COURS

ALGÈBRE 3 – RÉDUCTION

I- ÉLÉMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME 1
1. DÉFINITIONS 1
2. PROPRIÉTÉS DES ÉLÉMENTS PROPRES 2
3. VALEURS PROPRES ET POLYNÔMES D'ENDOMORPHISME 2

II- ÉLÉMENTS PROPRES D'UNE MATRICE CARRÉE 3
1. DÉFINITIONS 3
2. PROPRIÉTÉS 3
3. IMPORTANCE DU CORPS DE BASE 3

III- POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE 3
1. DÉFINITION 3
2. POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE ET VALEURS PROPRES 3
3. POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE ET SEV STABLE 4
4. MATRICES SEMBLABLES 4
5. ORDRE DE MULTIPLICITÉ DES VALEURS PROPRES 4
6. THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON 4

IV- DIAGONALISATION 5
1. DÉFINITION 5
2. DIAGONALISABILITÉ – APPROCHE GÉOMÉTRIQUE 5
3. EXEMPLES 5
4. DIAGONALISABILITÉ ET POLYNÔMES ANNULATEURS 5
5. DIAGONALISABILITÉ ET SOUS-ESPACES STABLES 6
6. PRATIQUE DE LA DIAGONALISATION 6

V- TRIGONALISATION 6
1. DÉFINITION 6
2. CNS DE TRIGONALISABILITÉ 6
3. RECHERCHE PRATIQUE EN DIMENSION 3 6

VI- APPLICATIONS CLASSIQUES 7
1. PUISSANCES D'UNE MATRICE 7
2. SYSTÈME DE SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES D'ORDRE 1 7
3. COMMUTANT D'UN ENDOMORPHISME (D'UNE MATRICE) DIAGONALISABLE 7
4. SOUS ESPACES STABLES PAR UN ENDOMORPHISME DIAGONALISABLE 7
5. SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES 7

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de **dimension finie**, non réduit au vecteur nul.

On se donne un endomorphisme u ou une matrice carrée A. Le but du chapitre est de chercher une base dans la quelle la matrice de l'endomorphisme sera simple (diagonale ou triangulaire), ou une matrice simple semblable à A.

La proposition 12 est un résultat primordial : si $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $\mathscr{B}$ est une base de E,

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u) \text{ est diagonale } \Longleftrightarrow \text{ les vecteurs de } \mathscr{B} \text{ sont propres pour } u$$

et dans ce cas, les termes diagonaux de cette matrice sont les valeurs propres de u.
Cela justifie que l'on recherche les éléments propres.

I- ÉLÉMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME

1. DÉFINITIONS

DÉFINITION 1 *Éléments propres*

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

- Une *valeur propre* de u est un scalaire λ tel qu'il existe un vecteur x non nul vérifiant $u(x) = \lambda x$.
- Un *vecteur propre* de u est un vecteur x non nul tel que la famille $\big(x, u(x)\big)$ est liée i.e. tel qu'il existe un scalaire λ vérifiant $u(x) = \lambda x$.
  x est alors dit *vecteur propre associé à la valeur propre* λ.
- L'*équation aux éléments propres* est l'équation $u(x) = \lambda x$ d'inconnues le vecteur x et le scalaire λ.
- Le *sous-espace propre* de u associé à la valeur propre λ est le sous-espace
  $$\mathrm{E}_\lambda(u) = \ker(u - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \big\{x \in \mathrm{E} / u(x) = \lambda x\big\}.$$
- Le *spectre* de u est l'ensemble noté $\mathrm{Sp}(u)$ des valeurs propres de u.

$\mathrm{E}_\lambda(u)$ est donc un sous-espace vectoriel de E.
Attention, $0_\mathrm{E} \in \mathrm{E}_\lambda(u)$ mais ce n'est pas un vecteur propre de u.

EXEMPLES

- Exemples à connaître par cœur : homothétie, projecteur, symétrie.
- $\mathrm{E} = \mathbb{C}^\mathbb{N}$ et $\Delta \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\Delta(u) = v$ où $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = u_{n+1}$.
- $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ et r une rotation.
- $\mathrm{E} = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $u(f) = f'$. Et avec $\mathrm{E} = \mathbb{R}[X]$?

