EXERCICES — ALGÈBRE 4 – ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

EXEMPLES DE PRODUIT SCALAIRE

1. Soit φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)=2xx'+2yy'+x'y+xy'$

a) φ est-elle une forme bilinéaire symétrique ? φ est-elle un produit scalaire ?

b) Mêmes questions avec $\varphi\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)=4xx'-3yy'+2x'y+2xy'$

c) Mêmes questions avec $\varphi\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)=4xx'+yy'-2x'y-2xy'$

2. Soient $A=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\varphi:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (X,Y) & \mapsto & X^\top AY\end{array}\right.$.

a) Montrer que φ est bilinéaire.

b) À quelle condition nécessaire et suffisante, φ est-elle symétrique ?

c) Exprimer $\varphi(X,Y)$ en fonction des composantes de X et de Y.

d) À quelle condition nécessaire et suffisante, φ est-elle un produit scalaire ?

3. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, vérifier que les applications suivantes sont des produits scalaires :

a) $\langle P\mid Q\rangle=\sum_{k=0}^{n}P(k)Q(k)$.

b) $\langle P\mid Q\rangle=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$.

c) $\langle P\mid Q\rangle=\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\,dt$.

4. On note $\ell^2(\mathbb{R})=\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\mid\sum u_n^2 \text{ converge}\right\}$.

Soit $\varphi:\left|\begin{array}{ccc}\left(\ell^2(\mathbb{R})\right)^2 & \to & \mathbb{R}\\ (u,v) & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty}u_nv_n\end{array}\right.$.

a) Montrer que φ est bien définie sur $\left(\ell^2(\mathbb{R})\right)^2$.

b) Montrer que φ est un produit scalaire.

5. Soient E le $\mathbb{R}$-ev des suites réelles et F la partie de E formée des suites réelles bornées.

a) F est-il un sous-espace vectoriel de E ?

b) Montrer que $\langle u\mid v\rangle=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{u_kv_k}{2^k}$ définit un produit scalaire sur F.

c) Recommencer sans rien oublier.

SOUS-ESPACES ORTHOGONAUX

6. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, montrer que $\mathcal{S}_n=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mid A^\top=A\}$ et $\mathcal{A}_n=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mid A^\top=-A\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires et orthogonaux.

7. Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(AM)=\mathrm{tr}(BM)$. Montrer que $A=B$.

8. Soit $E=\mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$. Pour $f,g\in E$, on pose $\varphi(f,g)=\int_{-1}^{1}f(t)g(t)\,dt$.

a) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

b) On note $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ les sous-ensembles formés des fonctions paires et impaires de E. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires et orthogonaux.

9. Dans $E=\ell^2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini à l'exercice **4**, soit G le sous-espace de $\ell^2(\mathbb{R})$ des suites nulles à partir d'un certain rang.

a) Montrer que : $G^\perp=\{0_F\}$.

b) A-t-on $E=G\oplus G^\perp$?

10. Soient E un espace préhilbertien réel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

a) Montrer que $F^\perp\cap G^\perp=(F+G)^\perp$.

b) Montrer que $F^\perp+G^\perp\subset(F\cap G)^\perp$.
L'inclusion peut être stricte comme va le prouver la suite.

c) Montrer que si E est de dimension finie, il y a égalité : $F^\perp+G^\perp=(F\cap G)^\perp$.

d) On considère ici $E=\mathscr{C}^0([-1,1])$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f\mid g\rangle=\int_{-1}^{1}f(t)g(t)\,dt$$

Soient F et G les sous-espaces vectoriels des fonctions de E nulles sur $[-1,0]$ et $[0,1]$ respectivement. Déterminer $F^\perp$ et $G^\perp$ puis $F^\perp+G^\perp$ et $(F\cap G)^\perp$.
Conclure.

ORTHOGONALITÉ

11. Soit E un espace préhilbertien réel. $e_1,\dots,e_n$ sont des vecteurs de E tels que

$$\forall i=1,\dots,n,\ \|e_i\|=1 \qquad \text{et} \qquad \forall x\in E,\ \|x\|^2=\sum_{i=1}^{n}\langle x\mid e_i\rangle^2$$

Montrer que la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est une famille orthonormale de E puis que c'est une base orthonormée de E.

12. Soient E un espace préhilbertien réel et $f,g:E\to E$ deux applications vérifiant

$$\forall x,y\in E,\quad \langle f(x)\mid y\rangle=\langle x\mid g(y)\rangle$$

Montrer que f et g sont linéaires.

13. Soient E un espace préhilbertien réel et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ une application surjective vérifiant
$$\forall x, y \in \mathrm{E}, \quad \langle f(x) \mid f(y)\rangle = \langle x \mid y\rangle$$
Montrer que f est linéaire.

14. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que
$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}],\ \mathrm{P}(0) = \int_0^1 \mathrm{A}(t)\mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$$
Que dire du degré de A ?
Le résultat persiste-t-il si on remplace $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ par $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$?

INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ

15. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leqslant n.\sum_{k=1}^n {x_k}^2$.

Étudier les cas d'égalité.

16. Montrer que $\forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{tr}(\mathrm{A}) \leqslant \sqrt{n}.\sqrt{\mathrm{tr}({}^\top \mathrm{A}.\mathrm{A})}$.
Préciser les cas d'égalité.

17. Montrer que $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}), \quad \left(\mathrm{tr}(\mathrm{AB}+\mathrm{BA})\right)^2 \leqslant 4\ \mathrm{tr}(\mathrm{A}^2).\mathrm{tr}(\mathrm{B}^2)$ et préciser les cas d'égalité.

18. Soient $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0\left([0,1], \mathbb{R}\right)$ et H l'ensemble des applications de E de signe constant.

a) Montrer que si $f \in \mathrm{E}$ et f ne s'annule pas alors $f \in \mathrm{H}$.

b) On munit E du produit scalaire défini par $\langle f \mid g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Dans le cas où $f > 0$ sur $[0,1]$, écrire l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ pour le couple $\left(\sqrt{f}, \dfrac{1}{\sqrt{f}}\right)$.

c) On définit, pour $f \in \mathrm{H}$, $\pi(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{f(t)}$.
Déduire de la question précédente que $\inf_{f\in\mathrm{H}} \pi(f) = \min_{f\in\mathrm{H}} \pi(f) = 1$.
Déterminer les $f \in \mathrm{H}$ pour lesquelles $\pi(f) = 1$.

PROCÉDÉ D'ORTHOGONALISATION DE GRAM-SCHMIDT

19. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique et $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

a) Déterminer une base orthonormée de F.

b) Déterminer une base orthonormée de $\mathrm{F}^\perp$.

20. On reprend le produit scalaire de l'exercice **3*a*** avec $n = 2$. Trouver une base orthogonale $(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ telle que $\forall i \in [\![0,2]\!],\ \deg \mathrm{P}_i = i$.

21. Dans $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ muni du produit scalaire défini à l'exercice **3*c***, déterminer la base orthonormée obtenue par le procédé d'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT à partir de la base canonique.

22. Dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer une base orthonormée de l'hyperplan d'équation
$$x_1 + \cdots + x_n = 0.$$

23. Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, on définit $\varphi(u, u') = xx' + 2yy' + 4zz' + xz' + x'z$.

a) Montrer que φ est un produit scalaire.

b) Déterminer $\mathrm{F}^\perp$ si F est le sous-espace vectoriel d'équation $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$.

24. $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est muni du produit scalaire défini à l'exercice **3*b***.

a) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n)$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ telle que $\deg \mathrm{P}_k = k$.

b) Expliciter $\mathrm{P}_0, \dots \mathrm{P}_n$ lorsque $a_0 = \cdots = a_n = a$.
Réfléchissez bien avant de calculer...

PROJECTIONS ET SYMÉTRIES ORTHOGONALES

25. Dans E euclidien de dimension 4 rapporté à une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on note
$$\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \text{ et } \vec{v} = 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_4$$
Écrire la matrice de la projection orthogonale de E sur le sous-espace $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

26. Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien usuel, on considère le sous-espace F d'équation : $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$

a) Déterminer une base orthonormée de F.

b) Exprimer la projection orthogonale puis la symétrie orthogonale par rapport à F.

27. $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Écrire les matrices relatives à la base canonique de :

a) la projection orthogonale par rapport au plan d'équation $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

b) la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan d'équation $5x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0$.

28. Soit p un projecteur de E.

a) Montrer que p est un projecteur orthogonal $\iff \forall x \in \mathrm{E},\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$

b) Montrer que p est un projecteur orthogonal $\iff \forall x, y \in \mathrm{E},\ \langle p(x) \mid y\rangle = \langle x \mid p(y)\rangle$

29. Soit E euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une BON de E.
Soit F un sev de E et $\mathscr{C} = (u_1, \dots u_p)$ une BON de F.

Montrer que $\quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_\mathrm{F}) = \sum_{k=1}^p \mathrm{U}_k.\mathrm{U}_k^\top \quad$ où U_k est les coordonnées de u_k dans $\mathscr{B}$.

DISTANCE À UN SOUS-ESPACE, MINIMISATION

30. Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien usuel, soit P le plan d'équation : $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$ et $u=(a,b,c,d)$ un vecteur non nul.
Calculer la distance de u au plan P.

