COURS

ALGÈBRE 5 – ENDOMORPHISMES DANS LES ESPACES EUCLIDIENS

Dans tout ce chapitre, E est un espace euclidien, c'est-à-dire un espace préhilbertien réel **de dimension finie**.

I- ISOMÉTRIES VECTORIELLES ET MATRICES ORTHOGONALES

1. ISOMÉTRIES VECTORIELLES

DÉFINITION 1 *Isométrie vectorielle*

Une *isométrie vectorielle* (ou *automorphisme orthogonal*) de E est un endomorphisme qui conserve le produit scalaire c'est-à-dire

$$\forall (x,y)\in \mathrm{E}^2,\quad \big\langle u(x)\,\big|\,u(y)\big\rangle = \langle x \mid y\rangle$$

REMARQUE

Une isométrie vectorielle conserve donc l'orthogonalité.

THÉORÈME 1 *Caractérisation des isométries vectorielles*

Soit $u\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) u est une isométrie vectorielle ;

(ii) u transforme toutes les bases orthonormées en bases orthonormées ;

(iii) u transforme une base orthonormée en base orthonormée ;

(iv) u conserve la norme : $\forall x\in\mathrm{E},\quad \|u(x)\| = \|x\|$.

COROLLAIRE 1

Une isométrie vectorielle est un automorphisme.

DÉFINITION 2 *Groupe orthogonal*

Le *groupe orthogonal* est l'ensemble O(E) des isométries vectorielles de E.

THÉORÈME 2

O(E) est un groupe pour la loi $\circ$, sous-groupe de GL(E).
Cela signifie que la composée et l'inverse d'isométries vectorielles sont des isométries vectorielles.

PROPOSITION 1 *Stabilité et orthogonal*

Soit u une isométrie vectorielle de E. Si le sev F est stable par u, alors son orthogonal $F^\perp$ est également stable par u.

2. MATRICES ORTHOGONALES

DÉFINITION 3 *Matrice orthogonale*

$M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice orthogonale* si $M^\top M = I_n$

THÉORÈME 3 *Caractérisation des matrices orthogonales*

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) M est orthogonale ;

(ii) les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$;

(iii) les lignes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$;

(iv) M est inversible et $M^{-1} = M^\top$.

REMARQUE

On retiendra avec le plus grand intérêt que l'inverse d'une matrice orthogonale est sa transposée.

PROPOSITION 2 *Changement de BON*

$\mathscr{B}$ étant une base orthonormée de E, $\mathscr{C}$ étant une base de E,
$\mathscr{C}$ est orthonormée $\iff$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ est orthogonale.

THÉORÈME 4 *Matrice d'une isométrie vectorielle dans une BON*

$\mathscr{B}$ étant une base orthonormée quelconque de E,
$u \in \mathscr{L}(E)$ est orthogonal si et seulement si sa matrice dans $\mathscr{B}$ est orthogonale.

DÉFINITION 4 *Groupe orthogonal*

On note $O_n(\mathbb{R})$ ou O(n) l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

THÉORÈME 5

$O_n(\mathbb{R})$ est un groupe pour le produit matriciel, sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

3. DÉTERMINANT ET VALEURS PROPRES

THÉORÈME 6

Soit M une matrice orthogonale [resp. u une isométrie] . Alors

- $\det M = \pm 1$ [resp. $\det u = \pm 1$]
- les valeurs propres éventuelles de M [resp. u] sont ± 1.
  De plus, $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(u + \mathrm{Id}_E)$ sont orthogonaux.

REMARQUE

- une matrice orthogonale [resp. une isométrie] n'admet pas nécessairement de valeurs propres ;
- un endomorphisme de déterminant 1 ou -1 n'est pas nécessairement une isométrie.

DÉFINITION 5

Une matrice orthogonale [resp. isométrie] est *direct(e)* si son déterminant est 1, *indirect(e)* si son déterminant est -1.
Une isométrie vectorielle directe est également appelé *rotation*.
On note $SO_n(\mathbb{R})$ ou SO(n) l'ensemble des matrices orthogonales directes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et SO(E) l'ensemble des rotations (= isométries directes) de E.

PROPOSITION 3 *Groupe spécial orthogonal*

$SO_n(\mathbb{R})$ [resp. SO(E)] est un groupe, sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ [resp. O(E)] appelé groupe spécial orthogonal de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ [resp. E].

4. ORIENTATION

DÉFINITION 6 *Orientation*

Deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de E ont *même orientation* si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) > 0$.
Orienter E, c'est choisir une base $\mathscr{B}$ de référence. Une base $\mathscr{C}$ est directe si elle a la même orientation que $\mathscr{B}$ c'est-à-dire si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) > 0$.

PROPOSITION 4 *Matrice de passage entre BOND*

$\mathscr{B}$ étant une base orthonormée directe (BOND), $\mathscr{C}$ est une BOND $\iff$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ est orthogonale directe.