2. Propriétés des éléments propres

Quelques propriétés élémentaires mais importantes des éléments propres :
Soit u un endomorphisme de E

PROPOSITION 1 *Injectivité et vp*

0 est valeur propre de u si et seulement si u est non injective.
Si E est de dimension finie, $0 \in \mathrm{Sp}(u) \iff u$ est non bijective $\iff \det u = 0$.

PROPOSITION 2 *Sep et stabilité*

- Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres **non nulles** sont des sous-espaces de $\mathrm{Im}\, u$.
- Une droite vectorielle est stable par u si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de u.
- Tout sous-espace propre de u est stable par u et l'endomorphisme induit par u sur un sous-espace propre est une homothétie.
- Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.

PROPOSITION 3 *Sommes de sep*

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est directe.

COROLLAIRE 1

- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.
- La réunion de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est une famille libre.

3. Valeurs propres et polynômes d'endomorphisme

PROPOSITION 4 *Vp de* $\mathrm{P}(u)$

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Si λ est une valeur propre de u alors $\mathrm{P}(\lambda)$ est une valeur propre de $\mathrm{P}(u)$.

COROLLAIRE 2 *Vp et annulateur*

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un annulateur de u alors toute valeur propre de u est racine de P.

REMARQUE

Cette condition est nécessaire, pas suffisante : les racines d'un polynôme annulateur de u ne sont pas nécessairement des valeurs propres de u.
Les vp sont **parmi** les racines d'un annulateur.

EXEMPLES

Quelles sont les valeurs propres possibles d'un endomorphisme u vérifiant $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0$? $u^2 - u + \mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0$?

II- Éléments propres d'une matrice carrée

1. Définitions

DÉFINITION 2 *Éléments propres*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les éléments propres de A sont ceux de l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé. Ainsi :

- Une *valeur propre* de A est un scalaire λ tel qu'il existe un vecteur X non nul de $\mathbb{K}^n$ vérifiant $AX = \lambda X$.
- Un *vecteur propre* de A est un vecteur X non nul de $\mathbb{K}^n$ tel que la famille (X, AX) est liée i.e. tel qu'il existe un scalaire λ vérifiant $AX = \lambda X$.
  X est alors dit vecteur propre associé à la valeur propre λ.
- Le *sous-espace propre* de A associé à la valeur propre λ est le sous-espace
  $$E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathbb{K}^n / AX = \lambda X\}.$$
- Le *spectre* de A est l'ensemble noté $\mathrm{Sp}(A)$ des valeurs propres de A.

2. Propriétés

On retrouve les propriétés précédentes et en particulier :

PROPOSITION 5

- 0 est valeur propre de A si et seulement si A est non inversible.
- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. λ valeur propre de A $\Longrightarrow$ $P(\lambda)$ valeur propre de $P(A)$.
- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$. Alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Longrightarrow P(\lambda) = 0$.

EXEMPLE

Quelles sont les vp possibles de la matrice des 1 (matrice d'ATTILA) ?

PROPOSITION 6 *Vp de matrices semblables*

Deux matrices semblables ont même spectre.

3. Importance du corps de base

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A peut être vue comme une matrice de $\mathcal{M}_n\mathbb{C}$.

(i) $\mathrm{Sp}_\mathbb{R}(A) \subset \mathrm{Sp}_\mathbb{C}(A)$, l'inclusion pouvant être stricte. EXEMPLE : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) Si λ est une valeur propre complexe de A, alors $\overline{\lambda}$ aussi. De plus, $X \in E_\lambda(A) \Longleftrightarrow \overline{X} \in E_{\overline{\lambda}}(A)$

III- Polynôme caractéristique

1. Définition

DÉFINITION 3 *Polynôme caractéristique*

Le *polynôme caractéristique* de u est l'application χ_u définie par $\chi_u(x) = \det(x\mathrm{Id}_E - u)$

Le *polynôme caractéristique* de A est l'application χ_A définie par $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & \dots & \dots & x - a_{nn} \end{vmatrix}$$

PROPOSITION 7

χ_u [resp. χ_A] est un polynôme de degré n, son terme de dominant est X^n, son terme constant est $(-1)^n \det A$ et son terme de degré $n-1$ est $-\mathrm{tr}(A)\, X^{n-1}$.

$$\chi_u = \chi_A = X^n - \mathrm{tr}\,A \,.\, X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$$

REMARQUE

- Une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique.
- Un endomorphisme d'un ev de dimension finie n, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont au plus n valeurs propres .

