto\frac{2n^2x^2-nx+1}{2n^2x+1}\sin^2(\frac{\pi}{x})$ si $x\in]\frac{1}{n},1]$, et $f_n(x)=0$ si $x\in[0,\frac{1}{n}]$.
Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n).

42. *Mines-Ponts*
Étudier la convergence simple et uniforme de $f\colon x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{x^2+n^2}$.

43. *Mines-Ponts*
Soit $f\colon x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$. Préciser le domaine de définition de f. Donner une relation entre $f(x)$ et $f(\frac{1}{x})$; exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

44. *CCINP*
Soit $a\in\mathbb{R}$ et $\mathrm{S}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{n+x}$.

a) Déterminer suivant les valeurs de a le domaine de définition de S.

b) Soit a tel que $|a|<1$.

(i) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(ii) Déterminer une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$.

(iii) Déterminer un équivalent de S en 0^+.

(iv) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

45. *CCINP*

Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+nx^2)}{n^2}$.

a) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) L'application S est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

46. *CCINP*

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f, puis la continuité de f sur ce domaine.

b) Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et déterminer cette limite.

c) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

47. *CCINP*

Soient $a \in]-1,1[$ et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x)$.

a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|f^{(k)}(x)| \leqslant \frac{1}{1-|a|}$.

c) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

48. *CCINP*

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, $u_n(z) = \dfrac{e^{nz}}{n^2}$.

a) Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, calculer $|u_n(z)|$. Montrer que la série de terme général $|u_n(z)|$ converge si et seulement si $\mathrm{Re}(z) \leqslant 0$.
Si $x \in \mathbb{R}_-$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

b) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_-$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

c) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

d) Calculer f''. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_x^0 \ln(1-e^t)\,dt$. La fonction f est-elle dérivable en zéro ?

49. *CCINP*

Soient $a > 0$, $I = [-a, a]$ et $\varphi \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $|\varphi(x)| \leqslant C|x|$. On s'intéresse alors à l'ensemble E des fonctions $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$ et $f(x) - f(\frac{x}{2}) = \varphi(x)$ pour tout $x \in I$.

a) Montrer que l'application $\Phi : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(\frac{x}{2^n})$ est définie et continue sur I, puis que $\Phi \in E$.

b) Que dire de la différence de deux éléments de E ? En déduire E.

c) On suppose φ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que Φ est dérivable.

50. *IMT*

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1]$, $u_n(x) = \ln(1+\frac{x}{n}) - \frac{x}{n}$ et $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

a) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

b) Calculer $S'(1)$.

51. *IMT*

On s'intéresse à $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}$.

a) Donner le domaine de définition de S.

b) Montrer que S est dérivable sur son domaine de définition.

c) Montrer que S est monotone sur son domaine de définition.

d) Que dire de S au voisinage de $+\infty$?

52. *Centrale*

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x \ln n}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f. Étudier la continuité de f.

b) Trouver les limites de f aux bornes de son intervalle de définition puis des équivalents.

53. *Centrale*

Soit $D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in D$, on pose $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.

a) Montrer que f est correctement définie sur D, continue et 1-périodique.

b) Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer la somme de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$.

54. *Centrale*

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n f(x)}{\sqrt{1+n^2 f(x)^2}}$.

a) Justifier l'existence de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. La convergence est-elle uniforme ?

b) Montrer que si f est continue, S l'est aussi. Réciproque ?

55. *Centrale*

a) Déterminer les $h \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $h(x+y) = h(x) + h(y)$.

b) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que : $\exists M > 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leqslant M$. On pose $g_n : x \mapsto f(2^n x)/2^n$.
Étudier la convergence de la série de terme général $g_{n+1} - g_n$.
En déduire que (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une application linéaire h.
Que peut-on en déduire pour f ?

56. *Centrale*

On considère l'équation fonctionnelle (E) $f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=f(x)$ d'inconnue $f:[0,1]\to\mathbb{R}$.

a) Montrer que les solutions de (E) de classe $\mathscr{C}^2$ sont affines. Les déterminer.
On admet que le résultat est encore vrai pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

b) On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n : x\mapsto \frac{\sin(2^n\pi x)}{2^n}$.
Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction S continue.
La série de fonctions de terme général u_n' converge-t-elle uniformément ? Que peut-on en déduire ?

c) Montrer que S est solution de (E). Que peut-on en déduire ?

57. *Mines-Ponts*

On note, pour tout $n\geqslant 1$, $u_n : x\mapsto (-1)^n\ln\left(1+\frac{x^2-1}{n(2+x^2)}\right)$.

Déterminer le domaine de définition, de continuité et les limites aux bornes de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

58. *Mines-Ponts*

Soit $f : x\mapsto \sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{1-x^n}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Étudier la continuité et le caractère $\mathscr{C}^1$ de f.

59. *Mines-Ponts*

Soit $f : x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Déterminer un équivalent de $f'(x)$ lorsque $x\to 0^+$.

60. *Mines-Ponts*

Soit, pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1]$, $f_n(x)=3^n(x^{2^n}-x^{2^{n+1}})$.

a) Étudier la convergence de (f_n) sur $[0,1]$.

b) Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^1 (\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x))\,\mathrm{d}x$. Que peut-on en déduire ?

61. *Mines-Ponts*

a) On considère la fonction f définie par $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$.

b) Donner le domaine de définition de f.

c) Soient $x\in\,]-1,1[$ et $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$. Simplifier $\prod_{n=0}^{\mathrm{N}}(1+x^{2^n})$.

d) Expliciter f.

62. *Mines-Ponts*

Soient $f : x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ et $g : x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

a) Déterminer les ensembles de définitions D_1 et D_2 de f et g.

b) Étudier les limites de f aux bornes de D_1.

c) Étudier la continuité et la dérivabilité de g.

d) Établir une relation entre f et g. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1.

63. *Mines-Ponts*

Soient $f_0 : t\in\mathbb{R}_+\mapsto 0$ et, pour $n\in\mathbb{N}$, $f_{n+1} : t\in\mathbb{R}_+\mapsto\sqrt{t+f_n(t)}$.

a) Soit $t\in\mathbb{R}_+$. Déterminer la limite $\ell(t)$ de $(f_n(t))_{n\geqslant 0}$.

b) Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.

c) Si $n\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}_+^*$, montrer que $|f_{n+1}(t)-\ell(t)|\leqslant\frac{|f_n(t)-\ell(t)|}{2f_{n+1}(t)}$. Que peut-on en déduire sur (f_n) ?

64. *Mines-Ponts*

Soient E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ et $(f_1,\dots,f_n)\in\mathrm{E}^n$.

a) Montrer que $(f_1,\dots,f_n)$ est liée si et seulement si, pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in[0,1]^n$, $\det(f_i(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}=0$.

b) Soient F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de F qui converge simplement vers une fonction f. Montrer que la convergence est uniforme sur $[0,1]$.