31. Dans $\mathbb{R}_3[X]$ euclidien canonique $\left(\langle P \mid Q\rangle = \sum_{k=0}^{3} a_k b_k\right)$, soit $H=\{P\in\mathbb{R}_3[X] \mid P(1)=0\}$.
Déterminer une base orthonormée de $H^\perp$.
Calculer la projection orthogonale de X sur H, puis la distance de X à H.

32. Dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique, soit $H : \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$ un hyperplan.

Montrer que la distance du vecteur $x=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$ à H est : $\quad d(x,H)=\dfrac{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}}$

33. On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique $\langle A \mid B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$.

a) Montrer que les matrices élémentaires forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Calculer la distance de la matrice J uniquement composée de 1 (matrice d'ATTILA) à l'ensemble des matrices diagonales.

c) Calculer la distance d'une matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

34. On définit l'application $\varphi : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t} P(t)Q(t)\,dt \end{array}\right.$

a) Montrer que φ est un produit scalaire.

b) Calculer $\varphi(X^p, X^q)$.

c) Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t}(t^2-at-b)^2\,dt$.

35. Montrer qu'il existe un unique triplet (a,b,c) de réels minimisant $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3-ax^2-bx-c)^2\,dx$.
On déterminera ce triplet ainsi que la valeur du minimum.

36. Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^{\pi}(t-a\sin t-b\cos t)^2\,dt$.

37. Montrer que $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_0^{+\infty}(at^3+bt^2+ct+1)^2\mathbf{e}^{-t}\,dt=\frac{1}{4}$.

38. Montrer que $\displaystyle\inf_{a,b\in\mathbb{R}}\int_0^1 x^2(\ln x-ax-b)^2\,dx=\frac{1}{432}$.

39. Déterminant de GRAM
Soit E un espace préhilbertien réel. Pour $(u_1,\dots,u_p)$ famille de vecteurs de E, on note $G(u_1,\dots,u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}\,p\mathbb{R}$ dont le coefficient d'indice (i,j) est $\langle u_i \mid u_j\rangle$.

a) Que dire de $G(u_1,\dots,u_p)$ si $(u_1,\dots,u_p)$ est orthogonale ? orthonormée ?

b) Montrer que si la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est liée alors $\det G(u_1,\dots u_p)=0$

c) Prouver la réciproque.

d) Soient F un sev de E et $(e_1,\dots e_p)$ une base (quelconque) de F.

Montrer que, pour tout $x\in E$, $\quad d^2(x,F)=\dfrac{\det G(e_1,\dots e_p,x)}{\det G(e_1,\dots e_p)}$

(Décomposer x selon $F\oplus F^\perp$.)

POLYNÔMES ORTHOGONAUX

40. Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$. On pose si $A,B\in E$:
$$\varphi(A,B)=\int_{-1}^{1}\frac{A(t)B(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

a) Montrer qu'on a ainsi défini un produit scalaire.

b) Si p et q sont des entiers, calculer $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(pt)\cos(qt)\,dt$.

c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme T_n tel que :
$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \cos(n\theta)=T_n(\cos\theta).$$

d) Montrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

e) En déduire une base orthonormée de E.

41. **Racines de polynômes orthogonaux**.
Soient $a,b\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, $a<b$, ω une application continue sur $I=]a,b[$, positive, ne s'annulant qu'un nombre fini de fois et telle que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, $t\mapsto P(t)\omega(t)$ soit intégrable sur I.

a) Si $I=\mathbb{R}$, donner un exemple d'une telle application ω.

b) Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $E=\mathbb{R}[X]$ en posant :
$$\forall A,B\in\mathbb{R}[X],\quad \langle A\mid B\rangle=\int_I A(t)B(t)\omega(t)\,dt$$

c) Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'orthonormalisée de la base canonique de E.
Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, e_n est de degré n.
Soit $n\geqslant 1$. En considérant $(e_n|e_0)$, montrer d'abord que e_n a au moins une racine sur I puis que e_n est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples qui sont toutes dans I.
Indication : Poser $P=\prod_{k=1}^{p}(X-\rho_k)$ si les ρ_k sont les racines d'ordre impair de e_n qui sont dans I puis regarder $(P\times e_n)$ pour conclure que $p=n$.

CONCOURS

42. *CCP PSI*
Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x-2y+z=0$.

43. *CCP PSI*
Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$.

a) Montrer que φ est un produit scalaire.

b) Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_3[X]$ pour ce produit scalaire.

44. *CCP PSI*
Sur $\mathbb{R}_n[X]$ on définit l'application $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)\,Q^{(k)}(1)$.

a) Montrer que c'est un produit scalaire.

b) Montrer que l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(1)=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner sa dimension.

c) Calculer $d(1, E)$.