DÉFINITION 7 *Orientation d'un hyperplan*

Orienter l'hyperplan H, c'est choisir un vecteur n orthogonal à H. Une base $(e_1,\dots,e_{n-1})$ de H est alors directe si la base $(u,e_1,\dots,e_{n-1})$ est directe dans E.
Il y a deux orientations possibles de H.

5. SYMÉTRIES ORTHOGONALES

DÉFINITION 8 *Symétrie orthogonale*

Une *symétrie orthogonale* est une symétrie dont les sous-espaces propres ($\ker(s-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(s+\mathrm{Id}_E)$) sont orthogonaux.
Une *réflexion* est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

PROPOSITION 5

Une symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.

PROPOSITION 6

$u\in\mathscr{L}(E)$ est une symétrie orthogonale $\iff$ sa matrice dans toute base orthonormée est orthogonale et symétrique.

6. PRODUIT MIXTE, PRODUIT VECTORIEL

DÉFINITION 9 *Produit mixte*

Dans E euclidien **orienté** de dimension n, le *produit mixte* d'une famille de n vecteurs de E est son déterminant dans une BOND.
Ce déterminant ne dépend pas de la BOND choisie.
On le note entre crochets : $[u,v]$, $[u,v,w]$...

PROPOSITION 7 *Interprétation géométrique*

En dimension 2 [resp. 3], le produit mixte est l'aire [resp. volume] du parallélogramme [resp. parallélépipède] construit sur les vecteurs de la famille.

DÉFINITION 10 *Produit vectoriel*

Dans E euclidien **orienté** de dimension 3, le *produit vectoriel* de la famille (u,v) est l'unique vecteur w tel que $\forall x\in E$, $[u,v,x]=\langle w\mid x\rangle$.
On le note $u\wedge v$.

On a donc : $[u,v,w]=\langle u\wedge v\mid w\rangle$, ce qui donne son sens à l'expression « produit mixte » comme « mélange » de produit scalaire et produit vectoriel.

PROPOSITION 8

Le produit vectoriel est une application bilinéaire alternée.

PROPOSITION 9 *Expression du produit vectoriel en BOND*

Soit $\mathscr{B}=(i,j,k)$ une BOND de E. Alors $k=i\wedge j$.

Soient $u,v\in E$. Les coordonnées de $u\wedge v$ dans $\mathscr{B}$ sont $\begin{pmatrix} yz'-zy' \\ zx'-xz' \\ xy'-yx'\end{pmatrix}$.

On retiendra facilement ce résultat avec la notation formelle : $u\wedge v=\begin{vmatrix} x & x' & i\\ y & y' & j\\ z & z' & k\end{vmatrix}$ qu'on développe selon la 3ᵉ colonne.

COROLLAIRE 2

$$u\wedge v\perp u \quad\text{et}\quad u\wedge v\perp v$$

$$u\wedge v=0_E \iff (u,v)\text{ est liée}$$

7. ISOMÉTRIES VECTORIELLES DU PLAN

a) Matrices orthogonales

PROPOSITION 10

Les matrices de $O_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme :

$$R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix};\quad S_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\qquad \text{où } \theta\in\mathbb{R}.$$

Les matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ (directes) sont les R_θ, $\theta\in\mathbb{R}$ $(\det R_\theta=+1)$.
Les matrices indirectes sont les S_θ, $\theta\in\mathbb{R}$ $(\det S_\theta=-1)$.

b) Rotations

On considère $\mathscr{P}$ un plan vectoriel orienté et $\mathscr{B}=(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une BOND de $\mathscr{P}$.

DÉFINITION 11 *Rotation*

L'endomorphisme de $\mathscr{P}$ dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est $R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ est appelé *rotation d'angle* θ et sera noté r_θ.

DÉFINITION 12 *Angle d'une rotation*

D'après la proposition précédente, la matrice de r_θ dans toute BOND est R_θ.
θ s'appelle l'*angle de la rotation*, il est défini modulo 2π.

c) Réflexions

Une réflexion du plan euclidien est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

PROPOSITION 11

Soit $\mathscr{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une BON de $\mathscr{P}$. L'endomorphisme dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ est la réflexion d'axe la droite d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$ dans $\mathscr{B}$.

8. ISOMÉTRIES VECTORIELLES DANS UN ESPACE DE DIMENSION 3

a) Réduction

PROPOSITION 12 *Réduction*

Soit E un espace euclidien de dimension 3 et $f \in O(E)$. Il existe une BOND de E dans laquelle f a pour matrice :

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ si $\det f = 1$
- $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ si $\det f = -1$

  avec le cas particulier $\theta = 0\ [2\pi]$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, matrice de réflexion (symétrie orthogonale par rapport à un plan)

9. ROTATIONS

DÉFINITION 13 *Rotation*

La rotation d'axe u et d'angle θ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{cases} f(u) = u \\ \text{la restriction de } f \text{ au plan } u^\perp \text{ orienté par } u \text{ est la rotation (plane) d'angle } \theta \end{cases}$$

REMARQUE

Si u est changé en $-u$, θ est changé en $-\theta$.