2. Polynôme caractéristique et valeurs propres

THÉORÈME 1 *Polynôme caractéristique et vps*

Les valeurs propres de u [resp. A] sont les racines du polynôme caractéristique.

La recherche des valeurs propres passe donc par le calcul et la factorisation du polynôme caractéristique. Il est donc très intéressant d'obtenir des factorisations « en cours de route ».

EXEMPLE

$A = \begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

Cas particuliers :

PROPOSITION 8 *Vp des matrices triangulaires*

Si A est diagonale ou triangulaire, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.
Si u admet une matrice diagonale ou triangulaire dans une certaine base, ses valeurs propres sont les éléments diagonaux de cette matrice.

3. POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE ET SEV STABLE

PROPOSITION 9 *Pol. car. de l'endom. induit sur un sev stable*

Soit F un sev stable par u. Alors $\chi_{u_{|F}}$ divise χ_u.

4. MATRICES SEMBLABLES

PROPOSITION 10

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

5. ORDRE DE MULTIPLICITÉ DES VALEURS PROPRES

DÉFINITION 4 *Ordre de multiplicité des vps*

L'*ordre de multiplicité* de la valeur propre λ de u est son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_u.

PROPOSITION 11 *Sommes et produit des vp*

Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, $\operatorname{tr} u$ et $\det u$ sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres de u comptées avec leur ordre de multiplicité.

REMARQUE

Pour une matrice réelle, il faut compter **toutes** les vp, y compris les complexes non réelles.

THÉORÈME 2 *Ordre de multiplicité et dimension du sep*

Pour chaque valeur propre λ de u,

$$1 \leqslant d_\lambda \leqslant m_\lambda$$

où $d_\lambda = \dim \ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$
et m_λ est l'ordre de multiplicité de λ.

La dimension du sous-espace propre est donc toujours majorée par l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

REMARQUE

Lorsque λ est valeur propre d'ordre 1 (simple) de χ_u, le sous-espace propre associé est de dimension 1.

6. THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON

THÉORÈME 3 *de* CAYLEY-HAMILTON *(dem non exigible)*

Pour $u \in \mathscr{L}(E)$, E de dimension finie, pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, le polynôme caractéristique est un annulateur.

$$\chi_u(u) = 0 \qquad \chi_A(A) = 0$$

IV- DIAGONALISATION

1. DÉFINITION

PROPOSITION 12 *Base de diagonalisation*

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E.

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u) \text{ est diagonale } \iff \text{ les vecteurs de } \mathscr{B} \text{ sont propres pour } u$$

DÉFINITION 5 *Diagonalisabilité*

L'endomorphisme u est *diagonalisable* s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u c'est-à-dire s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Dans ce cas, les éléments diagonaux sont les valeurs propres de u et on dit que $\mathscr{B}$ est une base de diagonalisation de u.

De façon équivalente : u est diagonalisable si E se décompose comme somme directe des sous-espaces propres de u :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \ker(u - \lambda\,\mathrm{Id}).$$

La matrice A est *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ P^{-1}AP \text{ est diagonale}$$

PROPOSITION 13

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable. En notant p_λ le projecteur sur $E_\lambda(u)$ parallèlement à la somme des autres seps, on a :

$$u = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda \cdot p_\lambda$$

2. DIAGONALISABILITÉ – APPROCHE GÉOMÉTRIQUE

THÉORÈME 4 *CNS de diagonalisabilité (géométrique)*

u est diagonalisable si et seulement si

$$\begin{cases} \chi_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ \text{pour chaque valeur propre } \lambda,\ d_\lambda = m_\lambda \end{cases}$$

où $d_\lambda = \dim\ker(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$
et m_λ est l'ordre de multiplicité de λ.

ce que l'on peut également exprimer, compte tenu du théorème 2 par :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} d_\lambda = \dim E$$

REMARQUE

Pour une valeur propre simple λ, on a automatiquement $d_\lambda = m_\lambda = 1$. Il suffit donc de vérifier la condition pour les valeurs propres multiples.