45. *CCP PSI*
Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)e^{-t}\,dt$.

a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Déterminer $\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2-at-b)^2 e^{-t}\,dt$.

46. *CCP PSI*
Pour $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, on pose
$$\varphi(A,B) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

a) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Soit H l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients est nulle. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer la distance $d(A,H)$.

47. *CCP PSI*

a) Montrer que l'application $(A,B) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2 \mapsto \operatorname{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire.

b) Montrer que $E = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a\end{pmatrix},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Trouver une base de $E^\perp$.

d) Déterminer la distance de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$ à $E^\perp$.

48. *TPE PSI*
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, dont le produit scalaire est noté $(\cdot|\cdot)$. Soient $\mathscr{F} = (x_1,\dots,x_n)$ et $\mathscr{G} = (y_1,\dots,y_n)$ deux familles de vecteurs de E telles que : $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $(x_i|x_j) = (y_i|y_j)$.

a) Montrer que $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si $\mathscr{G}$ est libre.

b) Montrer que $\dim \operatorname{Vect}(\mathscr{F}) = \dim \operatorname{Vect}(\mathscr{G})$.

49. *CCP PSI*
Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E. Soit $f \in GL(E)$ un automorphisme tel que : $\forall (x,y)\in E^2$, $\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = 0$.

a) Que dire de la famille $\mathscr{B}' = (f(e_1),\dots,f(e_n))$?

b) En calculant $\langle f(e_i)+f(e_j), f(e_i)-f(e_j)\rangle$ de deux façons, montrer qu'il existe $a>0$ tel que $\|f(e_i)\|^2 = a^2$ pour tout i. Que dire de la famille $\frac{1}{a}\mathscr{B}'$?

50. *TPE PSI*
Soit E un espace préhilbertien réel. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E converge faiblement vers $x\in E$ si : $\forall y \in E$, $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n - x, y\rangle = 0$.

a) On suppose que E est de dimension finie. Montrer que (x_n) converge faiblement vers x si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$.

b) Montrer que cette équivalence est fausse en dimension infinie.

51. *Centrale PSI*
Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

a)(i) Si la norme N est euclidienne, montrer qu'on a l'identité du parallélogramme : $\forall x,y \in E$, $N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2N(x)^2 + 2N(y)^2$.

(ii) Donner une expression du produit scalaire en fonction de N.

(iii) La norme $\|\ \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifie-t-elle l'identité du parallélogramme ?

b) On suppose que la norme N sur E vérifie l'identité du parallélogramme. On pose $f(x,y) = N(x+y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2$ pour tous $x, y \in E$.

(i) Soient $x, x', y \in E$. Montrer que $f(x+x', y) = 2f(x, y/2) + 2f(x', y/2)$.

(ii) En déduire que $f(x+x', y) = f(x,y) + f(x', y)$.

(iii) Montrer que pour tous $x, y \in E$ et $t\in\mathbb{R}$, $f(tx, y) = tf(x,y)$.

(iv) Conclure que f est un produit scalaire et que la norme N est euclidienne.

52. *Mines Ponts PSI*
On munit l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} PQ$. Soit $F = \{P \in E,\ \langle X^2-1, P'\rangle = \langle X, P\rangle\}$ et $Q = 1+X+X^2+X^3$. Déterminer $d(Q,F)$.

53. *Mines Ponts PSI*
Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}$ et $\Phi : (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X] \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les a_k pour que Φ soit un produit scalaire.

b) Calculer la distance de X^n à $F = \left\{ P \in \mathbb{R}^n[X],\ \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$.

54. *Mines Ponts PSI*
Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E, montrer que $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \exists!(f_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in E^n$, $M = (\langle e_i, f_j\rangle)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

b) Étudier la réciproque.

55. *Mines Ponts PSI*
Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f,g) = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\,dt$.

a) Montrer que φ est un produit scalaire.

b) Soient $V = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E,\ f'' = f\}$. Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux. Exprimer la projection orthogonale sur W des éléments de E.

c) On note $E_{\alpha,\beta} = \{f \in E,\ f(0) = \alpha,\ f(1) = \beta\}$. Calculer $\inf\limits_{f\in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 (f^2 + (f')^2)$.

56. *Mines Ponts PSI*
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E. Démontrer l'existence d'une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E telle que la famille $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ soit orthogonale.

57. *Mines Ponts PSI*
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E. Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux si et seulement si $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = d(x,F)^2 + d(x,G)^2$.

58. *Mines Ponts PSI*
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de fonctions continues et de carré intégrable sur I. On pose pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = \int_I f_i(t) f_j(t)\,dt$.
Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (X,Y) \mapsto {}^tXAY$ où A est la matrice de terme général a_{ij}.
Montrer que φ est un produit scalaire si et seulement si la famille $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.