EN PRATIQUE

Une rotation est déterminée par un couple axe-angle (u,θ). Rappel : $(-u,-\theta)$ convient également.
On choisit un vecteur unitaire u de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$.
La trace étant un invariant de similitude, $\operatorname{tr} f = 1 + 2\cos\theta$ ce qui fournit $\cos\theta$.
Le signe de $\sin\theta$ est le même que $\det\big(u, x, f(x)\big)$ où x est un vecteur non colinéaire à u.
En effet : $\det\big(u,x,f(x)\big) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1 \\ 0 & x_2 & x_2\cos\theta - x_3\sin\theta \\ 0 & x_3 & x_2\sin\theta + x_3\cos\theta \end{vmatrix} = (x_2^2 + x_3^2)\sin\theta$

EXEMPLES

1. $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}$.
4. $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

II- Endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques

1. Matrices symétriques et antisymétriques (rappels et compléments)

On rappelle que la transposition est un endomorphisme involutif de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: c'est une symétrie. $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \ker(\mathrm{T}-\mathrm{Id})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \ker(\mathrm{T}+\mathrm{Id})$ sont donc des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Leurs dimensions sont respectivement $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$.
La décomposition d'une matrice selon cette somme directe est : $\mathrm{A} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{A}+\mathrm{A}^\top\right) + \frac{1}{2}\left(\mathrm{A}-\mathrm{A}^\top\right)$.
De plus T conserve le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: c'est une symétrie orthogonale et $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Endomorphismes auto-adjoints

Définition 14 *Endomorphisme symétrique*

L'endomorphisme f de E est *auto-adjoint* (ou *symétrique*) si

$$\forall x, y \in \mathrm{E}, \quad \langle f(x) \mid y\rangle = \langle x \mid f(y)\rangle$$

On dispose du même théorème « Stabilité et orthogonal » que pour les isométries (*cf* la proposition 1) :

Proposition 13 *Stabilité et orthogonal*

Soit f un endomorphisme auto-adjoint de E. Si le sev F est stable par f, alors son orthogonal $\mathrm{F}^\perp$ est également stable par f.

Théorème 7 *Matrice dans une BON*

$f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est auto-adjoint
$\iff$ il existe une base orthonormée dans laquelle sa matrice est symétrique
$\iff$ sa matrice dans toute base orthonormée est symétrique.

Remarque

Attention, la matrice d'un endomorphisme auto-adjoint dans une base **non orthonormée** n'est pas nécessairement symétrique.

Proposition 14 *Sep orthogonaux*

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme auto-ajoint (d'une matrice symétrique) sont deux à deux orthogonaux.

Théorème 8 *Théorème spectral (dem non exigible)*

Tout endomorphisme auto-adjoint f (toute matrice symétrique S) est orthogonalement diagonalisable c'est-à-dire :
il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour f ;
il existe une matrice orthogonale P telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = {}^t\,\mathrm{PMP}$ soit diagonale.

Proposition 15 *Projecteurs et symétries orthogonales*

Un projecteur est auto-adjoint $\iff$ c'est un projecteur orthogonal.
Une symétrie est auto-adjointe $\iff$ c'est une symétrie orthogonale.

3. Endomorphismes auto-adjoints (matrices symétriques) positifs, définis positifs

Définition 15

L'endomorphisme auto-adjoint u est dit *positif* si $\forall x \in \mathrm{E}$, $\langle u(x) \mid x\rangle \geqslant 0$.
Il est dit *défini positif* si $\forall x \in \mathrm{E}\setminus\{0_\mathrm{E}\}$, $\langle u(x) \mid x\rangle > 0$.
On note $\mathscr{S}^+(\mathrm{E})$ [resp. $\mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$] l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs [resp. définis positifs] de E.

Traduction matricielle :

Définition 16

La matrice symétrique M est dite *positive* si $\forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$, $\langle \mathrm{MX} \mid \mathrm{X}\rangle \geqslant 0$.
Elle est dite *définie positive* si $\forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $\langle \mathrm{MX} \mid \mathrm{X}\rangle > 0$.
On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ [resp. $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$] l'ensemble des matrices symétriques positives [resp. définies positives] de E.

Proposition 16 *Caractérisation spectrale*

Soit $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. $\quad u \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$ [resp. $\mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$] $\iff$ ses vp sont toutes $\geqslant 0$ [resp. > 0].
Soit $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. $\quad \mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ [resp. $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$] $\iff$ ses vp sont toutes $\geqslant 0$ [resp. > 0].