3. EXEMPLES

- $A = \begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ (exemple précédent)
- $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 6 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
- $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
- $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ u : M \mapsto M + \mathrm{tr}\,M.I_n$

PROPOSITION 14

u est diagonalisable si et seulement si il existe des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_q$ de E stables par u avec $E = \sum_{j=1}^{q} F_j$ tels que u induit sur chaque F_j une homothétie.

Un cas particulier qui se déduit de la CNS :

PROPOSITION 15 *CS de diagonalisabilité*

Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et n'a que des racines simples, alors u est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites.

ce que l'on peut également énoncer en : si u a exactement $n = \dim E$ vp simples, alors…

4. DIAGONALISABILITÉ ET POLYNÔMES ANNULATEURS

THÉORÈME 5 *CNS de diagonalisabilité (algébrique) (dem non exigible)*

$u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur de u scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples.

$u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est un annulateur de u.

EXEMPLES

- Matrice des 1 (matrice d'ATTILA).
- Recherche d'un polynôme annulateur de $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.
- À quelle condition la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

5. DIAGONALISABILITÉ ET SOUS-ESPACES STABLES

PROPOSITION 16

Si u est diagonalisable et F est un sev stable par u, alors la restriction de u à F est un endomorphisme diagonalisable de F.

6. PRATIQUE DE LA DIAGONALISATION

- On calcule le polynôme caractéristique en faisant apparaître le plus possible de factorisations en cours de calcul ;
- pour chacune des valeurs propres (en commençant par les valeurs propres multiples), on détermine une base du sous-espace propre associé : on écrit effectivement la matrice $A - \lambda.I$ et on repère les combinaisons linéaires des colonnes qui sont nulles, sinon on résout le système linéaire correspondant ;
- on introduit la matrice de passage à la nouvelle base constituée en colonnes des vecteurs propres qu'on vient de trouver ;
- on écrit la formule de changement de base : $D = P^{-1}AP$.

On ne calcule effectivement P^{-1} qu'en cas de nécessité ou de demande explicite.

V- TRIGONALISATION

1. DÉFINITION

DÉFINITION 6 *Trigonalisabilité*

$u \in \mathscr{L}(E)$ [resp. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$] est *trigonalisable* sur $\mathbb{K}$ s'il existe une base telle que la matrice de u dans cette base soit triangulaire supérieure [resp. A est semblable à une matrice triangulaire supérieure].

REMARQUE

- en changeant l'ordre des vecteurs de base il est équivalent de prendre une matrice triangulaire inférieure ;
- tout endomorphisme diagonalisable est trigonalisable.

2. CNS DE TRIGONALISABILITÉ

THÉORÈME 6 *CNS de trigonalisabilité (dem non exigible)*

Tout endomorphisme u [toute matrice A] dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ est trigonalisable sur $\mathbb{K}$.

Conséquence importante : tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$−espace vectoriel est trigonalisable.

3. RECHERCHE PRATIQUE EN DIMENSION 3

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ ou A une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ ayant un polynôme caractéristique scindé. On cherche une base $\mathscr{B}$ dans la quelle la matrice de u est diagonale (si possible) ou sinon triangulaire supérieure.

EXEMPLES

- 1 vp simple et 1 double : $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 6 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- 1 vp triple : $E = \begin{pmatrix} -8 & -25 & 35 \\ 4 & 12 & -14 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} -9 & -27 & 38 \\ 3 & 10 & -11 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

VI- APPLICATIONS CLASSIQUES

On se place en dimension 3 dans ces exemples. L'étude s'adapte en dimension 2 ou $n \geqslant 4$.
On supposera que le corps de base est C, toute matrice est donc trigonalisable.

1. PUISSANCES D'UNE MATRICE

- idée de base : Si $M = PAP^{-1}$ on a alors $M^k = PA^kP^{-1}$ $\quad k \in \mathbb{N}$ et même $k \in \mathbb{Z}$ si M est inversible.
- cas très simple : si M est diagonalisable on prend pour A une matrice diagonale et A^k est évidente à calculer.
- cas moins simple : si $n = 3$ et M non diagonalisable mais trigonalisable, on prend A triangulaire d'un des types précédents. À chaque fois $A = D+N$ avec D diagonale, N nilpotente telles que $DN = ND$ (à vérifier impérativement à chaque fois). Le binôme de Newton permet alors de conclure.

2. SYSTÈME DE SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES D'ORDRE 1

Pour résoudre des récurrences du type $U_{n+1} = AU_n$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{K}^p$, on est amené à calculer les puissances de A et utiliser l'alinéa précédent.

On ramène l'étude d'une équation linéaire d'ordre n : $u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_0 u_n$ à un système précédent en considérant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$ et A une matrice-compagnon (*cf* TD).

3. COMMUTANT D'UN ENDOMORPHISME (D'UNE MATRICE) DIAGONALISABLE

Soit u un endomorphisme diagonalisable. On cherche $G = \left\{g \in \mathcal{L}(E) \,/\, u \circ g = g \circ u\right\}$.
On diagonalise u.
Puis, si $g \in G$, chaque sous espace propre de u est stable par g. La matrice de g dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ est donc diagonale par blocs.
La réciproque est triviale.
En particulier la dimension de G est la somme des carrés des multiplicités des valeurs propres.

4. SOUS ESPACES STABLES PAR UN ENDOMORPHISME DIAGONALISABLE

PROPOSITION 17

Soit u est diagonalisable.
Le sev F est stable par $u \iff$ F est engendré par des vecteurs propres de u.

EXEMPLE

Trouver les sev stables par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES

Il s'agit ici de systèmes d'équations de la forme

$$(\mathcal{E}) \qquad X' = A\cdot X$$

où $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

En notant $x_i(t)$ les composantes de $X(t)$, on a :

$$X' = A\cdot X \iff \begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

La résolution d'un tel système se fait en diagonalisant la matrice A : $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
En effectuant le changement de base $X = PY$, $A = PDP^{-1}$, $X = AX' \iff Y' = DY$.
Le système $Y' = DY$ est alors un système diagonal c'est-à-dire un système d'équations différentielles (une seule fonction inconnue par ligne) qui se résolvent indépendamment les unes des autres :

$$Y' = DY \iff Y(t) = \begin{pmatrix} C_1 \mathbf{e}^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n \mathbf{e}^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{e}^{\lambda_i t} E_i$$

où les E_i sont les vecteurs de la base canonique et les C_i des constantes arbitraires.
et donc

$$X' = AX \iff X(t) = \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{e}^{\lambda_i t} V_i$$

où les $V_i = PE_i$ sont les colonnes de P c'est-à-dire des vecteurs propres associés à λ_i.
On obtient donc un système fondamental de solutions c'est-à-dire une base de l'espace des solutions : $\left(t \mapsto \mathbf{e}^{\lambda_i t} V_i\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$

Dans le cas où A réelle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$, les vp sont conjuguées deux à deux avec le même ordre de multiplicité.
On résout le système sur $\mathbb{C}$ et on prend les parties réelles et imaginaires d'un système fondamental de solution pour obtenir un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}$.
Dans le cas où A est trigonalisable, on trigonalise la matrice en se plaçant si besoin dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on pratique comme ci-dessus : $A = PTP^{-1}$, $X = PY$, $\quad X' = AX \iff Y' = TY$ (système triangulaire).
On résout ensuite le système linéaire obtenu en commençant par la dernière équation, qui est une équation différentielle, on reporte dans l'avant-dernière qui devient une équation

différentielle avec second membre, et ainsi de suite.

EXEMPLES

(i) $\left\{\begin{array}{l} x' = -3x+5y-5z \\ y' = -4x+6y-5z \\ z' = -4x+4y-3z \end{array}\right.$

(ii) $\left\{\begin{array}{l} x' = -2x \\ y' = -z \\ z' = y \end{array}\right.$

(iii) $\left\{\begin{array}{l} x' = 5x-3y-4z \\ y' = -x+y-2z \\ z' = x-3y \end{array}\right.$